

## 剛性鋪面三維有限元素參數分析與驗證

吳忻達<sup>1</sup> 李英豪<sup>2</sup> 顏少棠<sup>3</sup>

關鍵詞：剛性鋪面、有限元素模式、應力、撓度、設計、因次分析、預估模式。

### 摘 要

本文主要目的在進行剛性鋪面三維有限元素參數分析與驗證。本研究將利用批次化分析之程序，來執行有限元素批次分析，以探討網格切割與元素選擇對三維版殼元素與三維固體元素之撓度與應力收斂特性之影響，並提供具體之建議。研究中並發現版厚與荷重半徑之比值是影響鋪面力學行為的另一個重要參數。最後，並建立應力與撓度之無因次資料與預測模式，希望可與過去二維有限元素分析之成果整合，建立三維有限元素設計與評估流程。

## PARAMETER STUDIES AND VERIFICATIONS ON THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT ANALYSIS OF RIGID PAVEMENTS

Hsin-Ta Wu Ying-Haur Lee Shao-Tang Yen

*Department of Civil Engineering  
Tamkang University  
Taipei, Taiwan 25137, R.O.C.*

*Key Words:* rigid pavement, finite element model, stress, deflection, design, dimensional analysis, predictive model.

### ABSTRACT

The main objective of this study was to conduct in-depth parameter studies on 3-D finite element (FEM) analysis of rigid pavements under edge loading conditions. A systematic analytical approach was utilized and implemented in a Visual Basic software package to study the effects of mesh fineness and element selection. The deflection and stress convergence characteristics of various 3-D shell and solid elements were investigated. Several guidelines in mesh fineness and element selection were developed and recommended. Using the principles of dimensional analysis, an additional dimensionless variable ( $h/a$ ) was identified and verified to have a substantial influence on ABAQUS runs using either 3-D shell or 3-D solid elements. Separate 3-D FEM stress and deflection databases were developed using all dimensionless variables. An example critical stress predictive model

<sup>1</sup>淡江大學土木工程學系碩士

<sup>2</sup>淡江大學土木工程學系教授

<sup>3</sup>淡江大學土木工程學系博士

was developed. Together with the existing 2-D FEM research findings, a tentative stress prediction equation was proposed to illustrate its possible applications.

## 一、前言

以力學為基礎之鋪面設計與結構評估之程序，首重如何決定鋪面版之臨界應力及撓度。二維有限元素程式 (ILLI-SLAB) 已被成功地應用在鋪面力學分析，顯著的改善在無限版長與路基土壤完全接觸等諸多假設下理論解之不足，在現地資料驗證上亦得到不錯的結果 [1]。文獻中亦指出隨著三維有限元素程式 (ABAQUS) 在鋪面之分析與應用，不僅可以改善二維鋪面分析之不足，並且其結果更佳 [2-6]。因此，以三維有限元素分析鋪面版力學反應是不可避免之趨勢。然而，三維有限元素分析需要更多分析時間及複雜之模式構建，無法很容易的應用到現有的鋪面設計與評估方法中。因此，本研究主要目的在進行剛性鋪面三維有限元素參數分析與驗證 [7]，研究的終極目標在搭起二維有限元素、三維有限元素、與理論解之間橋樑，以作為後續建立以力學為基礎之三維有限元素法鋪面設計及鋪面評估 (回算) 流程。本文將只介紹混凝土鋪面版在溫式基礎下受邊緣荷重時之分析結果。

## 二、理論解與有限元素模擬

Westergaard 曾分析一個無限或半無限長混凝土鋪面版在緊密液體基礎下受到單輪邊緣載重作用下之結構反應，並推導出以下的封閉型理論解 [8]。

$$\sigma_{we} = \frac{3(1+\mu)P}{\pi(3+\mu)h^2} \left[ \ln \frac{Eh^3}{100ka^4} + 1.84 - \frac{4}{3}\mu + \frac{1-\mu}{2} + 1.18(1+2\mu) \frac{a}{\ell} \right] \quad (1)$$

$$\delta_{we} = \frac{\sqrt{2+1.2\mu}P}{\sqrt{Eh^3k}} \left[ 1 - \frac{(0.76+0.4\mu)a}{\ell} \right] \quad (2)$$

其中， $\sigma_{we}$  是 Westergaard 邊緣應力， $[FL^{-2}]$ ； $\delta_{we}$  是邊緣撓度， $[L]$ ； $P$  是單輪荷重， $[F]$ ； $h$  是版的厚度， $[L]$ ； $a$  是荷重半徑， $[L]$ ； $\ell$  是相對勁度半徑  $= (E*h^3/(12*(1-\mu^2)*k))^{0.25}$ ， $[L]$ ； $k$  是路基反力模數， $[FL^{-3}]$ ； $E$  是混凝土彈性模數， $[FL^{-2}]$ ； $\mu$  是柏松比。其中， $[F]$  代表力、 $[L]$  代表長度的主要因次單位。 $\gamma$  是 Euler 常數  $= 0.577215664901$ 。

近年來，有限元素法模式 (FEM) 已被成功地運用在鋪面結構之反應分析上，其所求得之鋪面理論反應值，較以往根據無限版長及完全路基支承的假設所得之理論解，更能切合實際地模擬鋪面版有限的尺寸，及可能因線性溫差而產生局部喪失路基支承之情形。本研究將使用知名的二維 (2-D) ILLI-SLAB 程式與三維 (3-D) ABAQUS 有限元素程式從事後續研究 [9,10]。在相關文獻中對於 ILLI-SLAB 有限元素、ABAQUS 三維版殼元素與三維固體元素之特性，有較詳細的介紹 [2,4,7]。

ABAQUS 將版殼元素分為三大類，分別為厚版元素、薄版元素與一般版殼元素。厚版元素定義為長度與版厚之比小於 15 且考慮橫向剪力撓曲勁度與二階項之積分。薄版元素定義為長度與版厚之比大於 15 且橫向剪力撓曲勁度可以忽略，當版受力變形後，版之法線仍與版呈直角。一般狀況之版殼元素容許橫向之剪力變形，當版厚增加時使用厚版理論，當版厚變小時，使用薄版理論。ABAQUS 固體元素中主要分別為積分點數之不同與降階積分與否。8 點固體元素為一階線性元素，適用於較大變形且不連續之結構，而 20 點與 27 點元素為二階元素，適用於小變形且連續之元素。

本研究所使用之三維版殼元素包括符合薄版理論或當厚度減少時在數值上可以收斂至薄版理論者，如 S4、S4R、S4R5、S8R、S8R5、S9R5 等六種元素，其特性如表 1。所選用的三維固體元素包括一階線性元素與二階元素，如 C3D8、C3D8R、C3D20、C3D20R、C3D27、C3D27R 等六種元素，其特性如表 2。在分析受到彎矩控制相關問題時，二階元素將比一階線性元素更有效率得到較精確的結果。其所使用的節點數、自由度、高斯積分點數、與降階積分與否，將代表各元素不同的相對複雜度與所需的運算時間 [10]。

其中，元素 S4 與 S4R 是一般通用的三維版殼元素。S4R5、S8R5、S9R5 版殼元素在數值上可以收斂至薄版理論，主要適用於薄版之分析；S8R 則較適用於分析厚版。固體元素 C3D20 有 27 個積分點數，而 C3D20R 僅有 8 個積分點數。固體元素 C3D27 與 C3D27R 藉著允許移除元素各面內部的節點，必要時其節點數可以在 21 至 27 間變動。

表 1 三維版殼元素與 ILLI-SLAB 特性比較

名稱	ILLI-SLAB	ABAQUS 3-D SHELL ELEMENTS					
	RPB12	S4	S4R	S4R5	S8R	S8R5	S9R5
維度	二維	三維					
節點數	4	4	4	4	8	8	9
自由度	3	6	6	5	6	5	5
降階積分	否	否	是	是	是	是	是
積分點數	4	4	1	1	4	4	4
使用限制	薄版	一般狀況	一般狀況	薄版	厚版	薄版	薄版

表 2 固體元素特性比較

名稱	ABAQUS 3-D SOLID ELEMENT					
	C3D8	C3D8R	C3D20	C3D20R	C3D27	C3D27R
節點數	8	8	20	20	27	27
降階積分	否	是	否	是	否	是
積分點數	8	1	27	8	27	14

降階積分元素利用較低階積分來形成元素勁度，因此可以降低所需的計算時間。一般而言，利用完全積分與降階積分之一階線性元素之精度受問題本身不同的特質影響。對於二階元素，降階積分元素通常可產生比完全積分元素較為精確的結果 [4,10]。

### 三、參數分析與模式構建

#### 3.1 網格切割之定義

一般而言，網格切割方式大多遵循以下步驟：判定結構對稱性與否、進行荷重區域之網格切割、決定相同網格切割密度之長度、決定網格切割密度。依據過去二維有限元素分析之文獻建議，水平方向網格切割密度都是以荷重區域之切割方式為標準，向外愈切割愈稀疏，以避免分析模擬勁度矩陣過大而增加分析之時間、資源、與困難度。

本研究將網格切割分為三種不同之切割密度，第一部份為荷重區域之網格切割 (I 區)、第二部分為荷重區域外至  $n$  倍荷重區域之網格切割 (II 區)、第三部份是  $n+1$  倍荷重區域到版邊緣之網格切割 (III 區)。在進行網格切割收斂性比較時，I 區之長度選定為荷重邊長，II 區之長度選定為 8 倍荷重區域邊長，以避免影響到 I 區之網格切割，III 區之長度為上述區域長度以外到版邊界之長度。本研究中，水平網格切割密度定義為荷重區域的長度與元素長度的比值。I 區與 II 區有相同的網格切割密度；而 III 區的網格切割密度為 I 區的 1/4 倍。

在進行三維有限元素分析時，除了水平向網格切割外，同時要考量到厚度方向之網格切割。然而，在現有文獻中甚少深入探討三維有限元素分析鋪面版時之網格切割方式之建議。雖然，文獻中對於在厚度方向網格切割方面仍有爭議 [2,4,8]，但是，可以確定的是每增加一切割層數會使得節點數倍數成長，並會造成分析之勁度矩陣成幾何級數成長。如果以過去的荷重區域之切割來決定厚度方向之切割層時，當荷重區域之邊長很小時，會使得切割層數非常多而造成電腦無法分析之情況或是分析時間過長。因此，厚度方向之網格切割密度定義為將版厚切割成相同厚度的層數。本研究希望在最少計算時間與最佳計算結果之間取得平衡，最後建立系統化網格切割原則與建議，以供後續研究之參考。

#### 3.2 撓度收斂特性

本文將探討單一版塊在溫式基礎下受到單輪邊緣荷重時，不同網格切割密度之撓度收斂性，所選用之元素包含了 ILLI-SLAB 程式之有限元素、ABAQUS 三維版殼元素、及三維固體元素。所選用之鋪面相關參數如下：有限版長  $L = 5.00 \text{ m}$  (197 in.)，有限版寬  $W = 5.00 \text{ m}$  (197 in.)，混凝土彈性模數  $E = 8.27 \text{ GPa}$  (1.2 Mpsi)，版厚  $h = 21.6 \text{ cm}$  (8.5 in.)，路基反力模數  $k = 27 \text{ MN/m}^3$  (100 pci)，胎壓  $p = 620 \text{ kPa}$  (90 psi)，柏松比  $\mu = 0.15$ ，單輪荷重  $P = 10 \text{ kN}$  (2,250 lbs)。依據因次分析的原理可知，上述的鋪面系統相當於輸入  $a/l = 0.1$ 、 $L/l = 7$ 、 $W/l = 7$ 、 $h/a = 3$  等四個主要的無因次參數，

其中  $a/l$  是輪荷重半徑與相對勁度半徑之比值，定義為『正規化荷重半徑』、 $L/l$  為版長與相對勁度半徑之比值，定義為『正規化版長』、 $W/l$  為版寬與相對勁度半徑之比值定義為『正規化版寬』、 $h/a$  為混凝土版厚與荷重半徑之比值，這些參數之選定將於後續章節中詳加討論。

為了確保較高的精度，本文採用相同的水平網格切割精度為 1 到 10，厚度方向切割層數為 1 到 4 層。I 區與 II 區有相同的網格切割密度；II 區之長度選定為 8 倍荷重區域邊長。本文將深入探討各種不同有限元素類型之撓度收斂特性。

圖 1 是在邊緣荷重下 ILLI-SLAB RPB12 元素、ABAQUS 三維版殼元素、與 Westergaard 理論解之撓度比值。圖中 ILLI-SLAB 所計算出之撓度值與理論解較接近，相差 4.3%，在 ABAQUS 中三維版殼元素所計算出撓度值都比理論解大，而且當網格切割較粗時，即網格切割為 1 時，所計算出之撓度以 S4R5 元素之撓度值最小，比理論解大 7.9%；其次是 S4 元素，比理論解大 8.7%；再其次是 S4R 元素，比理論解大 8.9%。S8R、S8R5、與 S9R5 元素計算出之撓度值數值相近，比理論解大 9.3%。圖中並且可以看出 4 點元素在網格切割為 1 時所計算出之撓度值較小，但是在網格切割為 3 時都有一個很好之收斂特性。當網格切割較密時，4 點元素所計算出之撓度值可以和 8 點元素或是 9 點元素所計算出之撓度值相同。此外，8 點元素或是 9 點元素在網格切割為 1 時就可以得到相當好的撓度收斂性或較有效率，並且其相對應的撓度值一般也較四點元素的撓度值略高。三維版殼元素以及 ILLI-SLAB 元素都會隨著網格切割越密而撓度值越大而快速收斂。

圖 2 代表在邊緣荷重下 ABAQUS 各種不同之三維固體元素與 Westergaard 理論解之撓度比值。圖中橫座標是水平方向之網格切割密度，縱座標則是撓度比。各子圖中數字 1、2、3、4 分別代表厚度方向之切割層數。在 C3D8 元素中，當網格切割層數為 1 且水平方向網格切割為 1 時，所計算之撓度值比理論解之撓度值大 5.6%，當網格切割越密時，所計算之撓度值愈大而收斂，切割 1 層之撓度值比理論解大 19.3%。隨著切割層數由 1 層增加為 2 層時其撓度值明顯與理論解相差較少，在網格切割層數為 3 層或是 4 層時所求得之撓度值又與理論解更接近，並且在切割 3 層與切割 4 層時兩者之撓度值幾乎相同，此時撓度值比理論解大 11%。在 C3D8R 元素中，當切割層數為 1 時所計算之撓度值比理論解大 7 倍，其數值與理論解相差非常的大，主要是因為 C3D8R 元素之節點數少且有降階積分之緣故。但是當切割層數為 2 層時，其撓度值約比理論解大 24%，就明顯與理論解差距較小，且隨著切割層數之增加而撓度值降低，在切割 3 層時所求得之撓度值比理論解大 13%。

在 C3D20 元素中，切割層數為 1 層時所得到之撓度值比理論解大 10%，隨著切割層數之增加而撓度值增加，在切割層數為 2 層時所求得之撓度值比理論解大 11%。在水平向網格切割為 1 時並不會隨著切割層數增加而撓度值增加。在 C3D20R 元素中，切割層數為 1 層時，撓度值比理論解大 10%，但是在切割 2 層以上時，其撓度值都是比理論解大 11%，且切割層數增加而撓度值增加而收斂。

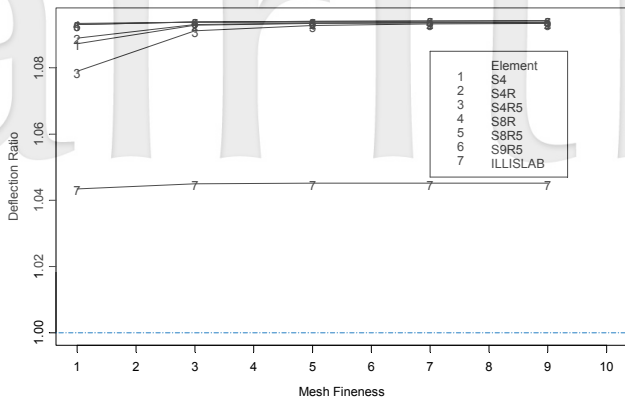


圖 1 邊緣撓度收斂特性 (三維版殼元素)

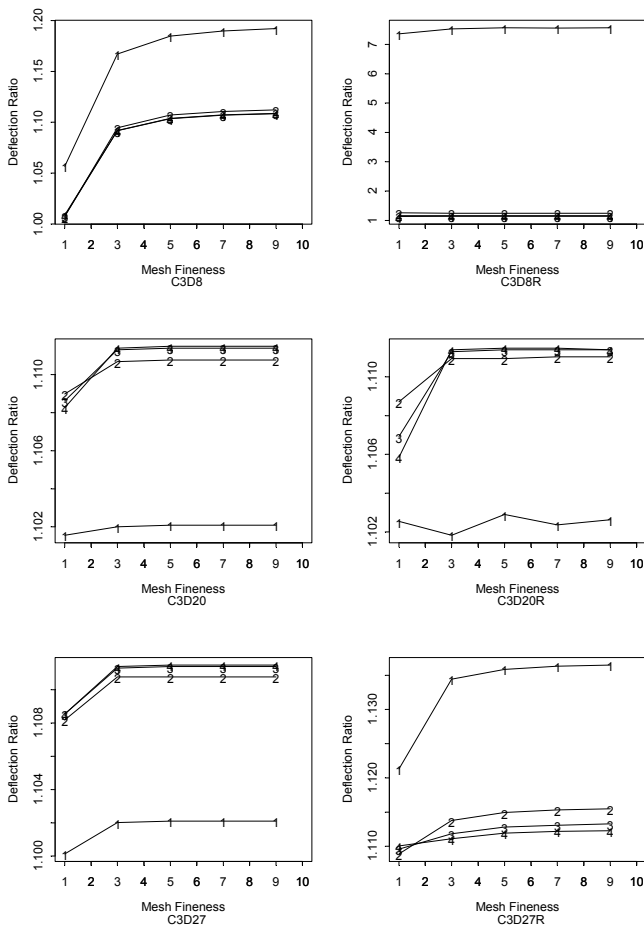


圖 2 邊緣撓度收斂特性 (三維固體元素)

C3D27 元素在切割層數為 1 層時撓度值同樣比理論解大 10%，但是切割層數為 2 以上時其撓度值比理論解大 11%，且隨著切割層數增加而撓度值增加到一收斂數值。C3D27R 元素在切割層數為 1 層時比理論解大 13%，而隨著切割層數增加而撓度值會降低，在切割層數為 4 層時所得之撓度值比理論解大 11%。

在邊緣荷重下，建議不要採用節點數較少之 8 點元素與有降階積分之元素，主要是因為在使用有降階積分之元素時，無法確保當網格切割數增加時，其撓度值是否會隨

著切割層數增加而撓度值增加。在選用 C3D20 元素時要注意到當水平方向網格切割較粗時應考慮到所計算之撓度收斂性。

### 3.3 應力收斂特性

同樣地，本文亦深入探討各種不同有限元素類型之應力收斂特性。圖 3 是在邊緣荷重下 ABAQUS 三維版殼元素、ILLI-SLAB 有限元素、與 Westergaard 理論解之應力比值。圖中 ILLI-SLAB 所計算出之應力比理論解之應力大 2%，所有 ABAQUS 程式中三維版殼元素所計算之應力值都比理論解之應力值小。4 點元素所求得應力收斂性是當網格切割較粗時所計算出之應力值較小，但是當網格切割較密時計算之應力值會增大而收斂。有降階積分之 4 點元素 S4R 與 S4R5 所計算出之應力較為接近。S4 元素之趨勢雖與 S4R、S4R5 相同，但 S4 元素與有降階積分之 4 點元素有 2% 之應力差距。在 8 點元素以及 9 點元素所計算出之應力都相同，比理論解之應力小 15%。在網格切割較密時，S4R 與 S4R5 等 4 點元素所求得應力比理論解小 14%。

素與 Westergaard 理論解之應力比值，各子圖中 1 到 4 分析代表厚度方向切割層數。在垂直切割層數為 1 層時所計算之應力都與切割層數為 2、3、4 層時所計算之應力相差很大。在 C3D8 元素中，隨著切割層數之增加而應力值增加，但在垂直切割層數為 4 層時仍然無法看到收斂性。在 C3D8R 元素中同樣是隨著切割層數之增加而應力值增加，在厚度方向網格切割為 2 層與 3 層時會有較接近之應力值，比理論解小 40%，但是在網格切割為 4 層時應力值又有一明顯之應力增加，如此亦無法看出明確之應力收斂特性。

在 C3D20 元素與 C3D27 元素中，其切割切數為 3 層或是 4 層時可以達到一樣之應力值，所求得之應力比理論解小 8.5%，並且水平方向網格切割為 3 時就可以和水平方向網格切割為 9 時得到非常接近之數值。在使用 C3D20R 與 C3D27R 元素中可以看出當切割層數增加時計算之應力會增加。切割 2 層比切割 3 層小 2% 之，切割 3 層時又比切割 4 層時小 1%。在有使用有降階積分之 C3D20R 與 C3D27R 元素雖然可以有一收斂性，但其收斂不像 C3D20 及 C3D27 元素在切割 3 層時，可以得到與切割 4 層時相同之應力值。

### 3.4 不同版厚與荷重大小下之收斂特性

為瞭解不同鋪面版厚與荷重大小對於撓度與應力收斂特性之影響，本研究因此選擇了以下 8 種不同鋪面版厚與荷重大小進行分析： $h/a = 2$ 、 $h/a = 4$  及  $a/l = 0.05$ 、 $0.1$ 、 $0.2$ 、 $0.3$  等組合，相關之輸入參數如表 3 所示。在分析時選用收斂性最好的 C3D27 元素、水平向網格切割密度選為 3、厚度方向切割層數選為 3 層，以達到較好之收斂性與精確度。

首先將厚度方向網格切割固定為 3 層，並比較水平方向網格切割密度為 1 到 5 之撓度收斂性。圖 5 是邊緣荷重下不同水平向切割之撓度比值。圖中可以看出在水平方向網格切割密度為 3 時，就可以得到一個很明顯之收斂，其撓度值與水平向網格切割密度為 5 時之撓度值相差在 0.2% 以下。

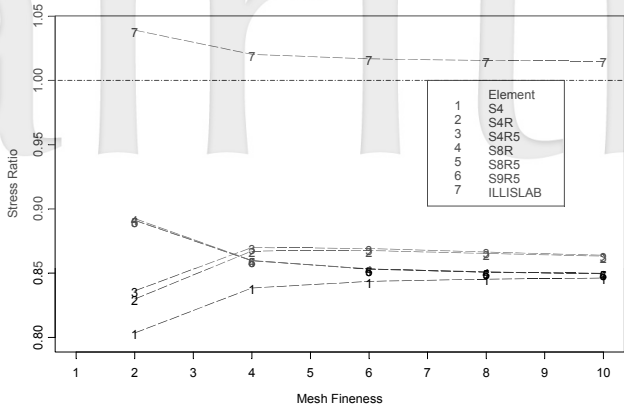


圖 3 邊緣應力收斂特性 (三維版殼元素)

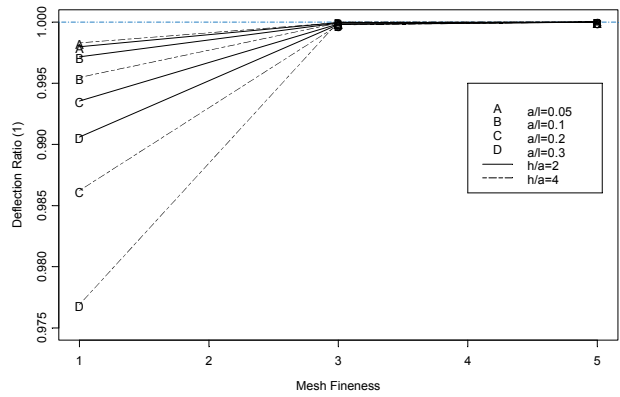


圖 5 水平向網格切割收斂性 (邊緣撓度)

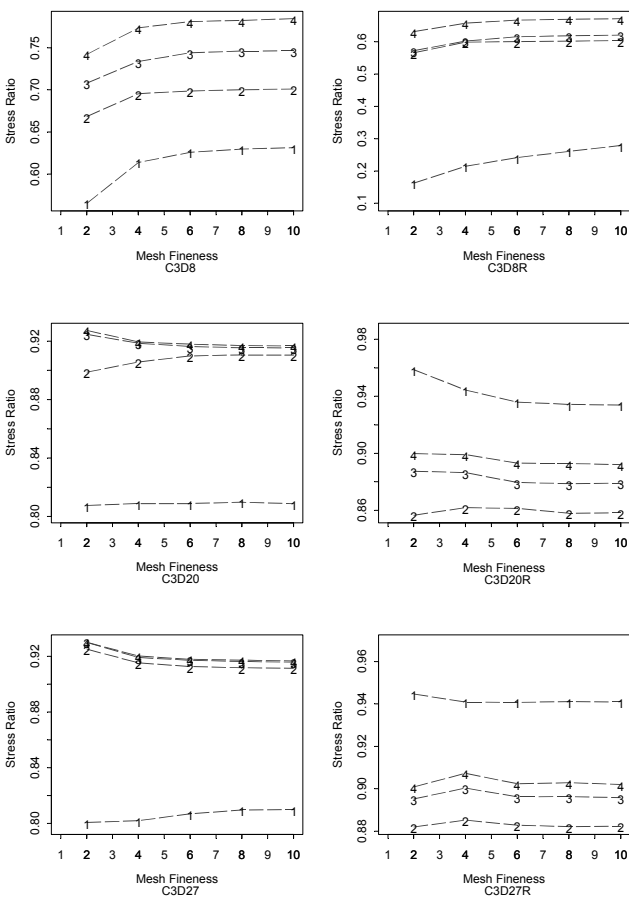


圖 4 邊緣應力收斂特性 (三維固體元素)

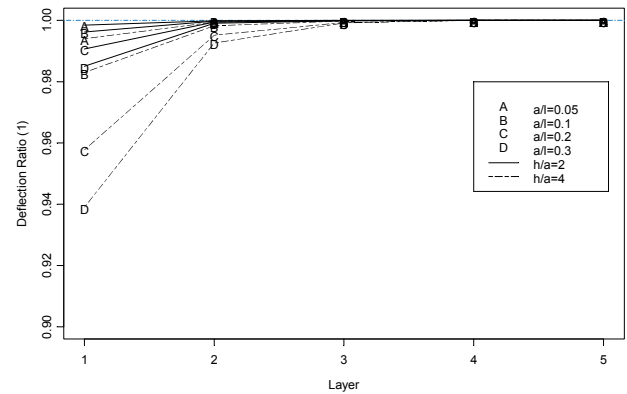


圖 6 厚度方向網格切割收斂性 (邊緣撓度)

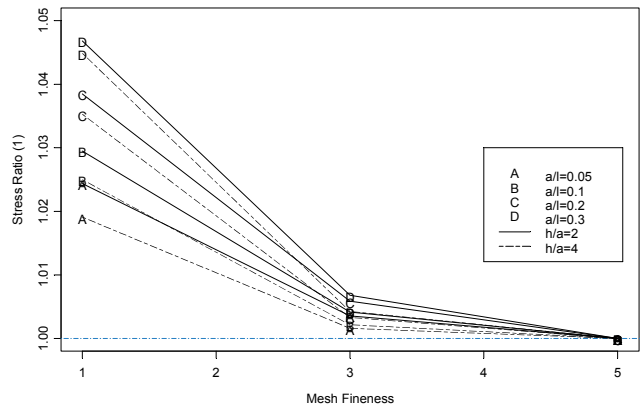


圖 7 水平向網格切割收斂性 (邊緣應力)

其次將水平向網格切割密度固定為 3，並比較厚度方向網格切割層數為 1 到 5 層時之撓度收斂性。圖 6 顯示邊緣荷重下不同切割層數之撓度比值。當網格切割為 2 層時，所求得之撓度值與切割層數為 5 層時之撓度值相差約僅 1.5%，在切割 3 層時就可以與切割 5 層時所得之撓度相差 0.5%，如此可以看出在邊緣荷重下切割 3 層時即可得到很好之撓度收斂性。

圖 7 是邊緣荷重下不同水平向切割密度之應力比值。圖中當水平向網格切割密度為 1 時所計算之應力最多比水平向網格切割為 5 時大 5%，但是在水平向網格切割密度為

表 3 不同版厚與荷重大小之輸入參數

$a/l$	$h/a$	$C$	$h$	$E$	$k$
		cm	cm	GPa	MN/m <sup>3</sup>
0.05	2	25.40	28.66	1367.67	40.5
0.1	2	38.10	42.99	171.01	54.0
0.2	2	12.70	14.33	7.12	108.0
0.3	2	19.05	21.50	2.64	135.0
0.05	4	12.70	28.66	227.99	108.0
0.1	4	25.40	57.32	42.75	162.0
0.2	4	15.24	34.39	0.40	40.5
0.3	4	17.78	40.12	0.08	35.1

註：  $L/l = 7, W/l = 7, p = 620 \text{ kPa} (90 \text{ psi})$

3 時只有比網格切割 5 時大 1%，由此可知在邊緣荷重下所計算之應力在水平向網格切割密度為 3 時就可以得到很好之收斂，且在所有的情況中，水平方向網格切割愈密所得之應力會愈小而收斂。

圖 8 顯示邊緣荷重下不同切割層數之收斂性分析與應力比值。圖中可以看出切割層數為 2 層時之應力值可以與切割 5 層時之應力值相當的接近，因此在求解邊緣荷重之應力時，切割層數以 2 層就可以得到很好之收斂值。

### 3.5 切割區域之決定

本研究為瞭解 II 區範圍之選定是否會影響到荷重區域之計算結果，因此將 II 區之長度分別定義為 1 倍到 8 倍荷重區域的長度 (C)，以求得在相同網格切割密度下切割區域造成計算結果之影響。切割方式是固定厚度切割層數 3 層且水平向網格切割為 3，並比較所求得之撓度值與應力值。

圖 9 之橫座標是 II 區長度之選定，縱座標是不同三維版殼元素所計算之邊緣撓度值除以該元素 II 區長度選定為 8\*C 之撓度值。圖中可以看出 4 點元素對於 II 區之選定影響較大，而且 ILLI-SLAB 同樣也受到 II 區選定之影響，而 8 點元素及 9 點元素則在 2\*C 之後，所計算之撓度值都相同，在不同 II 區之選定差異上，撓度值相差在 0.3% 之內。在固體元素中，20 點元素及 27 點元素在不同 II 區長度選定所計算出撓度值都完全相同，因此不另作比較。

圖 10 是不同 II 區長度選定之應力比值。圖中顯示，4 點元素及 ILLI-SLAB 中所計算應力受到 II 區域選定之影響較大。在平面元素中選定 3\*C 之長度時，應力與 8\*C 長度時之應力相差在 0.2% 之下。在固體元素中，20 點元素及 27 點元素在 II 區域長度選定為 3\*C 長度以後，可得到選定為 8\*C 長度之相同結果。

綜合以上之結果在選定 II 區之長度時，固體元素在 1\*C 長度時幾乎達到 8\*C 長度之結果。考量應力收斂之影響，因此建議以選定 3\*C 長度作為 II 區之保守切割長度。

## 四、額外參數之辨識與驗證

在過去二維有限元素程式分析的文獻中 [1,11]，曾經辨識並驗證過混凝土鋪面板在固定柏松比下的力學行為會遵循以下的關係式。

$$\frac{\sigma h^2}{P}, \frac{\delta k \ell^2}{P} = f\left(\frac{a}{\ell}, \frac{L}{\ell}, \frac{W}{\ell}\right) \quad (3)$$

然而，二維有限元素程式 (ILLI-SLAB) 與三維有限元素程式 (ABAQUS) 的基本假設不同，前者假設鋪面板厚度為一不可壓縮之薄版，後者則假設在厚度方向是可以壓縮的。在過去的分析中可以看出當厚度增加時，所求得之應力值與理論解有較大的差異。在執行三維有限元素程式分析時，曾因僅只採用上述三個無因次參數，而遭遇到極大的困難。根據因次分析的原理，本研究發現除了正規化版長 ( $L/\ell$ )、正規化版寬 ( $W/\ell$ )、及正規化荷重半徑 ( $a/\ell$ ) 外，另外應還有一個非常重要的無因次參數。研究中採用

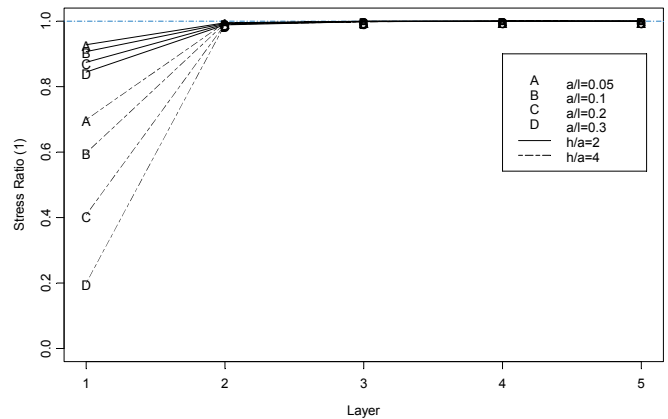


圖 8 厚度方向網格切割收斂性 (邊緣應力)

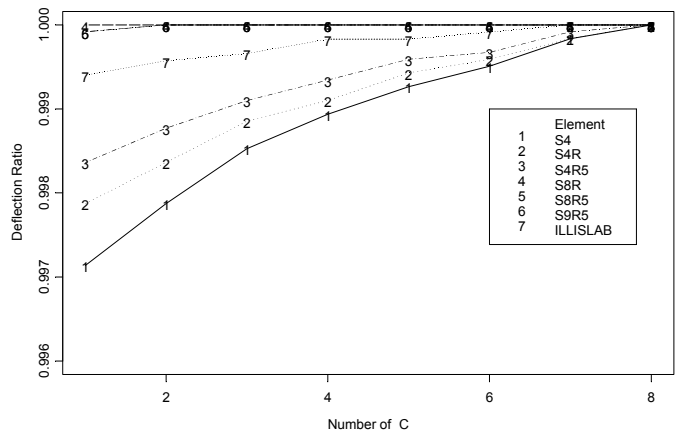


圖 9 不同 II 區長度選定之撓度收斂特性比較

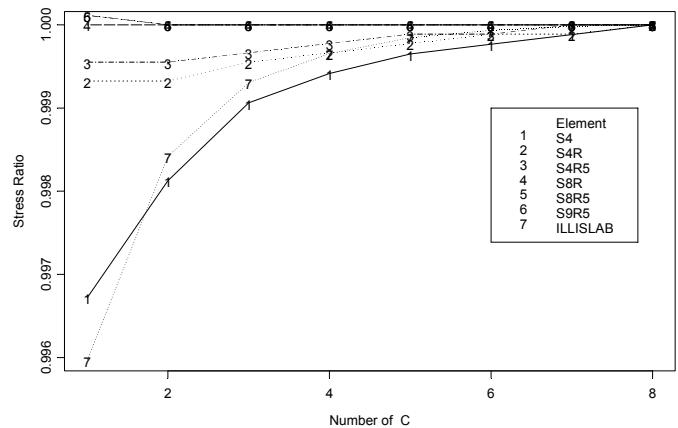


圖 10 不同 II 區長度選定之應力收斂特性比較

C3D27 三維固體元素、水平向網格切割密度為 3、及厚度方向網格切割密度為 3，並選定三倍荷重區域長度作為 II 區之保守切割長度，以尋找額外的控制參數。

如表 4 所示，若在表中固定上述三個無因次控制參數，再加上固定版厚與荷重半徑比值 ( $h/a$ ) 時，本研究發現不管以不同版的厚度 ( $h$ )、有限版長 ( $L$ )、有限版寬 ( $W$ )、混凝土彈性模數 ( $E$ )、路基反力模數 ( $k$ )、荷重半徑 ( $a$ )、與荷重大小 ( $P$ ) 來進行分析，所求得之正規化應力值 ( $\sigma h^2/P$ )

表 4 額外無因次參數 (h/a) 的辨識與驗證 (邊緣荷重)

h/a	a/l <sub>f</sub>	L/l <sub>f</sub>	W/l <sub>f</sub>	C cm	a cm	h cm	l <sub>f</sub> cm	L m	W m	E GPa	k MN/m <sup>3</sup>	p kPa	P kN	σ kPa	δ mm	σh <sup>2</sup> /P	δ <sup>2</sup> k <sub>f</sub> <sup>2</sup> /P
1.0	0.3	7	7	12.7	7.2	7.2	23.9	1.67	1.67	13.78	132.2	482.3	7.8	2800.1	0.37252	1.84808	0.36277
1.0	0.3	7	7	19.1	10.7	10.7	35.8	2.51	2.51	10.34	66.1	620.1	22.5	3600.7	0.95799	1.84795	0.36283
1.0	0.3	7	7	19.1	10.7	10.7	35.8	2.51	2.51	13.78	88.1	551.2	20.0	3200.4	0.63863	1.84782	0.36281
1.0	0.3	7	7	25.4	14.3	14.3	47.8	3.34	3.34	24.12	115.7	689.0	44.5	3999.6	0.60818	1.84786	0.36276
1.0	0.3	7	7	25.4	14.3	14.3	47.8	3.34	3.34	31.01	148.7	1033.5	66.8	5999.8	0.70952	1.84796	0.36275
1.0	0.3	7	7	31.8	17.9	17.9	59.7	4.18	4.18	20.67	79.3	895.7	90.4	5200.6	1.15308	1.84796	0.36280
1.0	0.3	7	7	31.8	17.9	17.9	59.7	4.18	4.18	27.56	105.7	413.4	41.7	2400.5	0.39914	1.84813	0.36279
1.0	0.3	7	7	38.1	21.5	21.5	71.7	5.02	5.02	13.78	44.1	826.8	120.2	4799.6	1.91572	1.84786	0.36275
1.0	0.3	7	7	38.1	21.5	21.5	71.7	5.02	5.02	41.34	132.2	620.1	90.1	3600.0	0.47892	1.84803	0.36274
1.0	0.3	7	7	38.1	21.5	21.5	71.7	5.02	5.02	27.56	88.1	689.0	100.1	4000.3	0.79822	1.84818	0.36275
1.5	0.2	7	7	12.7	7.2	10.7	35.8	2.51	2.51	13.78	88.1	482.3	7.8	1578.5	0.27178	2.34354	0.39703
1.5	0.2	7	7	19.1	10.7	16.1	53.7	3.76	3.76	10.34	44.1	620.1	22.5	2029.1	0.69878	2.34346	0.39696
1.5	0.2	7	7	19.1	10.7	16.1	53.7	3.76	3.76	13.78	58.7	551.2	20.0	1803.8	0.46584	2.34366	0.39695
1.5	0.2	7	7	25.4	14.3	21.5	71.7	5.02	5.02	24.12	77.1	689.0	44.5	2254.4	0.44366	2.34388	0.39695
1.5	0.2	7	7	25.4	14.3	21.5	71.7	5.02	5.02	31.01	99.1	1033.5	66.8	3381.6	0.51758	2.34348	0.39692
1.5	0.2	7	7	31.8	17.9	26.9	89.6	6.27	6.27	20.67	52.9	895.7	90.4	2931.0	0.84107	2.34382	0.39695
1.5	0.2	7	7	31.8	17.9	26.9	89.6	6.27	6.27	27.56	70.5	413.4	41.7	1352.5	0.29113	2.34336	0.39694
1.5	0.2	7	7	38.1	21.5	32.2	107.5	7.52	7.52	13.78	29.4	826.8	120.2	2705.7	1.39756	2.34366	0.39696
1.5	0.2	7	7	38.1	21.5	32.2	107.5	7.52	7.52	41.34	88.1	620.1	90.1	2029.1	0.34938	2.34346	0.39695
1.5	0.2	7	7	38.1	21.5	32.2	107.5	7.52	7.52	27.56	58.7	689.0	100.1	2254.4	0.58232	2.34330	0.39697
3.0	0.1	7	7	12.7	7.2	21.5	71.7	5.02	5.02	13.78	44.1	482.3	7.8	506.7	0.15052	3.00978	0.43975
3.0	0.1	7	7	19.1	10.7	32.2	107.5	7.52	7.52	10.34	22.0	620.1	22.5	651.5	0.38707	3.00981	0.43977
3.0	0.1	7	7	19.1	10.7	32.2	107.5	7.52	7.52	13.78	29.4	551.2	20.0	579.1	0.25804	3.00969	0.43976
3.0	0.1	7	7	25.4	14.3	43.0	143.3	10.03	10.03	24.12	38.6	689.0	44.5	724.1	0.24575	3.01100	0.43977
3.0	0.1	7	7	25.4	14.3	43.0	143.3	10.03	10.03	31.01	49.6	1033.5	66.8	1085.9	0.28672	3.01005	0.43977
3.0	0.1	7	7	31.8	17.9	53.7	179.1	12.54	12.54	20.67	26.4	895.7	90.4	941.2	0.46591	3.01020	0.43978
3.0	0.1	7	7	31.8	17.9	53.7	179.1	12.54	12.54	27.56	35.2	413.4	41.7	434.3	0.16127	3.00991	0.43977
3.0	0.1	7	7	38.1	21.5	64.5	215.0	15.05	15.05	13.78	14.7	826.8	120.2	868.8	0.77409	3.01053	0.43975
3.0	0.1	7	7	38.1	21.5	64.5	215.0	15.05	15.05	41.34	44.1	620.1	90.1	651.4	0.19353	3.00973	0.43975
3.0	0.1	7	7	38.1	21.5	64.5	215.0	15.05	15.05	27.56	29.4	689.0	100.1	724.1	0.32255	3.01100	0.43977
6.0	0.2	7	7	12.7	7.2	43.0	35.8	2.51	2.51	13.78	5639.9	482.3	7.8	60.2	0.01042	1.42950	0.97465
6.0	0.2	7	7	19.1	10.7	64.5	53.7	3.76	3.76	10.34	2820.0	620.1	22.5	77.4	0.02680	1.42990	0.97454
6.0	0.2	7	7	19.1	10.7	64.5	53.7	3.76	3.76	13.78	3760.0	551.2	20.0	68.8	0.01787	1.42944	0.97456
6.0	0.2	7	7	25.4	14.3	86.0	71.7	5.02	5.02	24.12	4934.9	689.0	44.5	86.0	0.01702	1.43007	0.97459
6.0	0.2	7	7	25.4	14.3	86.0	71.7	5.02	5.02	31.01	6344.9	1033.5	66.8	128.9	0.01986	1.42931	0.97456
6.0	0.2	7	7	31.8	17.9	107.5	89.6	6.27	6.27	20.67	3384.0	895.7	90.4	111.8	0.03227	1.42974	0.97466
6.0	0.2	7	7	31.8	17.9	107.5	89.6	6.27	6.27	27.56	4512.0	413.4	41.7	51.6	0.01117	1.42951	0.97461
6.0	0.2	7	7	38.1	21.5	129.0	107.5	7.52	7.52	13.78	1880.0	826.8	120.2	103.1	0.05361	1.42953	0.97459
6.0	0.2	7	7	38.1	21.5	129.0	107.5	7.52	7.52	41.34	5639.9	620.1	90.1	77.4	0.01340	1.42984	0.97458
6.0	0.2	7	7	38.1	21.5	129.0	107.5	7.52	7.52	27.56	3760.0	689.0	100.1	86.0	0.02234	1.43010	0.97460
3.0	0.1	2	2	12.7	7.2	21.5	71.7	1.43	1.43	13.78	44.1	482.3	7.8	403.8	0.34912	2.39833	1.01996
3.0	0.1	2	2	19.1	10.7	32.2	107.5	2.15	2.15	10.34	22.0	620.1	22.5	519.2	0.89771	2.39836	1.01994
3.0	0.1	2	2	19.1	10.7	32.2	107.5	2.15	2.15	13.78	29.4	551.2	20.0	461.5	0.59845	2.39844	1.01990
3.0	0.1	2	2	25.4	14.3	43.0	143.3	2.87	2.87	24.12	38.6	689.0	44.5	576.8	0.56998	2.39849	1.01996
3.0	0.1	2	2	25.4	14.3	43.0	143.3	2.87	2.87	31.01	49.6	1033.5	66.8	865.4	0.66497	2.39887	1.01996
3.0	0.1	2	2	31.8	17.9	53.7	179.1	3.58	3.58	20.67	26.4	895.7	90.4	749.6	1.08059	2.39758	1.01998
3.0	0.1	2	2	31.8	17.9	53.7	179.1	3.58	3.58	27.56	35.2	413.4	41.7	346.1	0.37404	2.39828	1.01995
3.0	0.1	2	2	38.1	21.5	64.5	215.0	4.30	4.30	13.78	14.7	826.8	120.2	692.4	1.79540	2.39935	1.01994
3.0	0.1	2	2	38.1	21.5	64.5	215.0	4.30	4.30	41.34	44.1	620.1	90.1	519.1	0.44884	2.39824	1.01992
3.0	0.1	2	2	38.1	21.5	64.5	215.0	4.30	4.30	27.56	29.4	689.0	100.1	576.8	0.74811	2.39849	1.01996
6.0	0.2	3	3	12.7	7.2	43.0	35.8	1.07	1.07	13.78	5639.9	482.3	7.8	58.9	0.01192	1.39905	1.11480
6.0	0.2	3	3	19.1	10.7	64.5	53.7	1.61	1.61	10.34	2820.0	620.1	22.5	75.7	0.03066	1.39934	1.11472
6.0	0.2	3	3	19.1	10.7	64.5	53.7	1.61	1.61	13.78	3760.0	551.2	20.0	67.3	0.02044	1.39936	1.11469
6.0	0.2	3	3	25.4	14.3	86.0	71.7	2.15	2.15	24.12	4934.9	689.0	44.5	84.1	0.01947	1.39913	1.11472
6.0	0.2	3	3	25.4	14.3	86.0	71.7	2.15	2.15	31.01	6344.9	1033.5	66.8	126.2	0.02271	1.39875	1.11470
6.0	0.2	3	3	31.8	17.9	107.5	89.6	2.69	2.69	20.67	3384.0	895.7	90.4	109.3	0.03691	1.39888	1.11475
6.0	0.2	3	3	31.8	17.9	107.5	89.6	2.69	2.69	27.56	4512.0	413.4	41.7	50.5	0.01278	1.39915	1.11475
6.0	0.2	3	3	38.1	21.5	129.0	107.5	3.22	3.22	13.78	1880.0	826.8	120.2	100.9	0.06132	1.39897	1.11472
6.0	0.2	3	3	38.1	21.5	129.0	107.5	3.22	3.22	41.34	5639.9	620.1	90.1	75.7	0.01533	1.39929	1.11472
6.0	0.2	3	3	38.1	21.5	129.0	107.5	3.22	3.22	27.56	3760.0	689.0	100.1	84.1	0.02555	1.39916	1.11470

註：1 in. = 2.54 cm, 1 psi = 6.89 kPa, 1 pci = 0.27 MN/m<sup>3</sup>, and 1 kip = 4.45 kN

與正規化撓度值 (δkl<sup>2</sup>/P) 均是一個常數。因此，驗證出影響鋪面板之力學反應除了正規化版長 (L/l)、正規化版寬 (W/l) 及正規化荷重半徑 (a/l) 外，還有版厚與荷重半徑之比值 (h/a)，其關係式如下。

$$\frac{\sigma h^2}{P}, \frac{\delta k l^2}{P} = f\left(\frac{a}{l}, \frac{L}{l}, \frac{W}{l}, \frac{h}{a}\right) \quad (4)$$

此外，研究亦發現上述關係亦適用於各種三維版殼元素之有限元素分析，詳細內容請參閱文獻 [7]。

## 五、批次化分析程序之建立

本研究為了求得 ABAQUS 程式與 ILLI-SLAB 程式兩者之間計算結果之差異，因此以 Visual Basic 程式構建出一個批次化分析的程式，同時建構該二程式在相同網格切割下之輸入檔，自動找尋所需之特定位置之應力值與撓度值，並將其計算結果與 Westergaard 理論解共同比較。在未來亦可以改善使用者界面將批次化分析程式所構建之輸入檔、執行程式、及最後之數值擷取整合。本文中舉凡前述所有有關三維版殼元素、三維固體元素的選擇、水平網格切割、厚度方向網格切割的收斂性分析、與二區長度的選擇等，都是以此批次化程式分析之。在程式中可以同時產生多筆之輸入檔進行批次分析，在使用有限元素法 ABAQUS 程式進行分析中，預設程式的執行是在背景執行，一次只能分析單一組數據，如果同時分析多筆資料時，ABAQUS 程式會將所有分析之資料同時分析，如此會造成記憶體負荷過大或是在分析較多自由度時無法進行分析，因此在執行批次運算時要改變 ABAQUS 程式之環境變數設定檔 “abaqus\_v6.env” 中之部分內容，如將 “run\_mode = BACKGROUND” 之背景執行程式改為 “run\_mode = INTERACTIVE”。除此之外，要執行批次分析時，要以絕對位置指定 ABAQUS 之執行檔才可進行分析，其執行檔之名稱為 “launcher.exe”。以本研究所使用之 ABAQUS 程式之版本為 6.2-1 為例，進行批次分析之方式如下：

C:\ABAQUS\6.2-1\exec\launcher.exe job=Input File

在 ABAQUS 程式進行分析時，如果自由度很大而實記憶體體空間不足時，在 Windows 程式中必需增加虛擬記憶體之容量，Windows 擬記憶體之容量最大值為四十億位元 (4 Gigabytes)。

## 六、資料分析與預測模式之建立

為分別建立無因次的邊緣應力與撓度之資料，本研究因此分析了一系列的單輪邊緣荷重、單一版塊在緊密液體基礎下的三維有限元素模型，所採用的無因次參數範圍為：正規化版長 ( $L/\ell$ ) = 3 ~ 8 (step by 1)、正規化荷重半徑 ( $a/\ell$ ) = 0.05, 0.1 ~ 0.5 (step by 0.1)、及版厚與荷重半徑比值 ( $h/a$ ) = 0.5 ~ 6 (step by 0.5)。由於有限版寬對於邊緣荷重的影響較小，因此將正規化版寬 ( $W/\ell$ ) 選定為與正規化版長 ( $L/\ell$ ) 相同。這些範圍包含了各種高速公路和機場剛性鋪面絕大多數可能的範圍。分析時遵循前述之建議，選定 C3D27 三維固體元素、水平向網格切割切割密度為 3、及厚度方向網格切割密度為 3、並選定三倍荷重區域長度作為 II 區之保守切割長度。

其中，撓度比值與應力比值定義為三維有限元素之結果與 Westergaard 理論解之比值。由於所產生的撓度比值均大於 1.0，它的倒數或是修正因子 ( $R$ ) 的範圍將會是介於 0 與 1 之間。值得一提的是，當版的厚度相對較厚 (較大的  $h/a$ ) 或荷重半徑相對較大 (較大的  $a/\ell$ ) 時，所得到的撓度比值將較高。同樣地，所產生的應力比值範圍介於 0.25 與 1.03 之間。有鑑於目前現有的厚度設計法之臨界應力計算

與都是以二維有限元素程式為主，本研究因此將所構建之資料以投影迴歸分析法 [12,13]，建立出以下的邊緣應力修正因子 ( $R_{3D}$ )。

$$R_{3D} = \frac{\sigma_{3DFEM}}{\sigma_{we}} = f\left(\frac{a}{\ell}, \frac{L}{\ell}, \frac{h}{a}\right) \quad (5)$$

$$R_{3D} = 0.69149 + 0.259 \Phi_1 + 0.03318 \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \begin{cases} 1.578 + 6.013(A1) + 2.673(A1)^2 + 0.208(A1)^3 & \text{if } (A1) \leq -0.25 \\ 1.076 + 1.812(A1) - 5.796(A1)^2 + 4.942(A1)^3 & \text{if } (A1) > -0.25 \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} -2.649 + 78.163(A2) + 381.681(A2)^2 - 15547.789(A2)^3 & \text{if } (A2) \leq 0.05 \\ -0.927 + 39.165(A2) - 321.743(A2)^2 - 877.365(A2)^3 & \text{if } (A2) > 0.05 \end{cases}$$

$$A1 = 0.36539x1 - 0.01440x2 - 0.04566x3 + 0.85799x4 - 0.35545x5 + 0.04123x6$$

$$A2 = 0.23203x1 + 0.01107x2 - 0.00427x3 - 0.97246x4 + 0.01825x5 - 0.00230x6$$

$$X = [x1, x2, x3, x4, x5, x6] = \left[ \frac{a}{\ell}, \frac{L}{\ell}, \frac{h}{a}, \frac{a}{\ell} \times \frac{L}{\ell}, \frac{a}{\ell} \times \frac{h}{a}, \frac{L}{\ell} \times \frac{h}{a} \right]$$

統計： $N = 432$ ,  $R^2 = 0.9988$ ,  $SEE = 0.008745$

限制：

$$0.05 \leq a/\ell \leq 0.5, 0.5 \leq h/a \leq 6.0, 3 \leq L/\ell \leq 8, W/\ell = L/\ell$$

其中， $\sigma_{we}$  為 Westergaard 之理論解邊緣應力；三維有限元素的修正因子 ( $R_{3D}$ )； $N$  為資料的個數； $R^2$  是判定係數；SEE 是標準誤差。

然而，接縫式混凝土鋪面版之力學行為極為複雜，不同輪軸荷重、有限版長與版寬、混凝土路肩、外車道加寬情況效應、多層版效應、載重加上溫差效應等因素均有可能影響版之臨界應力。由於應力修正因子為一比例關係，因此建議可將三維有限元素分析修正因子與現有二維有限元素分析的成果 [1] 相結合，以估算版的臨界應力，建議的臨界應力預估模式如下。

$$\sigma_e = (\sigma_{we} \times R_{3D} \times R_G \times R_S \times R_O \times R_M + R_T \times \sigma_c) \quad (6)$$

其中， $\sigma_c$  為 Westergaard / Bradbury 有限尺寸版之邊緣溫差應力；現有二維有限元素分析的修正因子因子包括：不同輪軸轉換因子 ( $R_G$ )、混凝土路肩修正因子 ( $R_S$ )、外車道加寬情況效應因子 ( $R_O$ )、多層版效應修正因子 ( $R_M$ )、與載重加上溫差效應之影響因子 ( $R_T$ ) 等。

## 七、結論與建議

本文主要目的在探討剛性鋪面版受到邊緣荷重時之三維有限元素分析特性。本研究利用 Visual Basic 程式構建批次化分析之程序，來執行有限元素批次分析，以探討網格切割與元素選擇對計算結果之影響。

在撓度收斂性分析中，得知三維版殼元素與固體元素會隨著水平向網格切割愈密，所求得之撓度值愈大而收斂。撓度值是以下列順序遞減：ABAQUS 三維固體元素、三維版殼元素、ILLI-SLAB 有限元素、與 Westergaard 理論撓度解。C3D20、C3D20R、C3D27 等三維固體元素會隨著厚



度方向網格切割層數增加，所求得之撓度值愈大而收斂。而 C3D8、C3D8R、C3D27R 元素會隨著厚度方向切割層數增加撓度值降低而收斂。

在應力收斂性比較時，得知 S4、S4R、S4R5 等三維版殼元素所求的應力較為接近，且隨著水平向網格切割密度增加，應力值增加而收斂。S8R、S8R5、與 S9R59 等元素所計算之應力隨著網格切割愈密，所求得應力值愈低而收斂，且 S8R5 與 S9R5 所計算之結果都相同。C3D20、C3D20R、與 C3D27 等三維固體元素會隨著垂直向切割層數之增加，所求得之應力值增加而收斂。

本研究並同時分析不同鋪面版厚與荷重大小對網格切割收斂性之影響。研究中發現，在進行三維有限元素分析時，以厚度方向切割層數影響計算結果最大，其次是水平方向網格切割之密度，而 II 區切割長度之選擇影響最小。水平向網格切割密度為 3、厚度方向網格切割密度為 3 層、並選定三倍荷重區域長度作為 II 區之保守切割長度時，可以得到很好之收斂性。在元素選擇上，建議以 C3D20 元素與 C3D27 元素進行分析，這兩種元素分析時可以得到相同結果。不建議以 C3D8、C3D8R 等 8 點固體元素來分析鋪面版之力學行為。如果選用有降階積分之元素 C3D20R 或是 C3D27R 元素，在相同網格切割下兩者至少會有 2% 之應力差距，無法像 C3D20 元素與 C3D27 元素達到相同應力計算結果。

本研究並利用因次分析方法，發現並驗證出會影響鋪面版 C3D27 三維固體元素力學行為的控制因素，除了以往所知的正規化荷重半徑 ( $a/l$ )、正規化版長 ( $L/l$ ) 正規化版寬 ( $W/l$ ) 外，還有版厚 ( $h$ ) 與荷重半徑 ( $a$ ) 之比值 ( $h/a$ ) 也會嚴重影響鋪面版的力學行為。此外，研究中亦發現三維版殼元素同樣亦受到版厚與荷重半徑比值 ( $h/a$ ) 之影響 [7]。

根據上述之網格切割、元素建議、與無因次參數，本研究因此分別構建邊緣應力與撓度資料。並建立三維有限元素應力修正因子之預測模式，希望未來可與過去二維有限元素分析之成果整合，建立以力學為基礎之三維有限元素設計及評估 (回算) 方法。

## 參考文獻

- Lee, Y.H., "TKUPAV: Stress analysis and thickness design program for rigid pavements," *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 4, pp. 338-346 (1999).
- Kuo, C.M., "Three-dimensional finite element model for analysis of concrete pavement support," Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, Illinois (1994).
- Brill, D.R., "Development of advanced computational models for airport pavement design," DOT/FAA/AR-97/47 (1998).
- Hammons, M.I., "Advanced pavement design: finite element modeling for rigid pavement joints," Report II: Model Development, DOT/FAA/AR-97-7 (1998).
- Kim, J. and Hjelmstad, K., "Three-dimensional finite element analysis of multi-layered systems: comprehensive nonlinear analysis of rigid airport pavement systems," Federal Aviation Administration (2000).
- Thompson, M.R. and Navneet, G., "Wheel load interaction: Critical airport pavement responses," Final Report, Federal Aviation Administration (1999).
- 吳忻達, 「接縫式混凝土鋪面參數分析與驗證」, 淡江大學土木工程學系碩士論文, 淡水, 台北 (2003)。
- Ioannides, A.M., Thompson, M.R., and Barenberg, E.J., "Westergaard solution reconsidered," *Transportation Research Record 1043*, pp. 12-23 (1985).
- Korovesis, G.T., "Analysis of slab-on-grade pavement systems subjected to wheel and temperature loadings," Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, Illinois (1990).
- Hibbitt, Karlsson, and Sorensen, *ABAQUS/Standard User's Manual*, Vol. I and II (2000).
- Lee, Y.H., "Development of pavement prediction models," Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, Illinois (1993).
- Lee, Y.H. and Darter, M.I., "New predictive modeling techniques for pavements," *Transportation Research Record 1449*, pp. 234-245 (1994).
- Friedman, J.H. and Stuetzle, W., "Projection pursuit regression," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 76, pp. 817-823 (1981).

---

97年 6月 30日	收稿
99年 1月 15日	修改
99年 2月 20日	接受