二維端點支撐之非線性振動系統研究

王怡仁[1*]，林漢翔[1]
淡江大學航太系[1]
[*] E-mail: 090730@mail.tku.edu.tw

摘要

本文研究一平面剛體振動系統，主體兩端之支撐假設為三次方非線性彈簧與二次方非線性阻尼。假設此系統含有 3 to 1 內共振之特性並受一空氣動力影響，藉由多尺度法求其穩態之頻率響應，並利用振顫分析的觀念繪製 Eigen Plot，找出系統的振顫速度，與相位圖做比對，再藉由特徵值分析及 Floquet Theorem 來判斷系統之穩定性。吾人藉由內共振等值線圖與振顫速度等值線圖相互對照，嘗試找出減振器最佳之擺放位置，以達到不變動主體架構原則之下，僅改變減振器位置之最佳減振效果。本文發現，在系統設計時，除了振顫速度外，內共振對於系統之影響性也是不容小覷，因此，必須將兩者皆列入設計上考慮的因素，缺一不可，如此一來將能使系統擁有更高的安全性。

關鍵字：振動、非線性、減振器、內共振、振顫速度

A Two Dimensional Vibration Analysis with Nonlinear End Struts

Yi-Ren Wang [1], Han-Shiang Lin [1]
Tamkang University [1]

Abstract

This research used a planar rigid body as the main body, both ends of this main body were supported by cubic spring and quadratic damper as the supports. A rigid body vibration absorber was suspended underneath the main body, and was mounted with linear spring and damper at both ends. This study also took aerodynamic influence into consideration to form an aeroelastic system. The 3:1 internal resonance of the main body's plunge and pitch modes was included in this research. The Method of Multiple Scales was employed to analyze the fixed points solutions of this system. The Floquet Theorem was employed to get the Basin of Attraction of this system and the system stability information was concluded. In the case studied, we found that the internal resonance may play an important role in the aeroelastic system. It could result large vibration amplitude before the flutter speed. We also found that in the internal resonance-flutter coupled system; just change the absorber position can also significantly reduce vibration amplitude and increase flutter speed.

Key word: Vibration, Nonlinear, Absorber, Internal Resonance, Flutter Speed

一、 前言

舉凡機械元件總脫離不了振動的問題，而減振的方法中，調質式阻尼減振器(TMD)系統屬減振方法中最廣為人用者，在Zuo and Nayfeh [1]的研究中發現僅需利用一個雙自由度之減振器便可有效抑制連續體系統的前兩個模態之振動，且效果優於一個單自由度減振器，甚至是兩個單自由度減振器，此觀念足以作為吾人研究模型的參考。且近年來科技進步神速，許多例子一再顯示出線性假設的不足。如著名的Tacoma Narrow Bridge便是因忽略了某些非線性假設而產生共振，造成重大損失。

關於非線性振動系統的問題，也早有多人研究，如Nayfeh [2] 一書中便針對非線性系統的解析解提出多種解法，其中多尺度法(Method of Multiple Scales)將時間分成緩慢及劇烈兩個度量，以此小擾動法描述非線性運動狀態，並可藉此得其近似之解析解，這對於分析動態系統時間域的近似解析解，不失為一種簡易的方法。而Sarkar and Bijl [3]中，討論氣體彈性力學中特徵值的分歧現象，並繪製相位圖與之比對，由此可見，將空氣動力列入考量已為近年來振動研究之趨勢。然而非線性系統中還存在著許多特有的現象，其中Nayfeh and Mook[4]一書中便針對其特有的內共振現象做一解釋，其乃是當系統中各自由度自然振動頻率彼此呈現倍數關係時，即使激擾的是高自由度(Higher Mode)，卻會使低自由度(Lower Mode)發散之現象。Natsiavas and Tratsks[5]便是研究1:1內共振發生時對系統造成之影響，並利用相位圖來驗證其正確性。其結果顯示，當兩自由度之自然振動頻率越接近時，所產生的內共振對系統之影響便越大。另外，減振器擺放位置也在系統中佔有重要地位，Chakradhar *et al.* [6]便利用數值法研究一機翼下掛載對機翼振顫

之影響，說明了若將掛載質心置於機翼彈性軸前，可有效提升振顫速度。但若移至彈性軸後方則會使得振顫速度降低，甚至比沒掛載還差。由此可知即使在不改變材料係數的情況下，僅改變位置便可有效達到減振效果。此外Chang-Jian and Chan[7]研究一傳動軸兩端以阻尼及非線性彈簧支撐的振動響應，找出其不同狀況下之分歧圖並利用相位圖及Poincare Map穩定性分析驗證其正確性，此一文章提供觀察非線性振動及穩定性判斷之方法。Wang *et al.*[8]則針對一個多自由度的模型，假設幾何非線性的情況下，利用改變減振器之位置以得到最佳減振效果，並用多尺度法解出其近似解析解。

本研究中，吾人將以一個二維自由度之剛體做為減振器考量之重點，並考慮非線性及空氣動力之因素，且在不改變減振器設計前提下，尋找擁有最佳減振效果之位置或其區域。相信本研究能夠有效節省減振器更換材料及重新設計的成本與時間，並符合實際工程應用之理念。

二、 系統理論模式之建立

2-1 非線性運動方程式之推導

本研究考慮一平面剛體之振動系統，包含主體及減振器之垂直位移與俯仰，共四個自由度，其中主體兩端分別以三次方非線性彈簧彈簧與非線性阻尼組成之支撐使之固定，使系統足以模擬較大形變之運動。另外減振器考慮二維自由度運動之剛體，兩端則以線性彈簧與阻尼組成之聯結掛載於主體之下，並於主體 *1/4* 之位置加入空氣動力之考量，使之成為一氣體彈性系統。並假設此系統含有 3 to 1 內共振之特性，亦即此系統之第二自由度自然振動頻率為第一自由度自然振動頻率之三倍($3\omega_1=\omega_2$)，此外，吾人亦假設系統受到一簡諧外力 $f(t)$ 及減振器受到的力 $f_2(t)$，而相對的，該兩項外力對主體造成之力矩為 $g(t)$ 及對減振器產生之力矩為 $g_2(t)$，如圖 1 所示。則吾人可藉由牛頓法求出系統四自由度之運動方程如下，

由 $\sum F=Ma$ 可得主體垂直位移運動方程，

$$F_1-K_1(X_1+\beta_1X_1^3)-C_1\dot{X}_1-\hat{C}_1\left|\dot{X}_1\right|\dot{X}_1+k_2(X_{21}-X_A)+c_2(\dot{X}_{21}-\dot{X}_A)+k_4(X_{22}-X_B)+c_4(\dot{X}_{22}-\dot{X}_B)-K_3(X_3+\beta_3X_3^3)-C_3\dot{X}_3-C_3\left|\dot{X}_3\right|\dot{X}_3+F_3-L(t)+f(t)=M\ddot{X}_H. \quad (1)$$

又本系統考慮的空氣動力外力是 quasi-steady，且為線性的外力，故空氣動力項可寫成，

$$L(\tau)=\rho U^2ba(\theta+\frac{\dot{X}_G}{U}). \quad (2)$$

將系統質心 G 視為參考點獲得力矩平衡方程式，

$$-F_1l_A+[K_1(X_1+\beta_1X_1^3)+C_1\dot{X}_1+\hat{C}_1\left|\dot{X}_1\right|\dot{X}_1]\times l_A-[k_2(X_{21}-X_A)+c_2(\dot{X}_{21}-\dot{X}_A)]\times(l_A-l_1)-[k_4(X_{22}-X_B)+c_4(\dot{X}_{22}-\dot{X}_B)](l_A-l_1-l_2)+M\ddot{X}_H(l_H-l_A)-[K_3(X_3+\beta_3X_3^3)+C_3\dot{X}_3+\hat{C}_3\left|\dot{X}_3\right|\dot{X}_3]\times l_B+F_3l_B+M(t)+g(t)=I_\theta\ddot{\theta}. \quad (3)$$

其中，$M(t)$ 為吾人假設的空氣動力外力對系統造成之力矩，其值大小為，

$$M(\tau)=(l_A-l_I)\rho U^2ba(\theta+\frac{\dot{X}_G}{U})-\frac{\rho\pi b^4}{8}\ddot{\theta}, \quad (4)$$

由 $\sum F=Ma$，推導減振器垂直位移之運動方程，

$$F_2-k_2(X_{21}-X_A)-c_2(\dot{X}_{21}-\dot{X}_A)-k_4(X_{22}-X_B)-c_4(\dot{X}_{22}-\dot{X}_B)+f_2(t)=m\ddot{X}_2. \quad (5)$$

由 $\sum M_g=I\alpha$，推導減振器力矩平衡方程式，

$$[k_2(X_{21}-X_A)+c_2(\dot{X}_{21}-\dot{X}_A)]\times\frac{l_2}{2}-[k_4(X_{22}-X_B)+c_4(\dot{X}_{22}-\dot{X}_B)]\times\frac{l_2}{2}+g_2(t)=I_\phi\ddot{\phi}. \quad (6)$$

2-2 非線性運動方程式之近似解析解

為求出此非線性方程式之解析解，吾人採用多尺度法來分析問題，此方法是將時間分成變化劇烈與變化緩慢兩項，並代入非線性方程組中以利解析。吾人設定令 $T_0=\bar{t}$ 為時間變化劇烈項，$T_1=\varepsilon\bar{t}$、$T_2=\varepsilon^2\bar{t}\cdots$ 為時間變化緩慢項，並假設，

$$\xi_G(\tau,\varepsilon)=\xi_{G0}(T_0,T_1,T_2...)+\varepsilon\xi_{G1}(T_0,T_1,T_2...), \quad (7)$$

$$\xi_2(\tau,\varepsilon)=\xi_{20}(T_0,T_1,T_2...)+\varepsilon\xi_{21}(T_0,T_1,T_2...), \quad (8)$$

$$\theta(\tau,\varepsilon)=\theta_0(T_0,T_1,T_2...)+\varepsilon\theta_1(T_0,T_1,T_2...), \quad (9)$$

$$\phi(\tau,\varepsilon)=\phi_0(T_0,T_1,T_2...)+\varepsilon\phi_1(T_0,T_1,T_2...). \quad (10)$$

將上述假設代入式(1)~(6)，則可將原運動方程之分為 ε^0 與 ε^1，並由 ε^0 可假設出系統之通解並帶入由 ε^1 所組成之方程式中。

2-3 解耦之頻率響應解

由於本研究為一嚴重耦合之系統，為了求出系統之近似解析解吾人需將方程式解耦，故假設 ε^1 為 $AX_1''+BX_1=F$，並假設 $X=VY$，V 為系統之特徵向量，吾人將方程式乘以特徵向量之反矩陣以解耦，可得 $V^{-1}AVY_1''+V^{-1}BVY_1=V^{-1}F$，

並改寫成 $V^{-1}IVY_1''+V^{-1}DVY_1=V^{-1}A^{-1}F$，則可求得解耦之矩陣方程式如下，

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\xi}_{G1}''\\\bar{\theta}_1''\\\bar{\xi}_{21}''\\\bar{\phi}_1''\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_1^2&0&0&0\\0&\omega_2^2&0&0\\0&0&\omega_3^2&0\\0&0&0&\omega_4^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\xi}_{G1}\\\bar{\theta}_1\\\bar{\xi}_{21}\\\bar{\phi}_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\Gamma}_1\\\bar{\Gamma}_2\\\bar{\Gamma}_3\\\bar{\Gamma}_4\end{Bmatrix} \quad (11)$$

為了求得本模式之近似解析解，吾人必須將外力項中相對應系統造成發散解的項(secular terms) 排除，以得一可解狀況(solvable condition)。故吾人將外力中與各自由度相對應之自然振動頻率項挑出，並將其令為零。其中值得注意的是，由於吾人令此系統存在著 3 to 1 的內共振現象，即 $3\omega_1=\omega_2$，故當欲挑出相對應之自然振動頻率時，第一自由度之 $\omega_2-2\omega_1$ 及第二自由度之 $3\omega_1$ 也是吾人需考慮的一環。則可將挑出之項分為實虛部如下

ω_1：

$$(I_1)(\cos\Gamma_A)+(I_2)(2\sigma A_1\omega_1)+(I_4)(3A_1^3)+(I_5)(A_1A_2^2)+(I_6)(A_1A_3^2)+(I_7)(A_1A_4^2)+(I_{12})(\cos\Gamma_B)=0, \quad (12)$$

$$(I_1)(\sin\Gamma_A)+(I_9)(\omega_1 A_1)+(I_{10})(T\omega_1 A_1)+(I_{10})(U\omega_1 A_1)$$
$$+(I_{12})(\sin\Gamma_B)=0, \quad (13)$$

ω_2:

$$(J_2)(6\sigma A_2\omega_2)+(J_4)(3A_2^3)+(J_5)(A_2A_1^2)+(J_6)(A_2A_3^2)$$
$$+(J_7)(A_2A_4^2)+(J_{12})(\cos\Gamma_B)=0, \quad (14)$$
$$(J_9)(\omega_2 A_2)+(J_{10})(T\omega_2 A_2)+(J_{11})(U\omega_2 A_2)-(J_{12})(\sin\Gamma_B)=0, \quad (15)$$

ω_3:

$$(K_4)(3A_3^3)+(K_5)(A_3A_1^2)+(K_6)(A_3A_2^2)+(K_7)(A_3A_4^2)=0 \quad (16)$$
$$(K_9)(\omega_3 A_3)+(K_{10})(T\omega_3 A_3)+(K_{11})(U\omega_3 A_3)=0, \quad (17)$$

ω_4:

$$(L_4)(3A_4^3)+(L_5)(A_4A_1^2)+(L_6)(A_4A_2^2)+(L_7)(A_4A_3^2)=0, \quad (18)$$
$$(L_9)(\omega_4 A_4)+(L_{10})(T\omega_4 A_4)+(L_{11})(U\omega_4 A_4)=0. \quad (19)$$

利用此一非線性聯立方程組，可得解出各自由度之振幅 $A_1 \sim A_4$，藉由振幅與頻率之關係繪製出 Fixed Point 圖，並分別激發第一自由度與第二自由度，藉以觀察內共振對系統造成之影響。另外吾人利用 Runge-Kutta 求解，繪製出時間域之相位圖與 Fixed Point 圖形比較，藉由觀察其振幅及振動型態，映證吾人非線性系統之正確性。

2-3 系統之穩定性

由於本模式係利用多尺度法來分析問題，且 ε^2 項以上的高次方尺度已被忽略，理論上而言，本模式為一弱非線性系統(Weakly Nonlinear System)，且在 ε^0 及 ε^1 的時間尺度內，其實系統皆為線性。在此前提之下，本研究將使用 Floquet Theorem 分析系統之穩定性。吾人將利用四階 Runge-Kutta 法求出整個系統的 Floquet Transition Matix，搭配 Floquet Multipliers 之判定法則，可繪製出系統各運作情況下之 Basin of Attraction 圖形，藉此觀察系統在不同減振器擺放位置及不同運作情形下之穩定性。

2-4 系統之振顫速度

振顫速度的找尋，是氣體彈性力學中不可忽略的一環，故吾人將之列入為設計上的考量因素之一。為找出系統之震顫速度，吾人利用氣體彈性力學中之 Eigen Plot 找尋系統之振顫速度。由於非線性方程之特徵值求解不易，吾人將非線性之彈簧及阻尼項忽略僅考慮線性項，並經過無因次化得到本模式之線性運動方程，則吾人可藉由此方程組求得系統在各飛行狀況(Flight Condition)下之特徵值，並繪製 Eigen Plot 來判斷系統之振顫速度大小。

三、 結果與討論

本研究主要是針對一個 3 to 1 的非線性內共振系統受到不同空氣動力外力時，改變減振器位置或質量，對於系統穩定性的探討。首先，吾人比較一組考慮非線性阻尼與不考慮非線性阻尼之系統的穩態頻率響應現象。圖 2 中可見，系統在考慮非線性阻尼後，其振幅及不穩定區域明顯縮小，說明了非線性阻尼吸收了較大的力量且證明考慮非線性阻尼確實對系統之減振性有顯著之影響。

為了探討內共振對於系統之影響，吾人設定各參數如表 1，藉由系統在不同的減振器擺放位置及改變減振器質量所對應之自然振動頻率，繪製出如圖 3 之立體圖。圖中，X 軸為減振器質量，Y 軸為減振器擺放之位置，而 Z 軸為三倍的第一自由度自然振動頻率與第二自由度的自然振動頻率之差異百分比，其值若越低則表示第內共振之發生機率越高或現象越明顯。圖 3 是設定 $\bar{U}=0.7$ 的情況下之理論值，圖中可看出，若在不更改減振器設計之前提下，則減振器之擺放位置將會是影響系統發生內共振之主要因素。然系統的運作環境並不一定侷限在同一風速下，故吾人再增加一變數 $U_{I.R.}$ (Internal Resonance speed)，繪製出本系統的內共振等值線圖(Internal Resonance Contour Plot)如圖 4 所示。當不同的減振器重量搭配不同擺放位置與風速，若其差異百分比達到零時則以英文字母作一標記，進而產生各個可能發生內共振之曲線。如此一來，吾人在設計系統時可藉由此圖來避開可能產生內共振之位置與風速，以免系統產生毀壞。接下來，為了驗證此等值線圖之可信度，吾人取出 $U_{I.R.}=0.7$，質量比(m/M)為 0.1，再藉由圖 3 可發現其差異百分比最低之位置為 $0.12\bar{C}$ 與 $0.78\bar{C}$，而差異百分比最高之位置為 $0.44\bar{C}$，本研究為了觀察內共振的現象是否顯現於本模式中，因此吾人分別激發主體之第一與第二自由度。當激發主體第一自由度時，吾人選擇激擾振幅大小為 $\hat{f}=2$，其餘各自由度激擾皆為 0。而在激發第二自由度時，擾振幅大小為 $\hat{g}=2$，其餘各自由度皆為 0，藉以觀察不同擺放位置所造成之影響。圖 5 及圖 6 乃是減振器擺放位置 $0.12\bar{C}$，減振器質量比 m/M=0.1 並激發第一自由度之 Fixed Point 圖，其中由圖 5 可清楚見到非線性系統中特有的跳躍現象，若系統長期處於此一不穩定區域下，將有可能導致系統疲乏、毀壞並產生危險；而圖 6 為第二自由度之 Fixed Point 圖，由於本研究之模型乃一相互耦合嚴重之系統，吾人發現此圖形中竟產生兩個波峰，猜測是由於此時激擾之自由度為第一自由度，故此時第一自由度之影響性主導了整個系統，進而使第二自由度之圖形產生兩個波峰。下一步，吾人更改激擾之自由度為第二自由度，則由圖 7 可發現，雖然激擾的是第二自由度，但第一自由度之振幅卻遠大於第二自由度之振幅，此乃內共振之典型現象，與 Nayfeh and Mook[4]書中之範例不謀而合。

另外本研究進一步針對振顫速度做一討論。藉由本論文建立模式之線性運動方程，依古典振顫分析法(Classical Flutter Analysis)分析特徵值並繪製出 Eigen Plot 且改變減振器擺放位置及質量，吾人可得到如圖 8 之振顫速度等值線圖(Flutter Speed Contour Plot)，圖中包含各種減振器擺放位置及質量的組合在不同飛行狀況下的情形。接下來吾人取圖中 m/M=0.3，擺放位置 $0.88\bar{C}$ 並繪製出此一組合之 Eigen Plot 以驗證圖 8。圖 9 為系統特徵值之虛部，可看到其第一、二兩自由度在 $U_{F.}=6.9$ 時相互接近，此為氣彈系統中典型的 Veering 現象，而最後第一自由度之虛部下降至零，則說明了系統在此時將會產生分歧，而圖 10 中，由於兩

自由度之能量轉換(Coalescent)，致使系統在$U_{F.}=6.932$時產生振顫並使第二自由度發散。吾人更利用 Poincare Map 驗證其正確性，圖 11 與圖 12 為$U_{F.}=6.9$，系統尚未產生振顫時，可見到系統仍以定量之週期振動且為 quasi-periodic。當飛行狀況到達振顫速度時，由圖 13 與圖 14 可見，其顯示無論是第一或第二自由度皆以產生混沌(Chaos)之現象，驗證了系統此時確實處於發散狀態。

另外藉由內共振等值線圖，找到在同質量、同一飛行速度下若將減振器擺放在$0.48\overline{C}$的位置將可能使系統產生內共振，於是吾人利用 Poincare Map 來驗證此一範例，由圖 15 及圖 16 可看出，當激發第一自由度時，系統呈現 quasi-periodic 之情形。激發第二自由度時，如圖 17、圖 18 所示，雖第一自由度之位移量未超過第二自由度，但其大小相近且兩自由度皆呈現渾沌的情形，表示系統呈現發散狀態。至此吾人可得到一結論，減振器質量較大且擺放位置在前端時雖可有效增加振顫速度，但卻有可能遇上內共振的現象使得系統即使避開了振顫速度卻仍然有可能發散，故將圖 4 的內共振等值線圖同時列入設計上的必考量因素，乃是重要的一環。

另外，吾人綜合圖 4 與圖 10 之觀點，繪製一連串的 Basin of Attraction 圖，觀察系統在同一質量比與擺放位置下，其飛行狀況改變時系統穩定性的進程。此一範例中，其質量比為 0.1，減振器擺放在$0.7\overline{C}$的位置，而其$U_{I.R.}=2.24$，$U_{F.}=8.7$。圖 19 為無因次化風速 2.0 時之圖形，此時系統尚未達到內共振或振顫之條件，到了風速 2.24 時，如圖 20 所示，系統發生內共振使得系統之穩定性縮小許多。但若飛行狀況越過了此一條件，可由圖 21($\overline{U}=2.3$)看到其穩定性又立即增加，顯示出內共振的確會對系統造成不容小覷之影響。若是系統達到了振顫速度時，如圖 22 所示，在圖中已然沒有穩定區域，表示系統已經完全發散且說明振顫的危險性，而內共振之影響雖不如振顫來的大，但其突然減少的穩定區域也有可能使系統存在發散的疑慮，故此兩者皆是設計上必須考量的一環。

四、 結論

吾人建構一非線性之二維剛體剖面的振動系統，並考慮非線性現象中特有的內共振現象，再加入空氣動力使之成為一氣體彈性系統，多方比較驗證內共振等值線圖及振顫速度等值線圖的可信度，並改變減振器擺放位置企圖找出具經濟效益下的最佳減振位置。

最後，吾人對本研究提出以下結論:

1. 藉由內共振等值線圖，吾人可確實預估各種質量比及擺放位置的組合，是否會使系統產生內共振，並可藉由改變擺放位置使此現象減緩甚至避開內共振。
2. 由振顫速度等值線圖中，若減振器擺置後端，則質量比小的組合將會比質量比值大的組合擁有較大的振顫速度；而當放置在前端($0.0\overline{C}\sim0.36\overline{C}$)時，質量比大的組合則無振顫現象，質量比值小的組合則會有相對較大的擺放位置限制。
3. 在系統設計時，若是為了增加振顫速度而將減振器置於前端的位置時，仍必須考慮內共振之影響性，否則若是擺放之位置恰好有發生內共振的可能，將會使系統存在著發散的潛在疑慮。

在各種不同的減振器質量、飛行狀況下，其振顫速度及可能產生內共振之位置皆會隨著各種不同的組合而改變，故設計時也必須因應各種狀況來改變減振器擺放位置以達到最佳之減振效果，因此本文提出內共振及振顫速度等值線圖相互對照，是一安全的分析方式。

參考文獻

[1] Zuo,L. and Nayfeh,S.A., “Minimax ptimization of Multi-Degree-of-Freedom Tuned-Mass Dampers,” Journal of Sound and Vibration 272, 2004, pp. 893–908.
[2] Nayfeh, A. H., “Introduction to Perturbation Techniques”, Wiley-Interscience, New York,1981, pp. 107-131.
[3] Sarkar, S. and Bijl, H., “Nonlinear Aeroelastic Behavior Of An Oscillating Airfoil During Stall-Induced Vibration,” Journal of fluids and Structrures Vol. 24,2008 pp.757-777.
[4] Nayfeh, A. H. and Mook, Dean T., “Nonlinear Oscillations”John Wiley & Sons,Inc., New York,1979, pp. 417-424.
[5] Natsiavas, S. and Tratsks, P., “On Vibration Isolation of Mechanical Systems with on-linear Foundations”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, 1996, pp. 173-185.
[6] Chakradhar, Byreddy, Ramana, Grandhi V. , and Beran, Philip “Dynamic Aeroelastic Instabilities of an Aircraft Wing with Underwing Store in Transonic Regime,” Journal of Aerospace Engineering ,Vol. 10, 2005, pp.206-214.
[7] Chang-Jian, Cai-Wan and Chan, Chao-Kuang, “Nonlinear Dynamic Analysis of a Flexible Rotor Supported by Micropolar Fluid Film Journal Bearings”,International Journal of Engineering Science, Vol. 44, 2006, pp. 1050-1070.
[8] Wang, Y.-R. , Chen, T.-H. ,“The Vibration Reduction Analysis of a Rotating Mechanism Deck System” Journal of Mechanics, Vol. 24, No. 3, 2008, p.p.253-266.

表1 振動系統之各項參數設定值

名稱	符號	參數值
主體與減振器質量比	m/M	0.01~0.3
主體線性阻尼係數(kg/sec)	C_1、C_3	8.0
主體非線性阻尼係(kg/sec)	$\hat{C}_1$、$\hat{C}_3$	0.05
減振器線性阻尼係(kg/sec)	c_2、c_4	8.0
主體彈性係($kg/\sec^2$)	K_1、K_3	20.0
減振器彈性($kg/\sec^2$)	k_2、k_4	20.0
非線性彈性係數	$\overline{\beta}_1$、$\overline{\beta}_3$	1.0

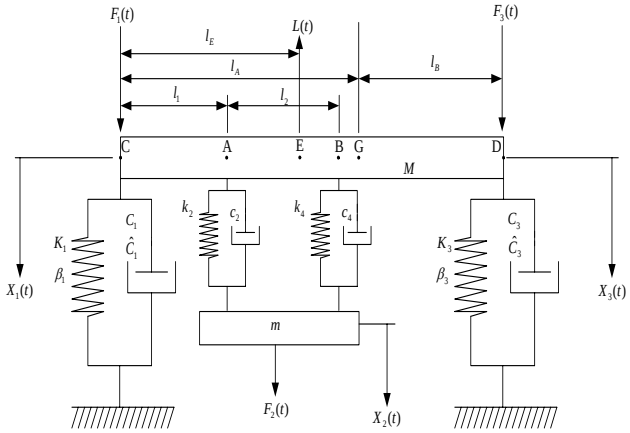

圖 1 主體與減振裝置

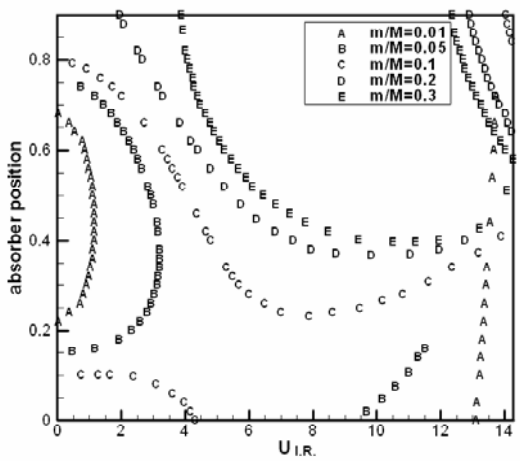

圖 4 內共振等值線圖

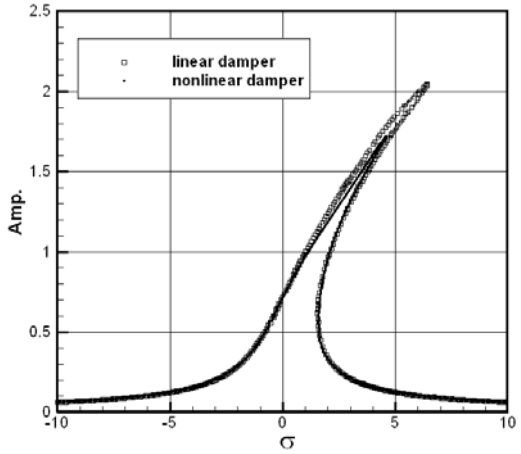

圖 2 非線性與線性阻尼之穩態頻率響應比較圖

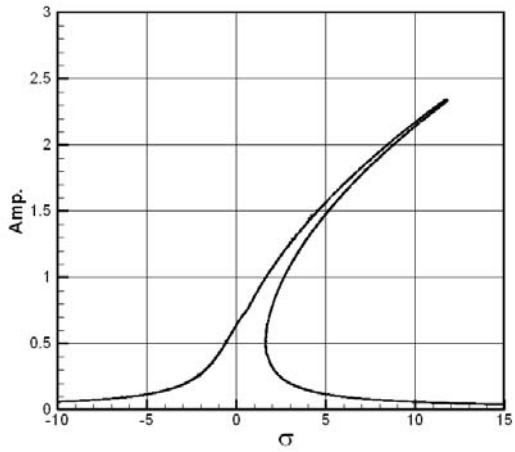

圖 5 $\overline{U}=0.7$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.12\overline{C}$ 激發第一自由度之 Fixed Point 圖(第一自由度)

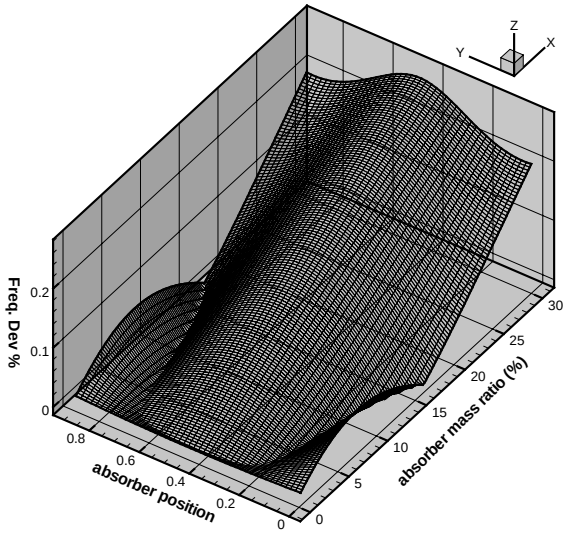

圖 3 內共振立體示意圖

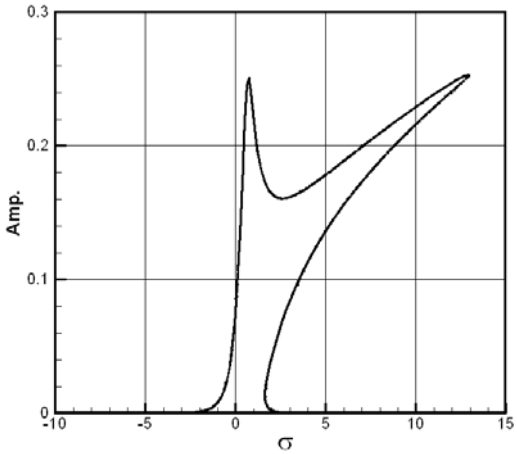

圖 6 $\overline{U}=0.7$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.12\overline{C}$ 激發第一自由度之 Fixed Point 圖(第二自由度)

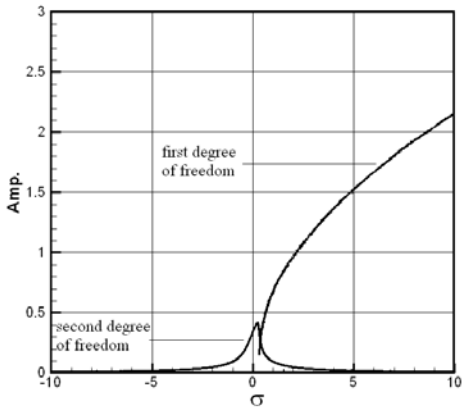

圖 7 $\overline{U}=0.7$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.12\overline{C}$ 激發第二自由度之 Fixed Point 圖

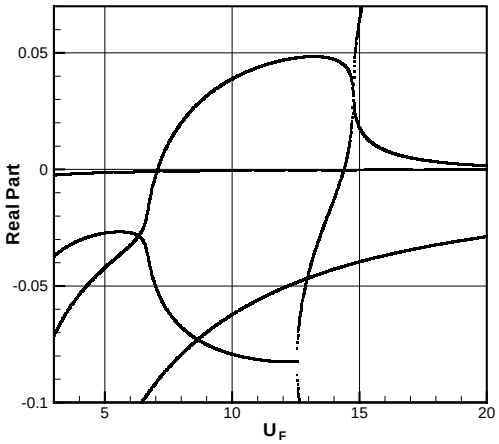

圖 10 $m/M=0.3$，位置 $0.88\overline{C}$ 之 Eigen Plot (實部)

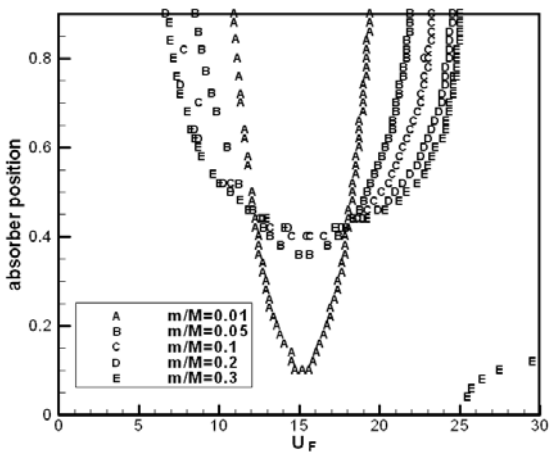

圖 8 振顫速度等值線圖

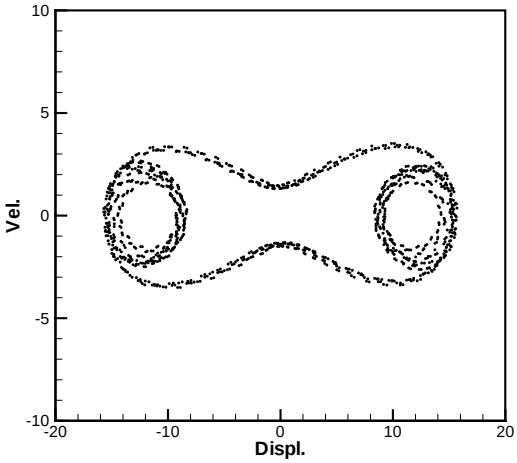

圖 11 $\overline{U}=6.9$，$m/M=0.3$，減振器位置 $0.88\overline{C}$ 激發第一自由度之 Poincare Map(第一自由度)

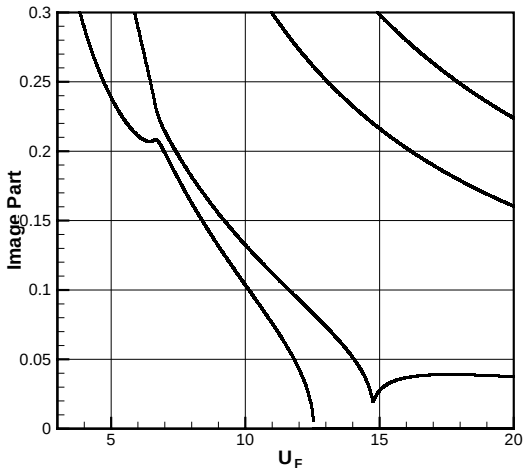

圖 9 $m/M=0.3$，位置 $0.88\overline{C}$ 之 Eigen Plot (虛部)

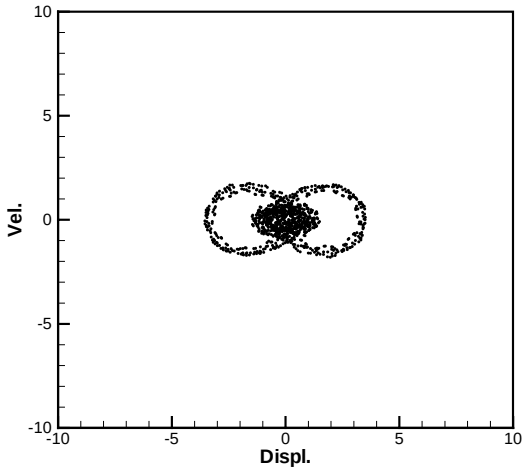

圖 12 $\overline{U}=6.9$，$m/M=0.3$，減振器位置 $0.88\overline{C}$ 激發第一自由度之 Poincare Map (第二自由度)

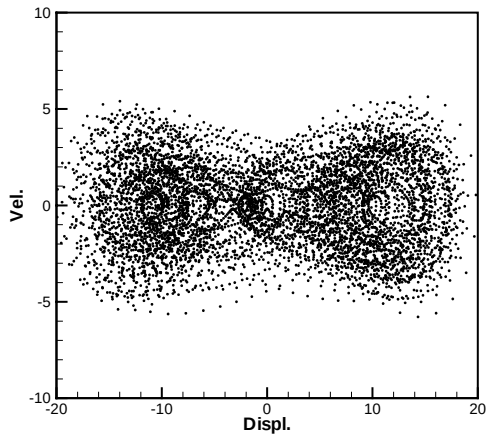

圖 13 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.88\overline{C}$激發第一自由度之 Poincare Map (第一自由度)

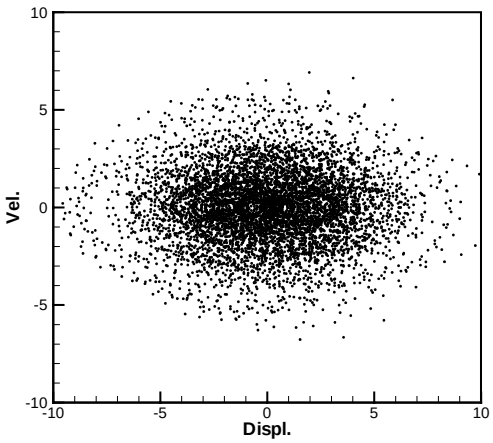

圖 14 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.88\overline{C}$激發第一自由度之 Poincare Map (第二自由度)

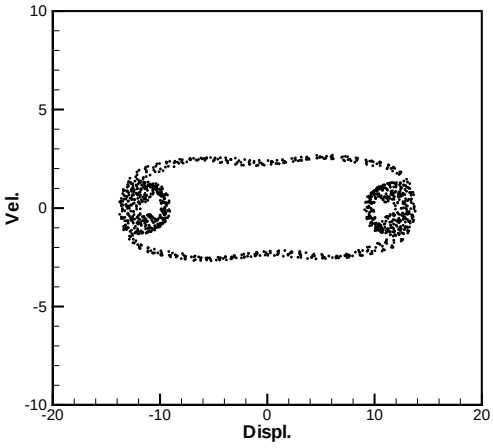

圖 15 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.48\overline{C}$激發第一自由度之 Poincare Map (第一自由度)

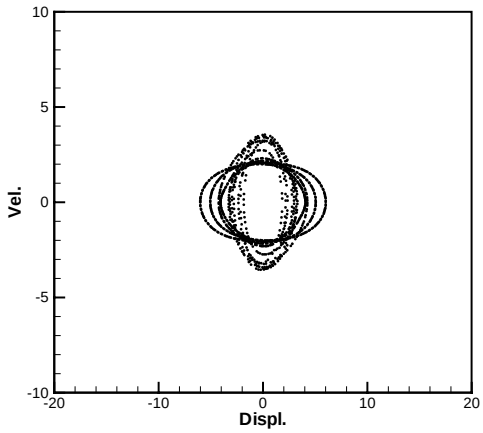

圖 16 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.48\overline{C}$激發第一自由度之 Poincare Map (第二自由度)

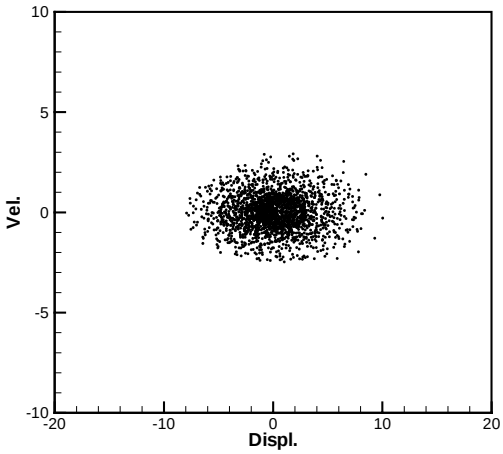

圖 17 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.48\overline{C}$激發第二自由度之 Poincare Map (第一自由度)

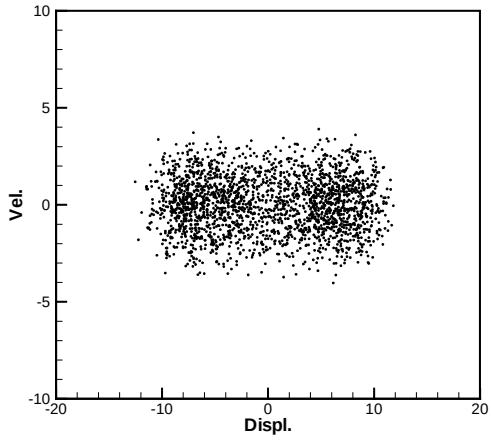

圖 18 $\overline{U}=6.932$，$m/M=0.3$，減振器位置$0.48\overline{C}$激發第二自由度之 Poincare Map (第二自由度)

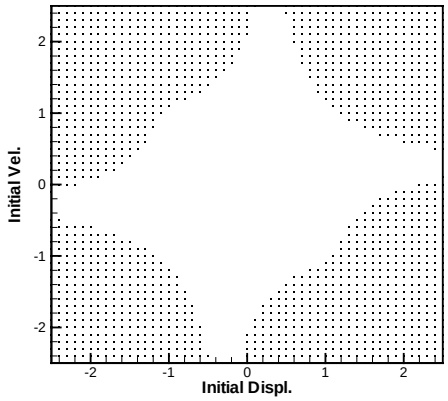

圖 19 $\overline{U}=2.0$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.7\overline{C}$ 之 Basin of Attraction

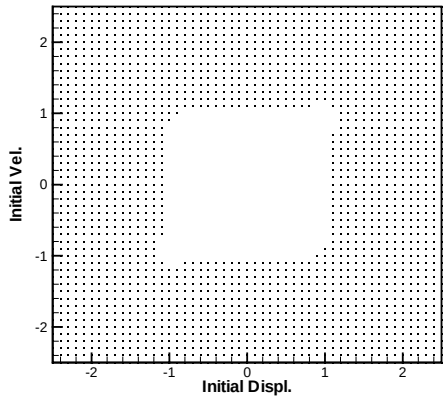

圖 20 $\overline{U}=2.24$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.7\overline{C}$ 之 Basin of Attraction

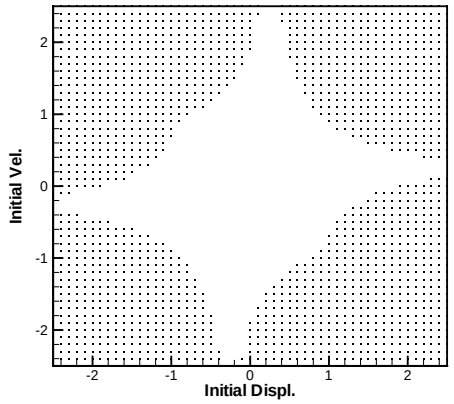

圖 21 $\overline{U}=2.3$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.7\overline{C}$ 之 Basin of Attraction

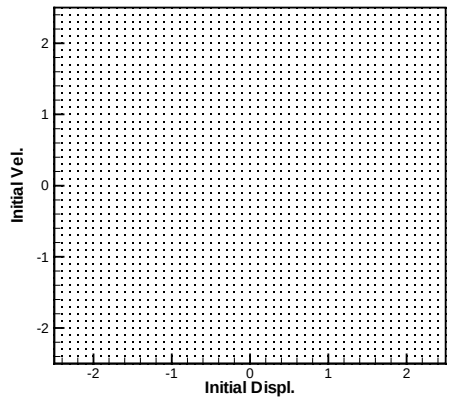

圖 22 $\overline{U}=8.7$，$m/M=0.1$，減振器位置 $0.7\overline{C}$ 之 Basin of Attraction