淡江大學統計學系應用統計學碩士班

碩士論文

指導教授：吳 錦 全 博士

利用雙型二設限樣本評估具有Burr XII分配與極值分配之產品的壽命績效指標

Assessing the lifetime performance indices of products with the Burr XII and Extreme Value distributions based on doubly type II censored samples

研究生：張逸柔 撰

中華民國 101 年 6 月

致謝辭

在研究所兩年期間，能夠順利的完成論文，最要感謝的就是我的指導教授吳錦全博士，謝謝您總是像慈愛的爸爸般不厭其煩的一再回答我的所有疑問，對於課業上的也問題也竭盡所能非常有耐心地講解到我懂為止，並適時的給予指導糾正，老師您的諄諄教誨我將永遠記得，打從心底由衷的感謝您！

再來要感謝的是和我同甘共苦一起打拼兩年的研究所同學，冠儒，謝謝你總是在我很累的時候傳來打氣小卡，並在數學科上面一同努力，希望我們都能如願地當上老師；老老人，雖然我們書報的搭配總是緊張兮兮又少根筋的，但還是謝謝你極為詳細的講解工作內容給我聽，和你共事真的非常有趣；博士豪，雖然你老是碎碎念，但還是謝謝你的面惡心善讓我在課業上學會很多；怡君，謝謝你總是耐心的聽我說話，並且溫柔的在我煩悶的時候說話讓我開心；明宣，雖然你看似不苟言笑，但我在你身上學到了沉穩認真，謝謝你總爆出許多大快人心的話語讓我寫論文還帶點歡笑；小智，謝謝你總能發生許多好笑的事情娛樂我們大家，兩年生活有了你真的添了很多樂趣；阿凱，雖然你總是唸我神經大條、一直破梗、又踢到線，但真的很謝謝貼心的你在很晚的時候會順道載我一程；R帥，雖然你的魔術已經表演N遍，但還總能讓我嘖嘖稱奇，謝謝你這麼負責的態度，我們這組才會製作的這麼順利；幼幼，謝謝你從碩一就這麼幫我，不論是在課業或是感情上給予關懷，我們要一起幸福喔；佳君，謝謝你這兩年陪我一起瘋，不管玩樂或是籌備活動，都因為有你使我兩年生活更加精采；老人，同門了兩年真的很謝謝你這麼包容我，幫忙我的程式和論文，幫我解決很多難題，也謝謝你時不時的模仿秀讓我們在半夜趕論文的時候放鬆很多；師姐，謝謝你在大半夜的時候，還願意幫我弄影片、做教具，偶而還得充當縫紉師和驅蚊蟲師，在公式推導上也幫了我很多忙，希望你要好好照顧身體；阿成，謝謝你晚上的談心時間，雖然你講話很直、很毒，但卻很好笑，我們的默契你懂，謝謝貼心的你一視同仁地為了我們幾個奔波；蒨，謝謝你總在我不知所措的時候幫助我冷靜思考，理性判斷，給予我另類的鼓勵方式，還時不時的擔任大廚養胖我，正因為有你的提醒讓我成長不少；也謝謝上屆學長，躍融、小台的鼓勵以及碩一的學弟妹，盈孜、詩詠、欣諭、雅婷、德昌、世桓、偉廷、建達、智慎、品豫、珮瑩、于庭、江奕和沛翔，這一年的生活也因為有你們，

、

研究室總是充滿歡樂氣氛。在此，要特別感謝我這輩子最要好的兩位朋友，聖筠和耿誌，因為你們的忠言逆耳，真的讓我成長很多，雖然總一箭穿心的讓我又哭又笑，但我打從心底很感謝你們！

最後，我要感謝我的爸媽，謝謝您們這麼用心的栽培我，供我唸書，給我很大的空間放手讓我去試，謝謝親愛的阿嬤、小阿姨總在我脆弱的時候給我許多正面的力量要我不要放棄、堅持下去，也要感謝我最愛的妹妹逸筑和弟弟耀元，謝謝你們包容這麼不像大姊的我，在我煩悶的時候在一旁逗我開心、給我加油打氣，我還要特別感謝我的高中啟蒙老師王莒，若不是您當初的一句話我也不會這麼堅持，我能有今天的一切全都要感謝你們，因為有愛我的這些家人，才有今日的成就，謝謝你們讓我成為你們的驕傲！

謹將此論文獻給我摯愛的家人們，亦將喜悅分享給所有的好友們，並獻上我的祝福與感謝。

張逸柔 謹誌

淡江大學統計學系應用統計學碩士班

中華民國 101 年 6 月

論文名稱：利用雙型二設限樣本評估具有 Burr XII 分配與極值分配之產品的壽命績效指標　　頁數：98

校系(所)組別：淡江大學統計學系應用統計學碩士班

畢業時間及提要別：100 學年度 第 2 學期　碩士學位論文提要

研究生：張逸柔　　**指導教授：**　吳錦全　博士

論文提要內容：

製程能力指標近年來被製造商廣泛運用在品質監控上，藉由指標值來評估製程能力的好壞。對於產品壽命之相關分配，在實務上可利用壽命績效指標C_L來衡量產品的壽命績效，其中L為規格下界。而在壽命試驗中常因時間的限制以及人力和成本的考量而無法取得完整樣本資料，因此在本文將採用設限樣本資料。

本文的主要目的是利用雙二設限樣本來評估 Burr XII 和極值之雙參數壽命分配之產品的壽命績效指標C_L，並利用C_L的不偏估計量$\tilde{C}_L$，建立相關的檢定程序與信賴區間，再針對壽命績效指標的檢定力及信賴區間進行蒙地卡羅模擬。經由模擬結果顯示，不論樣本個數n、設限樣本個數r、s如何變動，檢定力與信賴區間的模擬平均值均非常接近真實值。最後，透過實例分析，說明各項程序的運用，以提供給製造商評估產品的壽命是否符合所要求的水準。

關鍵字： Burr XII 分配、極值分配、雙型 II 設限樣本、壽命績效指標、蒙地卡羅模擬。

`

Title of Thesis： Assessing the lifetime performance indices of products with the Burr XII and Extreme Value distributions based on doubly type II censored samples

Total pages: 98

Key word: Burr XII distribution, Extreme value distribution,Doubly type II censored sample, Lifetime performance index, Monte Carlo simulation.

Name of Institute: Graduate Institute of Applied Statistics,Tamkang University.

Graduate date: June,2012

Degree conferred: Mater

Name of student: I-Jou Chang

張逸柔

Advisor: Dr. Chin-Chuan Wu

吳錦全

Abstract:

In recent years, many process capability indices (PCIs) have been widely used in q-ality monitoring by many manufacturing industries.In practice, the lifetime performance index C_L is utilized to measure lifetime performance for products with some lifetime di-stributions, where L is the lower specification limit. In lifetime testing experiments, we may not be able to obtain a complete sample due to time limitation or other restrictions. Therefore, censored samples arise in practice.

This research constructs an unbiased estimator of C_L based on the doubly type II censored sample from Burr XII and Extreme value distribution,respectively.The unbi-ased estimator of C_L is then utilized to develop a hypothesis testing procedure and the confidence interval in the condition of known L. The purchasers can then employ the new hypothesis and the confidence interval to determine whether the lifetime perf-ormance of products adhere to the required level.

目錄

`

`

表目錄

`

`

`

圖目錄

第一章　緒論

1.1 前言

隨著時代的變遷，科技的進化程度總是遠遠的超乎人們的想像，新興產業伴隨著時代創造出越來越多的商機，而現代人的生活不同於以往那樣困苦，對於生活品質的要求也不斷提升，市面上的商品為因應顧客的需求源源不絕的有如雨後春筍般被發明及應用，許多的商品更是被設計得越來越精密及複雜，而資訊的發達也使得消費者對產品品質要求越來越嚴苛。因此，若產品的品質沒達到要求的水準，不僅會降低製造商的利潤，消費者對商品也會大打折扣，降低購買意願。所以，為了能得到消費者的青睞，製造商如何對產品的品質控管、壽命以及製程良率的提高，以發揮最大的經濟效益，即是非常值得審慎考量的問題。

1.2 研究動機與目的

在現代的 e 化世代，任何儀器、3C 電子產品或是家電用品都越來越講究，為因應各式各樣的顧客需求，產品也逐漸的越做越精細，內部構造也越趨複雜，如何能使精打細算的消費者在這樣多元的選擇下雀屏中選，產品的品質和價格即會是決定消費者意願的考量因素之一。製造商為了想提高產品的壽命、性能，即必須做嚴格的監控把關與適時的改善製程，以確保達到消費者所需的品質水準。在實務上，製程能力指標(process capability indices,PCIs)即為簡便的檢測工具，以量化的方式來衡量產品的特性是否落入製造商或消費者所設定規格界限內，這樣的檢測方法常被應用在品質監控方面，並藉由指標值來評估製程能力的好壞。一般來說，消費者會希望產品的壽命能越長越好，且產品壽命越長也表示其品質越好，因此產品壽命的品質特性是屬於望大型(the larger-the-better type)的品質特性。而 Montgomery(1985)提出了壽命績效指標(lifetime performance index)C_L來衡量產品的壽命績效。

通常在進行評估產品之可靠度分析及改善時，需要對產品進行抽樣壽命試驗，但是這種壽命的

試驗通常是屬於破壞性的試驗(destructive testing),不僅花費時間也連帶的造成成本的增加。因此,如何有效地降低時間及成本並能快速且有效地得到試驗結果,將是決策者需要慎重考量的。然而在現實生活中,我們常遇到無法完全取得完整樣本的情況,這可能是由於在資料的蒐集上有時間的限制或是其他限制(例如:資金、材料來源、技術上的人為疏忽以及機器或實驗上的困難等)所造成。像這樣不完整的資料,我們稱之為設限資料(censored data)或設限樣本(censored sample)。由於無法使用一般用於完整樣本的統計方法做統計推論及分析,所以 Cohen(1963)首先提出了設限的方法,後來 Lawless(1982),Cohen(1991)也提出其他的設限方法。在存活分析(survival analysis)、可靠度分析(reliability analysis)中的壽命樣本(lifetime samples)就會常常遇到這樣的問題。而在本文所要使用的設限樣本為雙型二設限樣本(doubly type II censored sample),並用其評估具有 Burr XII 分配(Burr XII distribution)和極值分配(Extreme value distribution)之產品的壽命績效指標C_L,以進行壽命績效指標C_L之檢定和信賴區間之統計推論。

一般在工業生產中,多數的故障率函數會呈現浴缸型的曲線模式,例如電子、電鍍及機械等的產品,而生物的壽命模式也是呈現此種曲線模式。因此,面對這種情況時,利用具有浴缸型或遞增失敗率之雙參數分配會比韋伯分配、極值分配及常態分配適合。然而在 Jiang & Xiao(2003)之文章中,曾提到並非所有產品的故障率函數都呈現浴缸型的曲線模式,例如當產品因疲勞或劣化故障時,其壽命模式會呈現單峰型(或稱反向的浴缸型)(unimodal 或 reversed bathtub shaped)的故障率曲線模式。而產品會出現疲勞或劣化等現象是因為每個產品皆有老化的性質(aging property),此性質會使得預燒(burn-in)或維修策略的效果受到嚴重的衝擊。因為預燒的目的,在於能及早除去初期會故障的零件或成品,進而提高產品的可靠度。因此,當我們在工業的生產上遇到這種情形時,如果利用具有單峰型故障率函數的雙參數 Burr XII 分配會比用其他的壽命分配來得合適。

極值分配的問題早在 1790 年就被 Nicolas Bernoulli 提出來討論,之後如:Gumbel(1958),Nordquist(1945),Rantz & Riggs(1949)及 Potter(1949)等學者利用極值分配的特性來進行關於降雨量、洪水、風力以及環境污染等自然科學現象。而 Bain & Engelhart(1992)及 Johnson & Kotz(1970)則利用最大順序統計量(maximum order statistic)的極限(limiting)分配,建立極值分配的多種型

態。

1.3 文獻探討

1.3.1 製程能力指標的文獻探討

製程能力指標是可被使用作為評估產品績效的有效方法之一。製程能力指標最早是由 Juran (1974)提出的C_p指標，C_p指標是由可容許誤差(tolerances)及品質特性的標準差之比率來定義，其定義如下:

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \quad (1.1)$$

其中 USL 和 LSL 分別為製程的規格上界(upper specification limit)和製程的規格下界(lower specification limit)，d 是上下界差的一半(即$d = \frac{USL-LSL}{2}$)，σ是製程標準差。其能反映出製程變異的情況，但因為C_p指標沒有考慮製程平均值是否偏離規格中心，因此 Kane(1986)發現這個問題後便提出以C_{pk}的製程能力指標來反應出製程平均的中心位置，用以改善C_p指標超出規格界限卻評估不出的缺點，C_{pk}指標定義如下:

$$C_{pk} = \min\left(C_{pU}, C_{pL}\right) = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) \quad (1.2)$$

其中，μ為製程平均數。

由(1.2)式可得知，C_{pk}考慮到製程平均數偏移規格界限的情況，較能適當的反應出製程平均對整個製程的影響。但C_p和C_{pk}這兩個指標沒有考慮到製程平均數是否偏離製程目標值 T，所以 Chan et al. (1988)提出製程能力指標C_{pm}，用來衡量製程平均偏離目標值的程度，其定義如下:

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \quad (1.3)$$

其中，T 為製程目標值。

當製程平均值偏離目標值時，則製程會有一個平方根損失，所以C_{pm}指標非常適用在各種不同規格上下界的狀況下，尤其以規格上下界不對稱時。之後，Pearn et al.(1992)結合了C_{pk}和C_{pm}，依據規格上下界與目標值的非對稱性而提出一個新的製程能力指標C_{pmk}，其定義如下：

$$C_{pmk} = \frac{\min\{USL-\mu,\ \mu-LSL\}}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{1.4}$$

此指標考慮了製程平均值與規格區間中心位置的距離，並將製程平均數與目標值之間的變異程度融合在一起。

以上四個製程能力指標C_p、C_{pk}、C_{pm}、C_{pmk}都是評估在雙邊規格(bilateral specification)下，具有望目型品質特性(the target-the-best type quality characteristic)的製程能力指標。望目型品質特性通常會給定一個規格上、下界來控制產品的製程，例如機件裝配的間隙、尺寸特性等。除此之外，Montgomery(1985)和 Kane(1986)提出了單邊規格(unilateral specification)的製程能力指標C_L、C_{pl}與C_{pu}，其分別定義如下：

$$C_L = \frac{\mu-L}{\sigma} \tag{1.5}$$

$$C_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\sigma} \tag{1.6}$$

$$C_{pl} = \frac{USL-\mu}{3\sigma} \tag{1.7}$$

其中，C_L、C_{pl}屬於望大型品質特性的製程能力指標，望大型品質特性通常會給定一個規格下界來控制產品的製程，希望品質特性越大越好，例如產品的壽命、耐高溫的程度以及燃料的效率等；C_{pu}屬於望小型品質特性(the small-the-best type quality characteristic)的製程能力指標，望小型品質特性通常會給定一個規格上界來控制產品的製程，希望品質特性越小越好，例如檢測的不良率、產品表

面粗糙度及汙染程度等。

上述之製程能力指標全都是評估品質特性服從常態分配的假設下所使用的指標。然而在實務上，大部分的品質特性並非服從常態分配，尤其是產品的壽命曲線。因此，Clement(1989)、Pearn & Chen(1997)、Liu et al.(2006)等人分別針對非常態分配之製程能力指標進行推導，這些研究是利用百分位數當作製程平均數和標準差的估計值來計算製程能力指標。Montgomery (1985)則建議用壽命績效指標C_L來衡量電子零件的壽命績效。Tong et al.(2002)探討電子零件為指數分配的情況下，利用完整樣本建構C_L的一致最小變異不偏估計量(uniformly minimum variance unbiased estimator，UMVUE)。Wu et al.(2007)探討在產品壽命服從 Rayleigh 分配之下，建構其壽命績效指標C_L，並透過最大概似估計法推導壽命績效指標的最大概似估計量，進而發展出一個新的假設檢定程序來評估產品的績效。因此當無法確定品質特性是服從常態分配時，可先利用適合度檢定來做判斷，若能確定品質特性具有某特定之非常態分配，則可以推導出適當的機率分配的參數估計量來估計製程能力指標。

1.3.2 設限型態

通常我們可以將資料設限的情況分為以下幾種：當有 n 個樣本觀測值進行測試時，可能因為某些因素的限制(如成本過高、資料來源不足、人為疏失或機器、實驗上的困難等)，只觀測到第$r+1$個到第$n-s$個為$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$的樣本，即有前面r個和後面s個沒被觀測到，則稱此為雙型二設限樣本(doubly type II censored samples)。

而在雙型二設限樣本中的$r=0$時，則此組樣本被稱為右型二設限樣本(right type II censored samples)；反之，若$s=0$時，則此組樣本被稱為左型二設限樣本(left type II censored samples)。此兩種設限型態皆為雙型二設限樣本的特例。

其他有關設限的相關文獻如：Ferna'ndez(2000)提出在雙型二設限樣本下對具有指數分配的資

料作最大概似預測(maximum likelihood pridiction)；Wu and Li(2004)研究在雙型二設限樣本下對具有極值分配(Extreme Value)的參數作最佳化估計；Wu and Li(2005)利用多重型二設限樣本對Bu-rr Type XII 及 Lognormal 分配的形狀參數做統計推論； Wu & Wang(2007)研究在雙型二設限樣本下，對具有指數分配的產品之壽命績效做統計推論；Wu(2008)探討在雙型二設限樣本下，對具有雙參數的柏拉圖分配做信賴區間估計；Wu et al.(2010)探討在逐步設限樣本下，對具有雙參數 B-urr XII 分配做信賴區間估計；Wu & Lin(2011)利用型二設限與逐步設限樣本評估具有浴缸型分配之產品的壽命績效指標等等。

1.4 本文架構

本論文共分為四章，第一章為緒論，包括前言、研究動機與目的、以及文獻探討，介紹製程能力指標之演進與雙型二設限樣本的設限方法;第二章為利用雙型二設限樣本評估具 Burr XII 分配之產品的壽命績效；第三章為利用雙型二設限樣本評估具極值(Extreme Value)分配之產品的壽命績效；且分別在第二章和第三章中，針對不同分配的雙型二設限樣本下進行電腦模擬，以探討本文所推導的壽命績效指標之檢定統計量,在不同設限情況下檢定產品的壽命績效是否達到顧客所要求的水準，在此也各舉一個例子來說明；第四章為結論。

第二章 利用雙型二設限樣本評估具有 Burr XII 分配之產品的壽命績效

本章節主要說明當產品之壽命服從 Burr XII 分配時，使用雙型二設限樣本來評估其產品的壽命績效。2.1 節介紹產品的壽命績效指標與製程良率；2.2 節為在雙型二設限下，壽命績效指標的估計量；2.3 節為壽命績效指標的檢定程序；2.4 節為壽命績效指標的檢定力及其模擬值之比較；2.5 節為壽命績效指標的信賴區間；2.6 節為壽命績效指標之信賴水準的蒙地卡羅模擬程序；2.7 節為數值範例。

2.1 產品的壽命績效指標與製程良率

2.1.1 產品的壽命績效指標

假設產品之壽命 X 服從 Burr XII 分配，其機率密度函數(probability density function,p.d.f.)、累積分配函數(cumulative distribution function,c.d.f.)以及故障率函數(hazard function)分別如下:

$$f(x) = ckx^{c-1}(1+x^c)^{-(k+1)},\ x > 0,\ c > 0, k > 0 \qquad (2.1)$$

$$F(x) = 1-(1+x^c)^{-k}\ ,\ x > 0,\ c > 0, k > 0 \qquad (2.2)$$

$$h(x) = ckx^{c-1}(1+x^c)^{-1},\ x > 0, c > 0, k > 0 \qquad (2.3)$$

其中，k為尺度參數(scale parameter)，c為形狀參數(shape parameter)。

雖然 Burr XII 分配具有尺度參數k與形狀參數c，但雙參數 Burr XII 分配的形狀只會受形狀參數 c 的影響，因此我們在此主要針對形狀參數 c 做討論。

藉由變數變換，令 $Y = ln(1+X^c)$，則Y會服從單參數指數分配，其機率密度函數、累積分配函數以及故障率函數分別為:

$$f_Y(y) = ke^{-yk},\ y > 0,\ \ k > 0 \tag{2.4}$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-ky}\ ,\ y > 0,\ \ k > 0 \tag{2.5}$$

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)} = k,\ y > 0\ , k > 0 \tag{2.6}$$

一般來說，製造商及顧客都會希望產品的壽命是越長越好，而且產品的壽命越長表示其品質越好，所以產品壽命的品質特性是屬於望大型的品質特性。Montgomery(1985)提出了一個製程能力指標C_L來衡量望大型的品質特性，其定義如下：

$$C_L = \frac{\mu-L}{\sigma} \tag{2.7}$$

其中，μ為製程平均數，σ為製程標準差，L為規格下界。

透過變數變換所得到之產品的新壽命Y之平均數及標準差分別如下:

$$\mu = E(Y) = \frac{1}{k} \tag{2.8}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Y)} = \frac{1}{k} \tag{2.9}$$

將(2.8)、(2.9)式代回(2.7)式，則壽命績效指標C_L可改寫成:

$$C_L = \frac{\mu-L}{\sigma} = \frac{{}^{1}/_{k}-L}{{}^{1}/_{k}} = 1 - kL \tag{2.10}$$

當產品新壽命資料Y的平均數$\frac{1}{k} > \mathrm{L}$時，壽命績效指標$C_L > 0$。由(2.10)式可以發現，當$\frac{1}{k}$越大，其故障率越小，壽命績效指標會越大。相反地，當$\frac{1}{k}$越小，其故障率會越大，壽命績效指標會越小。

由此可知，壽命績效指標C_L能夠合理地代表產品的壽命績效。

2.1.2 產品的製程良率

如果產品的新壽命超過已知規格下界$(Y \geq L)$，則此產品被定義為良品；若產品新壽命資料沒超過已知規格下界，則此產品就被定義為不良品。良品的比率稱為製程良率(conforming rate)，定義如下:

$$P_r = P(Y \geq L) = \int_L^{\infty} e^{-yk} dy = e^{C_L - 1} \text{ ， } -\infty < C_L < 1 \tag{2.11}$$

由(2.11)式可以明顯地看出，製程良率P_r與壽命績效指標C_L之間存在著嚴格遞增的關係，表示C_L指標值越大，則製程良率P_r值越大。

利用(2.11)式可以計算出在不同的C_L值之下其所對應的P_r值，在表 2.1 中列出了不同C_L值及其所對應的P_r值，而對於表 2.1 中未列出之C_L值，則可以藉由(2.11)式或內插法的方式得到所對應的P_r值。

表 2.1 壽命績效指標C_L與製程良率P_r

C_L	P_r	C_L	P_r	C_L	P_r
-7.00	0.000335463	**-0.05**	0.223130160	**0.50**	0.606530660
-6.00	0.000911882	**0.00**	0.367879441	**0.55**	0.637628152
-5.00	0.002478752	**0.05**	0.386741023	**0.60**	0.670320046
-4.50	0.004086771	**0.10**	0.406569660	**0.65**	0.704688090
-4.00	0.006737947	**0.15**	0.427414932	**0.70**	0.740818221
-3.50	0.011108997	**0.20**	0.449328964	**0.75**	0.778800783
-3.00	0.018315639	**0.25**	0.472366553	**0.80**	0.818730753
-2.50	0.030197383	**0.30**	0.496585304	**0.85**	0.860707976
-2.00	0.049787068	**0.35**	0.522045777	**0.90**	0.904837418
-1.50	0.082084999	**0.40**	0.548811636	**0.95**	0.951229425
-1.00	0.135335283	**0.45**	0.576949810	**1.00**	1.000000000

一般可以利用良品總數除以樣本總數得到良率的估計值。根據 Montgomery(1985)的研究歸納得到，若要很精確地估計良率，其樣本數必須夠多，而相對地也必須花費較大的成本或人力等，且資料的蒐集上也可能會因為時間的限制或其他原因而不易取得完整樣本，因此在這兩大因素的考量下，大樣本通常並不列入考慮。此外，由(2.11)式也可以知道，壽命績效指標C_L和良率P_r之間存在著一對一的數學關係，不僅可以用來評估產品的品質，也可以用來評估良率是否達到所要求的水準。因此，壽命績效指標成為一個靈活評估產品壽命的有效工具。

2.2 壽命績效指標C_L的估計量

在產品的壽命試驗中，由於時間的限制以及其他(像是成本、物料來源、機器…等等)的限制，導致實驗者無法觀測到所有的產品壽命。因此，有許多研究是利用設限樣本做探討。而在本章節為在雙型二設限樣本下做探討。

假設 $X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$為來自 Burr XII 分配的一組雙型二設限樣本(即在樣本數為 n 之下，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$n-s-r$個樣本)，其聯合機率密度函數(p.d.f.)如下：

$$f_{X_{(r+1)},X_{(r+2)},\dots,X_{(n-s)}}(x_{(r+1)},x_{(r+2)},\dots,x_{(n-s)})$$

$$=\frac{n!}{r!s!}\left[F_X(x_{(r+1)})\right]^r \times \left[1-F_X(x_{(n-s)})\right]^s \times \prod_{i=r+1}^{n-s} f_X(x_{(i)})$$

$$=\frac{n!}{r!s!}\left[1-\left(1+x_{(r+1)}{}^c\right)^{-k}\right]^r \times \left\{1-\left[1-\left(1+x_{(n-s)}{}^c\right)^{-k}\right]\right\}^s \times \prod_{i=r+1}^{n-s} ck\,x_{(i)}{}^{c-1}\left(1+x_{(i)}\right)^{-(k+1)} \quad (2.12)$$

若設 $Y_{(i)} = ln(1+X_{(i)}{}^c)$ ，$c>0$，則 $Y_{(i)}$，$i = r+1,\dots\dots n-s$，為具有指數分配 Exp(k)之有序統

計量。

設 $Z_{r+1}=(n-r)Y_{(r+1)}$，

$Z_i=(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})$，i=r+2,……n-s。

由 Bickel 與 Doksum(1977)(p. 46)可證得$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \dots\dots, Z_{n-s}$ 為互相獨立且來自相同之單參數指數分配 Exp(k)，由附錄一亦可得知。

若令 $W=\sum_{i=r+1}^{n-s}(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})$，則$W\sim Gamma(n-s-r,k)$，

且

$$2kW\sim\chi^2(2(n-r-s)) \tag{2.13}$$

由此可知

$$E[2kW]=2(n-r-s)$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{W}{n-r-s}\right]=\theta \quad （令\ \theta=\frac{1}{k}）$$

所以，$\frac{W}{n-r-s}$為θ的不偏估計量。因此，$\hat{\theta}$ 為

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n-r-s}W \tag{2.14}$$

在給定規格下界 L 時，因為$C_L=1-\frac{L}{\theta}$，所以取C_L之估計量為$\widehat{C_L}=1-\frac{L}{\hat{\theta}}$，而$\widehat{C_L}$的期望值為:

$$E(\widehat{C_L})=E\left(1-\frac{L}{\hat{\theta}}\right)=1-L\times E\left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right)$$

$$=1-L(n-s-r)\times\frac{2}{\theta}\times E\left(\frac{\theta}{2W}\right) \quad （其中\frac{2W}{\theta}\sim\chi^2(2(n-r-s))）$$

$$=1-\left(\frac{n-s-r}{n-s-r-1}\right)\times\frac{L}{\theta} \tag{2.15}$$

由(2.10)式和(2.15)式可知 E($\widehat{C_L}$)≠ C_L，因此，$\widehat{C_L}$不是C_L的一個不偏估計量。而為求一個C_L的不偏估計量，將$\widehat{C_L}$調整為$\widehat{C_L'}$:

$$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\theta}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right) = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} \tag{2.16}$$

故$\widehat{C_L'}$會是C_L的一個不偏估計量。

2.3 壽命績效指標$\mathrm{C_L}$的檢定程序

由於抽樣時會有抽樣誤差，且產品壽命績效指標C_L的點估計並不能直接用來判斷產品的壽命是否符合要求。因此，在此節將建構一個統計檢定程序來評估壽命績效指標是否達到所要求之水準。

假設所要求的壽命績效指標值大於c^*，其中c^*為目標值(target value)，則可以建立$\mathrm{H_0}: \mathrm{C_L} \le \mathrm{c}^*$(即壽命績效指標$\mathrm{C_L}$未達所需求的水準)與$\mathrm{H_1}: \mathrm{C_L} > \mathrm{c}^*$(即壽命績效指標$\mathrm{C_L}$已達所需求的水準)之假設檢定。利用$\mathrm{C_L}$之估計量$\widehat{C_L'}$作為檢定統計量，則拒絕域可以表示為$\left\{\widehat{C_L'} \middle| \widehat{C_L'} > C_0\right\}$，其中$C_0$為臨界值。

而根據統計學中的顯著水準α，其為錯誤拒絕虛無假設(犯型Ⅰ誤差)的最大機率。所以在給定顯著水準α下，臨界值C_0可以被推導如下:

$$sup\ P(\widehat{C_L'} > C_0) = \alpha$$

$$P(\widehat{C_L'} > C_0 |\ C_L = c^*) = \alpha \text{，其中} \widehat{C_L'} = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} \text{，} C_L = 1 - \frac{L}{\theta}$$

$$\Rightarrow P(1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} > C_0 / 1 - \frac{L}{\theta} = c^*) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(w > \frac{L(n-s-r-1)}{1-C_0} | \frac{1}{\theta} = \frac{1-c^*}{L}) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(\frac{2w}{\theta} > \frac{2L(n-s-r-1)}{\theta(1-C_0)} \mid \frac{1}{\theta} = \frac{1-c^*}{L}) = \alpha$$

$$\Rightarrow\ P\left(\frac{2W}{\theta} > \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow\ P\left(\frac{2W}{\theta} \le \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)}\right) = 1-\alpha \quad \text{，其中}\ \frac{2W}{\theta} \sim \chi^2(2(n-r-s)) \tag{2.17}$$

由(2.17)式可以得到$\frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)} = \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$，其中$\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$表示自由度為$2(\mathrm{n}-\mathrm{s}-\mathrm{r})$之卡方分配的下$(1-\alpha)$分位數(lower $(1-\alpha)$th quantile)。因此，可以得到臨界值C_0為

$$C_0 = 1 - \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} \tag{2.18}$$

其中c^*、α、r、s、n 分別表示目標值、顯著水準、左邊設限個數、右邊設限個數和樣本數。表 2.2 與表 2.3 分別列出在$\alpha = 0.01$和$\alpha = 0.05$下，r=1(1)3、s=1(1)3、c^*=0.1(0.1)0.9、n=8(1)20、$\mathrm{m} = \mathrm{n}-\mathrm{s}-\mathrm{r}$下的臨界值$C_0$。

而在(2.18)式中，當設限參數$\mathrm{r} = 0$時，臨界值C_0為

$$C_0 = 1 - \frac{2(n-s-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s))} \tag{2.19}$$

，其對應的臨界值如表 2.4 和表 2.5 。

關於壽命績效指標$\mathrm{C_L}$之檢定程序的步驟整理如下:

步驟一:

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，假設產品壽命 X 來自 Burr XII 分配，其機率密度函數及累積分配函數同(2.1)式及(2.2)式，令$X_{(i)}$為服從 Burr XII 分配的雙型二設限樣本，其中$\mathrm{i} = \mathrm{r}+1, \ldots \mathrm{n}-\mathrm{s}$， $\mathrm{r}, \mathrm{s} \le \mathrm{n}$，則$F_X(X_{(i)})$的期望值(參考Wu et al. (2007))為：

$$E\left(F_X\left(X_{(i)}\right)\right)=\frac{i}{n+1}\ ,i=r+1,\ldots\ldots n-s\ ，r,s\leq n \qquad (2.20)$$

若以$\frac{i}{n+1}$代替$F_X(X_{(i)})$，即$\frac{i}{n+1}\approx 1-(1+x_{(i)}{}^{c})^{-1/\theta}$，將式子移項整理，兩邊同時取對數，因此使用近似函數求解：

$$ln(1-\frac{i}{n+1})\approx -\frac{1}{\theta}ln(1+x_{(i)}{}^{c})\ \ ,\ i=r+1,\ldots\ldots n-s \qquad (2.21)$$

利用最小平方法，考慮形狀參數c的各種給定值，使得誤差平方和(error sum of square, SSE)最小，即$min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[\ ln(1-\frac{i}{n+1})+\frac{1}{\theta}ln(1+x_{(i)}{}^{c})\right]^2\right\}$，以便求得最適合的c值，同時估計θ值。

步驟二:

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，針對產品壽命 X 來自 Burr XII 分配的雙型二設限樣本 $X_{(r+1)}<X_{(r+2)}<\cdots<X_{(n-s)}$(樣本大小為 n 的隨機樣本，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$\mathrm{n-s-r}$個觀測值)，利用資料轉換，令$Y_{(i)}=ln\left(1+X_{(i)}{}^{c}\right),\mathrm{i}=r+1,\ldots\ldots n-s$，則$Y_{(r+1)}<Y_{(r+2)}<\cdots<Y_{(n-s)}$為來自單參數指數分配的雙型二設限樣本。

步驟三:

決定產品壽命的規格下界 L、目標值c^*以及給定顯著水準α，則可建構出$H_0: C_L\leq c^*$(表示壽命績效指標C_L未達所需求的水準)與$H_1: C_L>c^*$(表示壽命績效指標C_L已達所需求的水準)的檢定假設。

步驟四:

利用(2.14)式求得$\widehat{\theta}$，然後將$\widehat{\theta}$帶入(2.16)式，則可計算出檢定統計量的值:

$$\widehat{C_L'}=1-\frac{L(n-s-r-1)}{\mathrm{W}}$$

步驟五:

根據給定的目標值c^*、樣本數 n、設限參數 r 和 s，以及顯著水準α，透過表 2.2 和表 2.3 即可得到相對應的臨界值C_0。

步驟六:

比較$\widehat{C_L'}$和C_0並做出結論。其決策的準則如下:

① 若$\widehat{C_L'} > C_0$，則拒絕H_0，表示該產品的壽命績效指標有達到廠商或顧客所需求的水準。

② 若$\widehat{C_L'} \le C_0$，則不拒絕H_0，表示該產品的壽命績效指標沒有達到廠商或顧客所需求的水準。

而當設限樣本數$r = 0$時，此為雙型二設限樣本的一個特例，則$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n-s)}$為一組具有 Burr XII 分配的右型二設限樣本(樣本大小為 n 的隨機樣本中，只觀測到$n - s$個產品壽命)，我們可以根據 2.2 節的運算推導，求得其壽命績效指標之估計量和臨界值，也可按照 2.3 節壽命績效指標的檢定程序以檢定產品是否有達到所需求的水準。而$\widehat{C_L'}$的檢定力情形，將在 2.4.3 節中做討論。

2.4 壽命績效指標之檢定力及其模擬值之比較

2.4.1 壽命績效指標之檢定力函數

統計檢定的檢定力定義為正確拒絕虛無假設的機率。根據 2.3 節的假設檢定程序，欲檢定虛無假設$H_0: C_L \le c^*$和對立假設$H_1: C_L > c^*$，其統計檢定的檢定力函數推導如下:

給定樣本個數 n、設限樣本個數 r、s(r、s 皆≤n)以及顯著水準α，又拒絕域為$\{\widehat{C_L'} > C_0\}$，其中$C_0 = 1 - \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}$。當$C_L = c_1 (> c^*)$，則壽命績效指標的檢定力 $P(c_1)$為:

$$P(c_1) = P(\widehat{C_L'} > C_0 | C_L = c_1)$$，其中$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W}$和$C_L = 1 - \frac{L}{\theta}$

$$= P(1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} > 1 - \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} | 1 - \frac{L}{\theta} = c_1)$$

$$= P(\frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} > \frac{L(n-s-r-1)}{W} | \frac{1}{\theta} = \frac{1-c_1}{L})$$

$$= P(2w > \frac{L\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{1-c^*} | \frac{1}{\theta} = \frac{1-c_1}{L})$$

$$= P\left(\frac{2W}{\theta} > \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))(1-c_1)}{1-c^*}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{2W}{\theta} \le \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))(1-c_1)}{1-c^*}\right)，其中\ \frac{2W}{\theta} \sim \chi^2\,(2(n-s-r)) \qquad (2.22)$$

我們可以利用後面附註的表中查得所對應的檢定力真值，至於分別求出的檢定力真值與模擬值之比較將會在 2.4.2 做討論。而當設限樣本數$r = 0$時，也可依據(2.22)式求其檢定力。

2.4.2 在設限條件下之檢定力的真值與模擬值之比較

根據 2.4.1 節所推導出的檢定力函數，本文利用蒙地卡羅(Monte Carlo)模擬演算法計算壽命績效指標的檢定力，則檢定壽命績效指標的檢定力 P(c_1)模擬之步驟如下:

步驟一:

① 分別給定目標值c^*、c_1($c^* < c_1 < 1$)、形狀參數 c、下規格界限 L、顯著水準α、設限樣本數 r，s 以及樣本數 n。

② 參數值θ可利用$C_L = 1 - \frac{L}{\theta} = c_1$得到，$C_L < 1$。

③ 利用電腦模擬生成 n 筆來自均勻分配U(0,1)之隨機樣本$U_1, U_2, \dots, U_n$，經排序後得到其有序樣本$U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$。

④ 經由轉換$X_{(i)} = \left[\left(1 - U_{(i)}\right)^{-\theta} - 1\right]^{1/c}$，$i = 1,2,\dots,n$，則$\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\right)$是來自於機率密度函數如(2.2)式的一組有序樣本。

⑤ 捨去排序後的前 r 項和後 s 項，，則可以得到有序的設限樣本為$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$，r 和 s 皆≤n。經資料轉換後得到$Y_{(i)} = ln(1 + {X_{(i)}}^{c})$，$i = r+1, r+2, \ldots n-s$。

⑥ 利用(2.14)式求出θ之估計值 $\hat{\theta}$，再代入(2.16)式求出壽命績效指標C_L之不偏估計值:

$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\theta}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right)$ 。

⑦ 利用假設檢定，若$\widehat{C_L'} > C_0$，則紀錄 count=1；反之，則紀錄 count=0，其中，臨界值

$C_0 = 1 - \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}$ 。

步驟二:

① 將步驟一重複 1000 次。

② 可以得到一個 $P(c_1)$之檢定力模擬值為$\hat{P}(c_1) = \frac{Total\ count}{1000}$。

步驟三:

① 將步驟二重複 100 次，則可以得到 100 個檢定力模擬值為:

$\widehat{P_1}(c_1)$, $\widehat{P_2}(c_1)$, $\cdots\widehat{P_{100}}(c_1)$。

② 由①步驟可以得到 100 個檢定力的模擬平均值為$\overline{\hat{P}(c_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{100} \hat{P}_i(c_i)}{100}$及其樣本均方誤差(SMSE)為: $SMSE = \frac{\sum_{i=1}^{100}[\hat{P}_i(c_i) - P(c_1)]^2}{100}$，其中 $P(c_1)$由(2.22)式求得。

依照上述步驟，在給定樣本數 n 為 20 與 30，目標值c^*=0.2、$c_1 = 0.2(0.1)0.9$，下規格界限 L=1，顯著水準$\alpha = 0.01$和$\alpha = 0.05$，設限樣本數(r,s)=(1,1)、(1,2)、(1,3)、(2,1)、(2,2)、(2,3)、(3,1)、(3,2)、(3,3)下，壽命績效指標的檢定力 $P(c_1)$結果呈現如表 2.6 至表 2.23 和圖 2.1 至圖 2.18 所示。

經由表 2.6 至表 2.23 及圖 2.1 至圖 2.18，可以發現：(1)在固定c_1和 n 下，其檢定力真實值 $P(c_1)$與模擬平均值$\overline{P(c_1)}$會隨著設限樣本大小 r 或 s 任一的增加而減少；(2)對於任一給定之c_1值，其模擬平均值會很接近檢定力真實值，且其所有的樣本均方誤差 SMSE 都很小。

2.5 壽命績效指標的信賴區間

製造商或顧客除了可以用 2.4 節中所提出的壽命績效指標之檢定程序來判斷產品的壽命是否有達到所要求的水準外，亦可使用壽命績效指標的信賴區間作為評估的工具。

利用 2.2 節所推導出C_L之估計量 $\widehat{C_L'}$，且假設所要求的產品壽命下規格界限 L 已知，在雙型二設限下，給定樣本數 n、設限樣本數 r、s(r 和 s 皆$\leq$ n)，則$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\theta}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right)$，且可由 2.3 節中得知$\frac{2W}{\theta} \sim \chi^2_{(2(n-s-r))}$。因此，在給定信賴水準為$1-\alpha$之下，壽命績效指標$C_L$之$100(1-\alpha)\%$的信賴區間滿足下列條件:

$$P\left(\frac{2W}{\theta} \leq \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{\theta} \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{L}{\theta} \leq \frac{L \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(1-\frac{L}{\theta} \geq 1-\frac{L \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha \qquad \left(\because \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{n-s-r}{W}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(C_L \geq 1-\frac{(1-\widehat{C_L'}) \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}\right) = 1-\alpha \tag{2.23}$$

由(2.23)式可以得到C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界(Lower confidence bound)為:

$$\underline{LB} = 1-\frac{(1-\widehat{C_L'})\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)} \tag{2.24}$$

其中，$\widehat{C_L'}$、$\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$、r 和 s 分別表示為$C_L$的不偏估計量、自由度為$2(n-s-r)$之卡方分配的下$(1-\alpha)$分位數和左、右設限樣本個數。因此可以得到$C_L$之$100(1-\alpha)\%$的信賴區間為:

$$C.I. = \left[1 - \frac{(1-\widehat{C_L'})\cdot\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}, \infty\ \right) \quad (2.25)$$

關於壽命績效指標C_L之信賴區間的評估程序與步驟整理如下:

步驟一:

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，假設產品壽命 X 來自 Burr XII 分配，其機率密度函數及累積分配函數同(2.1)式及(2.2)式，令$X_{(i)}$為服從極值分配的雙型二設限樣本，其中$i = r+1, \dots n-s$，$r, s \le n$，則$F_X(X_{(i)})$的期望值(參考Wu et al. (2007))為：

$$E\left(F_X\left(X_{(i)}\right)\right) = \frac{i}{n+1}\ , i = r+1, \dots\dots n-s\ ，r, s \le n$$

若以$\frac{i}{n+1}$代替$F_X(X_{(i)})$，即$\frac{i}{n+1} \approx 1 - (1 + x_{(i)}{}^c)^{-1/\theta}$，將式子移項整理，兩邊同時取對數，因此使用近似函數求解：

$$ln(1 - \frac{i}{n+1}) \approx -\frac{1}{\theta} ln(1 + x_{(i)}{}^c)\ ,\ i = r+1, \dots\dots n-s$$

利用最小平方法，考慮形狀參數c的各種給定值，使得誤差平方和(error sum of square, SSE)最小，即$min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[\ ln(1-\frac{i}{n+1}) + \frac{1}{\theta} ln(1 + x_{(i)}{}^c)\right]^2\right\}$，以便求得最適合的c值，同時估計θ值。

步驟二:

針對產品壽命 X 來自 Burr XII 分配的雙型二設限樣本$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$(樣本大小為 n 的隨機樣本，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$n-s-r$個觀測值)，利用資料轉換，令$Y_{(i)} = ln\left(1 + X_{(i)}{}^c\right)$，$i = r+1, \dots\dots n-s$，則$Y_{(r+1)} < Y_{(r+2)} < \cdots < Y_{(n-s)}$為來自單參數指數分配的雙型二設限樣本。

步驟三:

確定顧客對產品之製程良率P_r的要求後,透過表 2.1 可以找到與製程良率P_r相對應之產品新壽命績效指標值，以建立目標值c^*，且決定產品新壽命的規格下界 L。

步驟四:

給定信賴水準$1-\alpha$。

步驟五:

利用(2.24)式，計算出C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界為:

$$\underline{LB}=1-\frac{(1-\widehat{C_L})\cdot\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}$$

步驟六:

決策準則如下:

(1)若目標值$c^*\in$ C.I.，表示該產品的壽命績效指標沒有達到製造商或顧客所要求的水準。

(2)若目標值$c^*\notin$ C.I.，表示該產品的壽命績效指標有達到製造商或顧客所要求的水準。

另外，假設所要求的產品壽命下規格界限 L 已知，在右型二設限下$(r=0)$，給定樣本數 n、設限樣本數 $s(s\leq n)$,我們亦可根據前面(2.24)式求算壽命績效指標C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界，至於信賴區間的評估程序則依據上述的六步驟即可求得。

2.6 壽命績效指標之信賴水準的蒙地卡羅模擬程序

本節將根據壽命績效指標C_L之$100(1-\alpha)\%$單邊信賴區間，利用蒙地卡羅的模擬程序，模擬出其信賴水準$(1-\alpha)$。步驟如下：

步驟一:

① 分別給定C_L值、下規格界限 L、信賴水準$1-\alpha$、參數值 c、設限樣本個數 r，s 以及樣本個數n。其中$C_L < 1$，r, s < n。

② 透過$C_L = 1 - \frac{L}{\theta}$，計算出參數值θ。

③ 生成 n 筆來自均勻分配U(0,1)之隨機樣本$U_1, U_2, \ldots, U_n$，經排序後得到其有序樣本 $U_{(1)}, U_{(2)}\ , \ldots, U_{(n)}$。

④ 經由轉換$X_{(i)} = \left[\left(1 - U_{(i)}\right)^{-\theta} - 1\right]^{1/c}$，$i = 1,2, \ldots, n$，則$\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$是來自於機率密度函數如(2.2)式的一組有序樣本。

⑤ 捨去排序後的前 r 項和後 s 項，，則可以得到有序的設限樣本為$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$，r 和 s 皆≤n，$i = r+1, \ldots \ldots n-s$。

⑥ 計算 $\underline{LB}$=$1 - \frac{(1-\widehat{C_L'})\cdot\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}$值，其中$\widehat{C_L'}$同(2.16)式。

⑦ 若$C_L \geq$ $\underline{\text{LB}}$，則紀錄 count=1；反之，若$C_L <$ $\underline{\text{LB}}$，則紀錄 count=0。

步驟二:

① 將步驟一重複 1000 次。

② 信賴水準$(1-\alpha)$的估計值為$(1-\hat{\alpha}) = \frac{Total\ count}{1000}$。

步驟三:

① 將步驟二重複 100 次，則可以得到 100 個信賴水準模擬值為:

$(1-\hat{\alpha})_1,\ (1-\hat{\alpha})_2\ , \cdots (1-\hat{\alpha})_{100}$。

② 由①步驟可以得到 100 個信賴水準模擬平均值為$\overline{1-\hat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^{100}(1-\hat{\alpha})_i}{100}$及其樣本均方誤差(SMSE)為: $SMSE = \frac{\sum_{i=1}^{100}[(1-\hat{\alpha})_i-(1-\alpha)]^2}{100}$。

依照上述步驟，在給定參數值$c=3$與樣本數 n 為 20 與 30，設限樣本數(n,r,s)=(20,1,1)、(20,1,2)、(20,1,3)、(20,2,1)、(20,2,2)、(20,2,3)、(20,3,1)、(20,3,2)、(20,3,3)、(30,1,1)、(30,1,2)、(30,1,3)、(30,2,1)、(30,2,2)、(30,2,3)、(30,3,1)、(30,3,2)、(30,3,3)以及下規格界限 L=1、顯著水準$\alpha=0.01$和$\alpha=0.05$下，壽命績效指標之信賴水準的結果呈現如表 2.24 和表 2.25 所示。由表 2.24 和表 2.25 中可發現，不論(n,r,s)為多少，其信賴水準之模擬平均值$\overline{1-\hat{\alpha}}$都非常接近真實的信賴水準$(1-\alpha)$，並且所有的樣本均方誤差 SMSE 都很小，因此，由這些模擬研究的結果顯示本章所提供的方法，是可以用來評估壽命績效指標是否達到顧客所要求的水準。

2.7 數值範例

根據Nelson((1982), p. 105, Table 1.1)的範例觀測電子絕緣體在電壓下的壽命試驗，觀察 19 個樣本在 34KV 的電壓下直到產品壞掉或是壽命終止的時間並記錄下來，其壽命時間分別如下：0.19、0.78、0.96、1.31、2.78、3.16、4.15、4.67、4.85、6.50、7.35、8.01、8.27、12.06、31.75、32.52、33.91、36.71 以及 72.89，且根據Wu et al. (2010)已驗證此筆資料是服從 Burr XII 分配。

根據上述所給定的資料，透過績效評估模式為此產品做壽命績效評估。假設電子絕緣體之壽命合格率至少要達到 80%。在考慮雙型二設限樣本下，假設前後各刪除一個樣本，即設限樣本數$r=1$，$s=1$，則壽命績效指標C_L之檢定評估程序與步驟如下：

步驟一：

假設 X 服從 Burr XII 分配，其機率密度函數以及累積分配函數同(2.1)式及(2.2)式，令$x_{(i)}$為服從 Burr XII 分配之雙型二設限樣本值，其中i=r+1,…,n-s，r, s < n，由 2.3 節所提及之檢定程序，利用最小平方法，考慮形狀參數c的各種給定值，使得誤差平方和(Error Sum of Square , SSE)最小，即$min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[\,ln\left(1-\frac{i}{n+1}\right)+\frac{1}{\theta}ln(1+{x_{(i)}}^{c})\right]^2\right\}$，以便求得最適合的 c 值，同時估計θ值。參數 c 的

各種給定值以及參數θ的估計值與誤差平方和的關係，呈現在表 2.26 與圖 2.19。由表 2.26 和圖 2.19 可以看出，當$c = 3.5$時，誤差平方和最小，且$\hat{\theta} = 9.2456$。

步驟二:

為了達成 80%的合格率，由表 2.1 可以知道我們的壽命績效指標C_L必須達到 0.80，才會滿足此產品的需求，即壽命績效指標的目標值設為c^*設為 0.8，且假設此產品的最低容忍規格下界$L = 0.0216$，因此可達建構出虛無假設及對立假設如下：

$$\begin{cases} H_0: C_L \le 0.8 \\ H_0: C_L > 0.8 \end{cases}$$

步驟三:

給定顯著水準$\alpha = 0.05$。

步驟四:

計算檢定統計量值：

$$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\theta}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right) = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{\sum_{i=r+1}^{n-s}(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})}$$

$$= 1 - \frac{0.0216 \times (19-1-1-1)}{40.74436} = 0.99152$$

且根據$c^* = 0.8$、$r = 1$、$s = 1$、$n = 19$及顯著水準$\alpha = 0.05$，則可由表 2.3 查到臨界值為C_0 =0.8858。

步驟五:

因為$\widehat{C_L'} = 0.99152 > C_0$ =0.8858，所以拒絕虛無假設$H_0: C_L \le 0.8$，即可判定產品的壽命績效有達到我們所要求的水準。

表 2.2 顯著水準$\alpha = 0.01$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 1(1)3$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有 Burr XII 分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
2	0.8644	0.8795	0.8946	0.9096	0.9247	0.9397	0.9548	0.9699	0.9849
3	0.7859	0.8097	0.8335	0.8572	0.8810	0.9048	0.9286	0.9524	0.9762
4	0.7312	0.7611	0.7909	0.8208	0.8507	0.8805	0.9104	0.9403	0.9701
5	0.6898	0.7242	0.7587	0.7932	0.8277	0.8621	0.8966	0.9311	0.9655
6	0.6567	0.6949	0.7330	0.7711	0.8093	0.8474	0.8856	0.9237	0.9619
7	0.6294	0.6706	0.7117	0.7529	0.7941	0.8353	0.8765	0.9176	0.9588
8	0.6062	0.6500	0.6937	0.7375	0.7812	0.8250	0.8687	0.9125	0.9562
9	0.5863	0.6322	0.6782	0.7242	0.7701	0.8161	0.8621	0.9081	0.9540
10	0.5688	0.6167	0.6646	0.7125	0.7604	0.8083	0.8563	0.9042	0.9521
11	0.5532	0.6029	0.6525	0.7022	0.7518	0.8014	0.8511	0.9007	0.9504
12	0.5393	0.5905	0.6417	0.6929	0.7441	0.7953	0.8464	0.8976	0.9488
13	0.5267	0.5793	0.6319	0.6845	0.7371	0.7897	0.8422	0.8948	0.9474
14	0.5153	0.5692	0.6230	0.6769	0.7307	0.7846	0.8384	0.8923	0.9461
15	0.5048	0.5599	0.6149	0.6699	0.7249	0.7799	0.8349	0.8900	0.9450
16	0.4952	0.5513	0.6074	0.6635	0.7196	0.7756	0.8317	0.8878	0.9439
17	0.4863	0.5434	0.6004	0.6575	0.7146	0.7717	0.8288	0.8858	0.9429
18	0.4780	0.5360	0.5940	0.6520	0.7100	0.7680	0.8260	0.8840	0.9420

表 2.3 顯著水準$\alpha = 0.05$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 1(1)3$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有 Burr XII 分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
2	0.8103	0.8314	0.8524	0.8735	0.8946	0.9157	0.9368	0.9578	0.9789
3	0.7141	0.7459	0.7776	0.8094	0.8412	0.8729	0.9047	0.9365	0.9682
4	0.6518	0.6905	0.7292	0.7679	0.8065	0.8452	0.8839	0.9226	0.9613
5	0.6067	0.6504	0.6941	0.7378	0.7815	0.8252	0.8689	0.9126	0.9563
6	0.5720	0.6195	0.6671	0.7146	0.7622	0.8098	0.8573	0.9049	0.9524
7	0.5440	0.5947	0.6453	0.6960	0.7467	0.7973	0.8480	0.8987	0.9493
8	0.5208	0.5741	0.6273	0.6806	0.7338	0.7870	0.8403	0.8935	0.9468
9	0.5012	0.5566	0.6120	0.6675	0.7229	0.7783	0.8337	0.8892	0.9446
10	0.4842	0.5416	0.5989	0.6562	0.7135	0.7708	0.8281	0.8854	0.9427
11	0.4694	0.5284	0.5873	0.6463	0.7052	0.7642	0.8231	0.8821	0.9410
12	0.4563	0.5167	0.5771	0.6375	0.6979	0.7583	0.8188	0.8792	0.9396
13	0.4445	0.5062	0.5680	0.6297	0.6914	0.7531	0.8148	0.8766	0.9383
14	0.4339	0.4968	0.5597	0.6226	0.6855	0.7484	0.8113	0.8742	0.9371
15	0.4243	0.4883	0.5522	0.6162	0.6802	0.7441	0.8081	0.8721	0.9360
16	0.4155	0.4805	0.5454	0.6103	0.6753	0.7402	0.8052	0.8701	0.9351
17	0.4074	0.4733	0.5391	0.6050	0.6708	0.7366	0.8025	0.8683	0.9342
18	0.4000	0.8314	0.5333	0.6000	0.6667	0.7333	0.8000	0.8667	0.9333

表 2.4 顯著水準$\alpha = 0.01$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 0$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有 Burr XII 分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
5	0.6898	0.7242	0.7587	0.7932	0.8277	0.8621	0.8966	0.9311	0.9655
6	0.6567	0.6949	0.7330	0.7711	0.8093	0.8474	0.8856	0.9237	0.9619
7	0.6294	0.6706	0.7117	0.7529	0.7941	0.8353	0.8765	0.9176	0.9588
8	0.6062	0.6500	0.6937	0.7375	0.7812	0.8250	0.8687	0.9125	0.9562
9	0.5863	0.6322	0.6782	0.7242	0.7701	0.8161	0.8621	0.9081	0.9540
10	0.5688	0.6167	0.6646	0.7125	0.7604	0.8083	0.8563	0.9042	0.9521
11	0.5532	0.6029	0.6525	0.7022	0.7518	0.8014	0.8511	0.9007	0.9504
12	0.5393	0.5905	0.6417	0.6929	0.7441	0.7953	0.8464	0.8976	0.9488
13	0.5267	0.5793	0.6319	0.6845	0.7371	0.7897	0.8422	0.8948	0.9474
14	0.5153	0.5692	0.6230	0.6769	0.7307	0.7846	0.8384	0.8923	0.9461
15	0.5048	0.5599	0.6149	0.6699	0.7249	0.7799	0.8349	0.8900	0.9450
16	0.4952	0.5513	0.6074	0.6635	0.7196	0.7756	0.8317	0.8878	0.9439
17	0.4863	0.5434	0.6004	0.6575	0.7146	0.7717	0.8288	0.8858	0.9429
18	0.4780	0.5360	0.5940	0.6520	0.7100	0.7680	0.8260	0.8840	0.9420
19	0.4703	0.5291	0.5880	0.6468	0.7057	0.7646	0.8234	0.8823	0.9411

表 2.5 顯著水準$\alpha = 0.05$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 0$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有 Burr XII 分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
5	0.6067	0.6504	0.6941	0.7378	0.7815	0.8252	0.8689	0.9126	0.9563
6	0.5720	0.6195	0.6671	0.7146	0.7622	0.8098	0.8573	0.9049	0.9524
7	0.5440	0.5947	0.6453	0.6960	0.7467	0.7973	0.8480	0.8987	0.9493
8	0.5208	0.5741	0.6273	0.6806	0.7338	0.7870	0.8403	0.8935	0.9468
9	0.5012	0.5566	0.6120	0.6675	0.7229	0.7783	0.8337	0.8892	0.9446
10	0.4842	0.5416	0.5989	0.6562	0.7135	0.7708	0.8281	0.8854	0.9427
11	0.4694	0.5284	0.5873	0.6463	0.7052	0.7642	0.8231	0.8821	0.9410
12	0.4563	0.5167	0.5771	0.6375	0.6979	0.7583	0.8188	0.8792	0.9396
13	0.4445	0.5062	0.5680	0.6297	0.6914	0.7531	0.8148	0.8766	0.9383
14	0.4339	0.4968	0.5597	0.6226	0.6855	0.7484	0.8113	0.8742	0.9371
15	0.4243	0.4883	0.5522	0.6162	0.6802	0.7441	0.8081	0.8721	0.9360
16	0.4155	0.4805	0.5454	0.6103	0.6753	0.7402	0.8052	0.8701	0.9351
17	0.4074	0.4733	0.5391	0.6050	0.6708	0.7366	0.8025	0.8683	0.9342
18	0.4000	0.4667	0.5333	0.6000	0.6667	0.7333	0.8000	0.8667	0.9333
19	0.3931	0.4605	0.5279	0.5954	0.6628	0.7303	0.7977	0.8651	0.9326

表 2.6 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01008	9.42E-06	0.01000	0.00970	7.74E-06
0.3	0.04724	0.04786	5.25E-05	0.06238	0.06151	4.72E-05
0.4	0.16992	0.17157	1.35E-04	0.25263	0.25219	2.16E-04
0.5	0.43912	0.44111	3.12E-04	0.61963	0.61896	1.94E-04
0.6	0.77740	0.77826	1.87E-04	0.92163	0.92071	7.70E-05
0.7	0.96802	0.96772	3.02E-05	0.99691	0.99679	3.52E-06
0.8	0.99939	0.99930	6.58E-07	1.00000	1.00000	2.45E-11
0.9	1.00000	1.00000	4.90E-15	1.00000	1.00000	7.19E-24

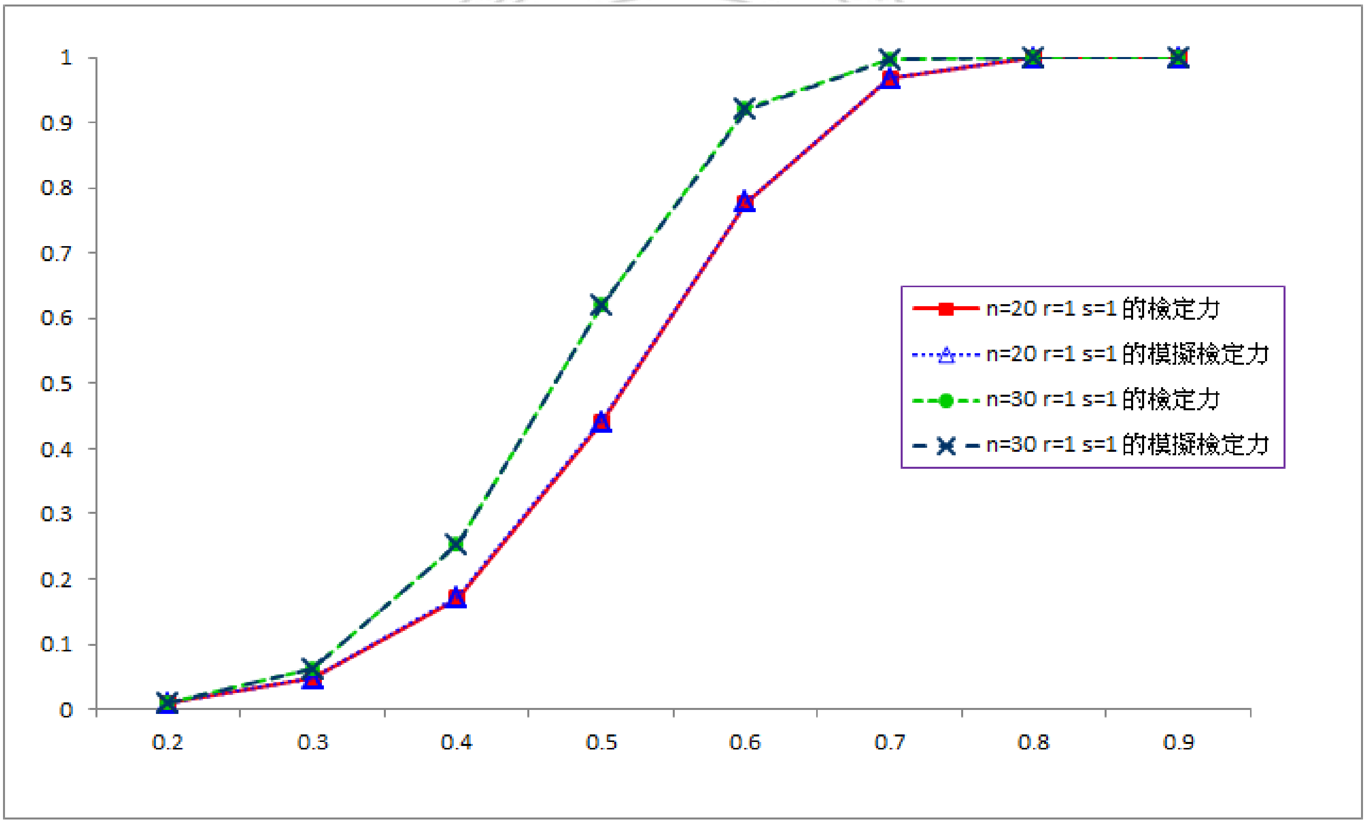

圖 2.1 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.7 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=1, s=2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=2 $\alpha=0.01$			n=30 r=1 s=2 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01001	1.02E-05	0.01000	0.01026	8.98E-06
0.3	0.04572	0.04570	4.58E-05	0.06086	0.06051	4.66E-05
0.4	0.16174	0.16298	1.32E-04	0.24434	0.24436	1.84E-04
0.5	0.41864	0.42122	2.58E-04	0.60370	0.60525	2.10E-04
0.6	0.75460	0.75585	1.85E-04	0.91258	0.91281	7.47E-05
0.7	0.96006	0.95992	3.31E-05	0.99607	0.99573	3.21E-06
0.8	0.99903	0.99909	9.25E-07	0.99999	0.99999	9.90E-09
0.9	1.00000	1.00000	3.58E-14	1.00000	1.00000	5.66E-23

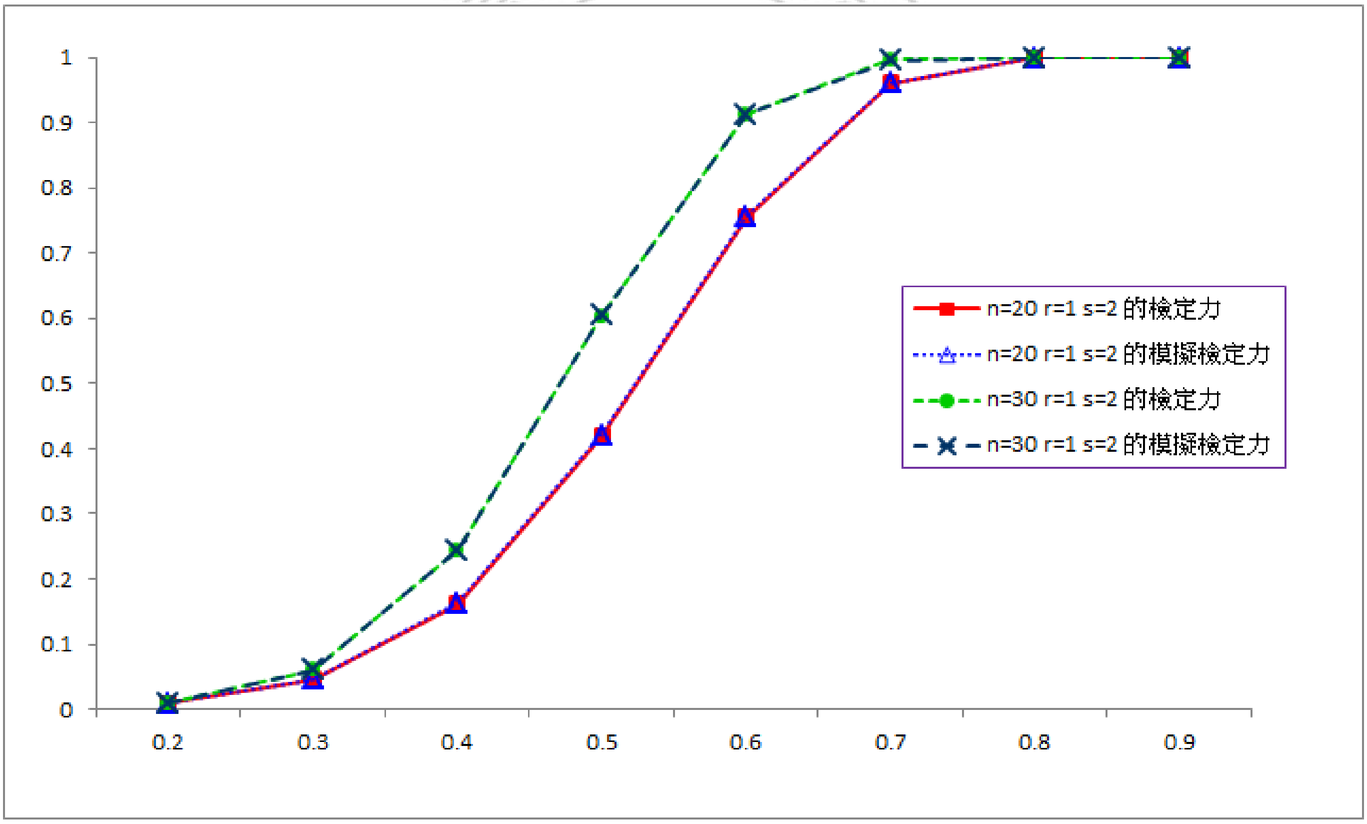

圖 2.2 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=1, s=2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.8 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=1,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=3 $\alpha=0.01$			n=30 r=1 s=3 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01053	1.26E-05	0.01000	0.01002	8.98E-06
0.3	0.04419	0.04450	4.26E-05	0.05935	0.05937	5.16E-05
0.4	0.15358	0.15320	1.40E-04	0.23604	0.23654	1.85E-04
0.5	0.39776	0.39778	2.01E-04	0.58728	0.58663	2.26E-04
0.6	0.72986	0.72901	1.97E-04	0.90258	0.90251	9.37E-05
0.7	0.95026	0.95105	3.87E-05	0.99500	0.99499	4.71E-06
0.8	0.99846	0.99833	1.62E-06	0.99999	0.99999	9.91E-09
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

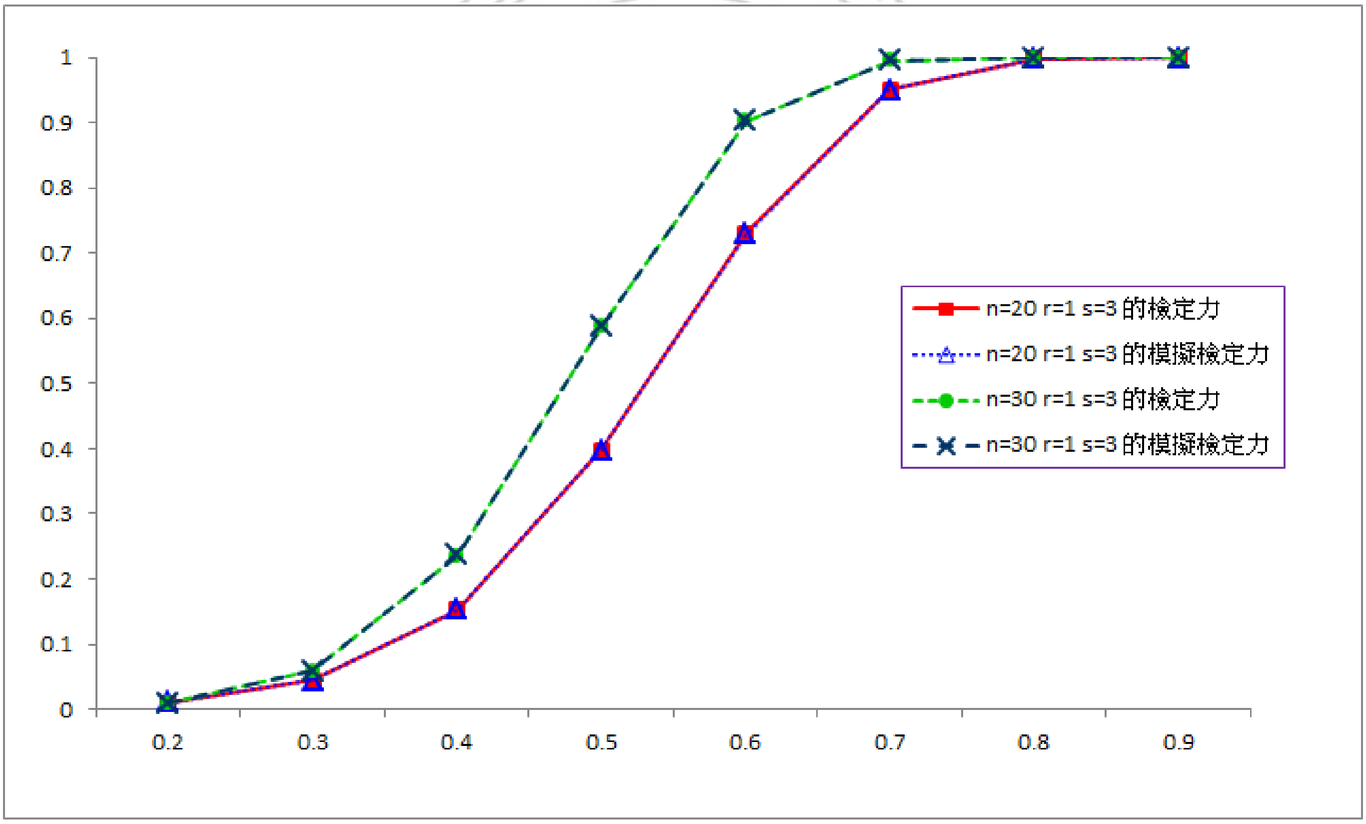

圖 2.3 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=1,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.9 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01005	1.10E-05	0.01000	0.01009	7.91E-06
0.3	0.04572	0.04597	3.32E-05	0.06086	0.06037	5.79E-05
0.4	0.16174	0.16470	1.33E-04	0.24434	0.24162	1.79E-04
0.5	0.41864	0.42179	1.96E-04	0.60370	0.59977	2.56E-04
0.6	0.75460	0.75636	1.34E-04	0.91258	0.91138	6.73E-05
0.7	0.96006	0.96031	3.73E-05	0.99607	0.99599	4.02E-06
0.8	0.99903	0.99904	8.98E-07	0.99999	0.99998	1.97E-08
0.9	1.00000	1.00000	3.58E-14	1.00000	1.00000	5.66E-23

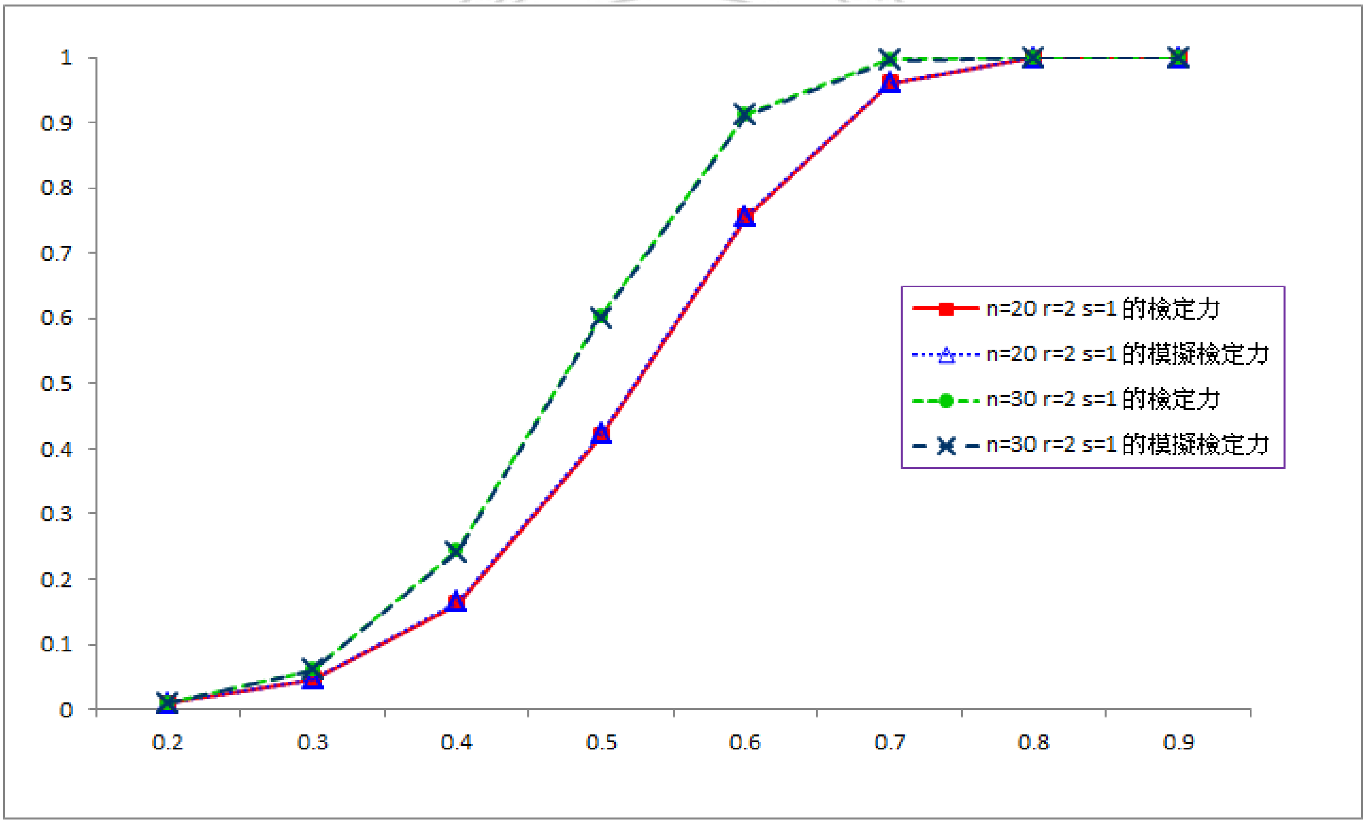

圖 2.4 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.10 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00992	7.88E-06	0.01000	0.00930	8.94E-06
0.3	0.04419	0.04373	3.57E-05	0.05935	0.05802	5.46E-05
0.4	0.15358	0.15285	1.70E-04	0.23604	0.23555	1.63E-04
0.5	0.39776	0.39656	2.99E-04	0.58728	0.58562	2.37E-04
0.6	0.72986	0.72872	1.88E-04	0.90258	0.90091	7.49E-05
0.7	0.95026	0.95019	4.35E-05	0.99500	0.99484	5.14E-06
0.8	0.99846	0.99832	1.80E-06	0.99999	1.00000	1.75E-10
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

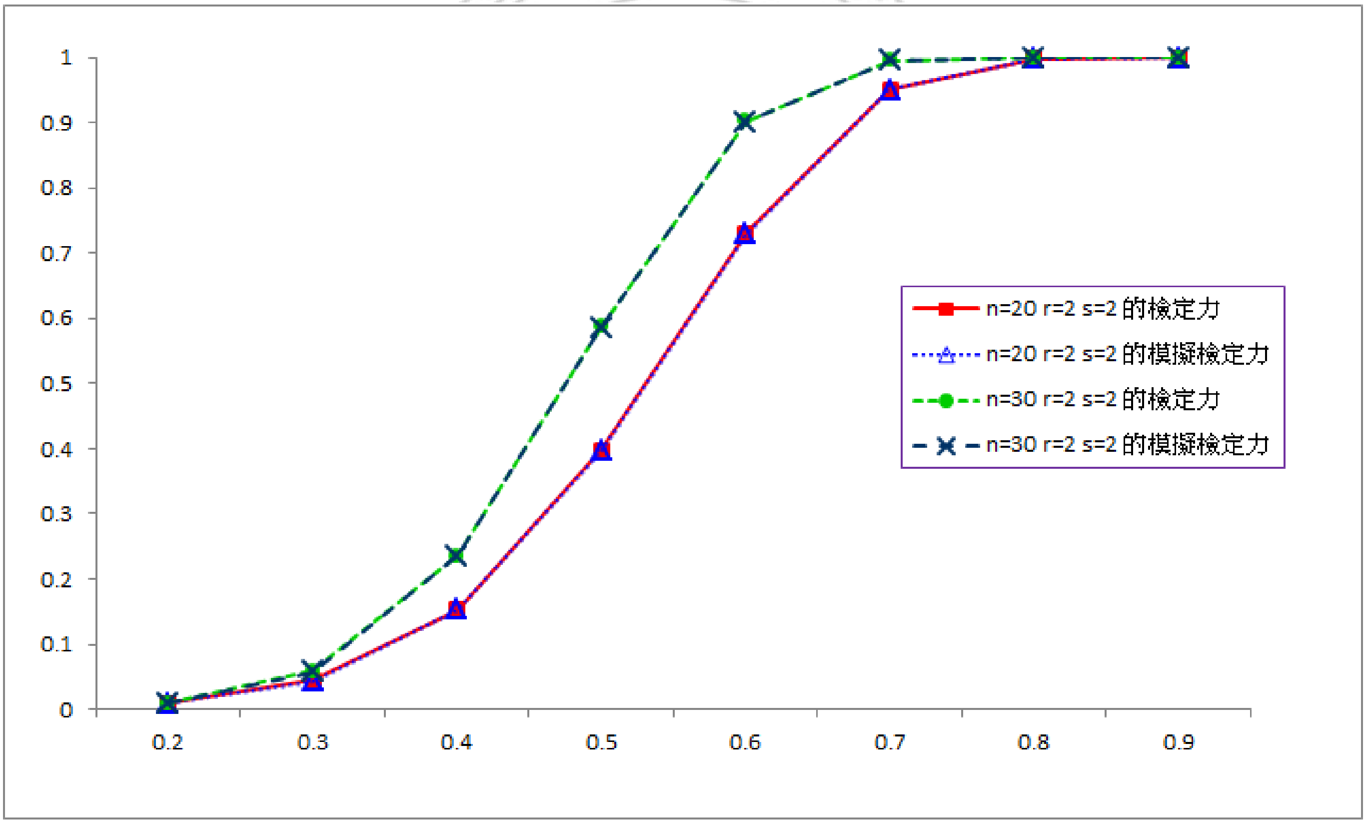

圖 2.5 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.11 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=2,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=2 s=3 $\alpha=0.01$			n=30 r=2 s=3 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01008	9.36E-06	0.01000	0.01039	8.25E-06
0.3	0.04266	0.04275	3.60E-05	0.05783	0.05835	5.51E-05
0.4	0.14546	0.14695	1.33E-04	0.22774	0.22833	1.41E-04
0.5	0.37653	0.37880	2.93E-04	0.57038	0.57179	3.01E-04
0.6	0.70308	0.70141	2.50E-04	0.89154	0.89166	1.01E-04
0.7	0.93822	0.93768	5.42E-05	0.99365	0.99363	5.21E-06
0.8	0.99757	0.99757	2.89E-06	0.99998	0.99997	2.92E-08
0.9	1.00000	1.00000	1.86E-12	1.00000	1.00000	3.45E-21

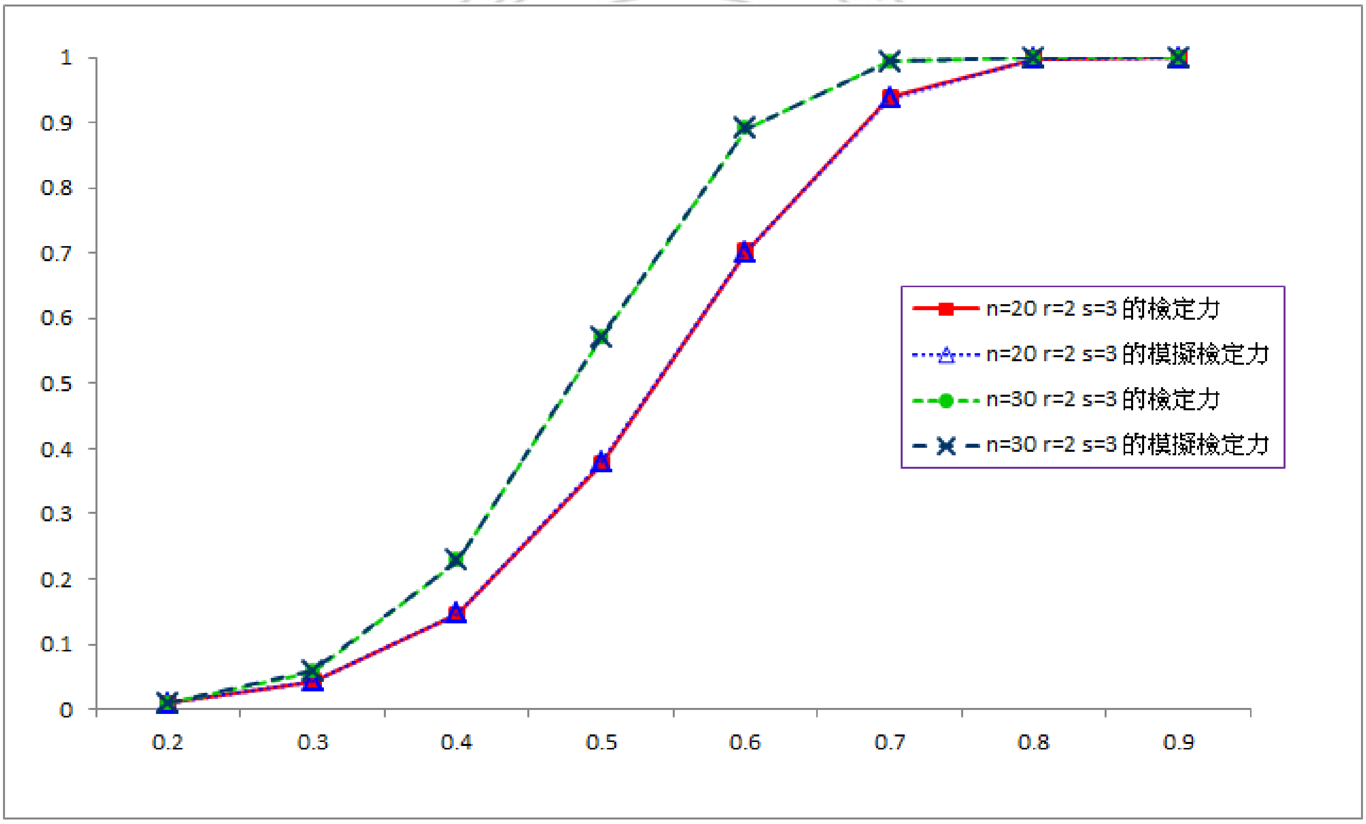

圖 2.6 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=2,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 2.12 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=3 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	**SMSE**	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	**SMSE**
0.2	0.01000	0.01062	1.26E-05	0.01000	0.00992	1.08E-05
0.3	0.04419	0.04520	4.30E-05	0.05935	0.06022	6.17E-05
0.4	0.15358	0.15486	1.28E-04	0.23604	0.23755	1.60E-04
0.5	0.39776	0.40107	2.44E-04	0.58728	0.59093	2.40E-04
0.6	0.72986	0.73284	2.38E-04	0.90258	0.90317	8.98E-05
0.7	0.95026	0.95020	4.46E-05	0.99500	0.99486	5.14E-06
0.8	0.99846	0.99845	1.39E-06	0.99999	0.99999	9.91E-09
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

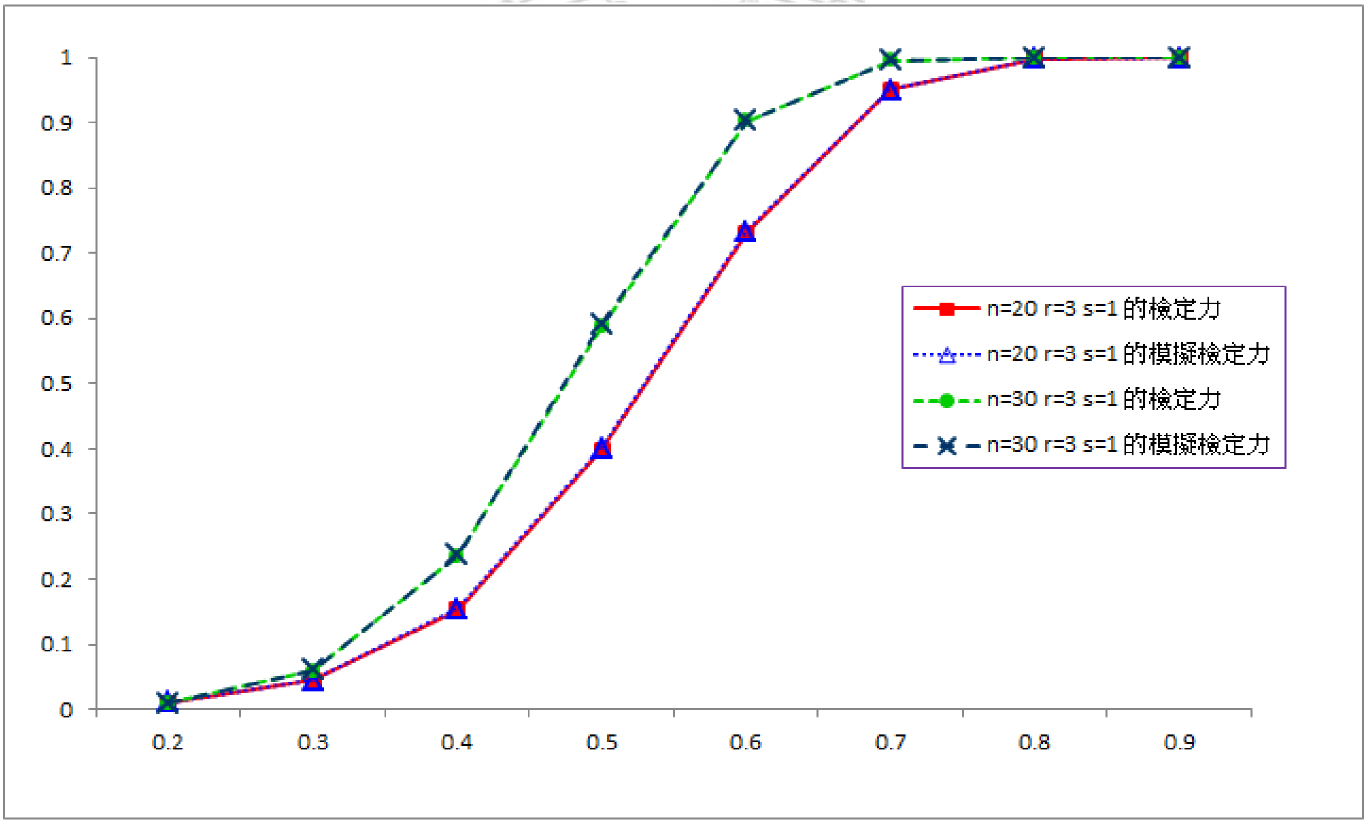

圖 2.7 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 2.13 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01021	9.05E-06	0.01000	0.00971	9.27E-06
0.3	0.04266	0.04335	3.87E-05	0.05783	0.05745	5.54E-05
0.4	0.14546	0.14781	1.21E-04	0.22774	0.22875	1.53E-04
0.5	0.37653	0.37702	2.34E-04	0.57038	0.57222	2.15E-04
0.6	0.70308	0.70416	1.97E-04	0.89154	0.89007	9.51E-05
0.7	0.93822	0.93832	5.06E-05	0.99365	0.99351	6.95E-06
0.8	0.99757	0.99780	2.31E-06	0.99998	0.99999	1.00E-08
0.9	1.00000	1.00000	1.86E-12	1.00000	1.00000	3.45E-21

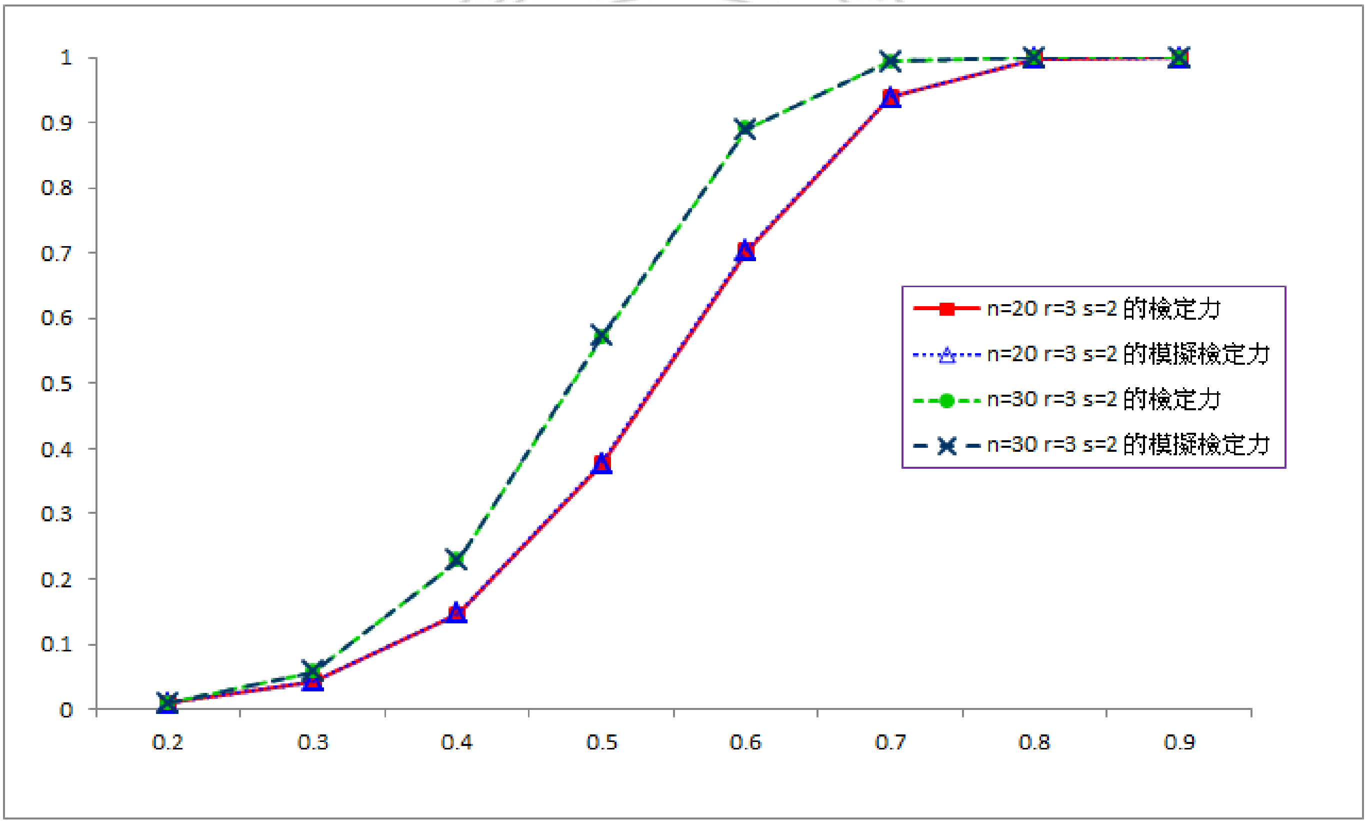

圖 2.8 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.14 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=3,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=3 $\alpha=0.01$			n=30 r=3 s=3 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01028	1.17E-05	0.01000	0.00974	6.70E-06
0.3	0.04112	0.04079	3.76E-05	0.05632	0.05611	6.38E-05
0.4	0.13736	0.13529	1.56E-04	0.21944	0.22115	2.09E-04
0.5	0.35495	0.35316	2.91E-04	0.55301	0.55527	2.40E-04
0.6	0.67417	0.67388	2.77E-04	0.87939	0.88215	1.08E-04
0.7	0.92349	0.92351	8.99E-05	0.99196	0.99216	7.44E-06
0.8	0.99619	0.99620	4.22E-06	0.99996	0.99995	4.77E-08
0.9	1.00000	0.99999	9.94E-09	1.00000	1.00000	2.66E-20

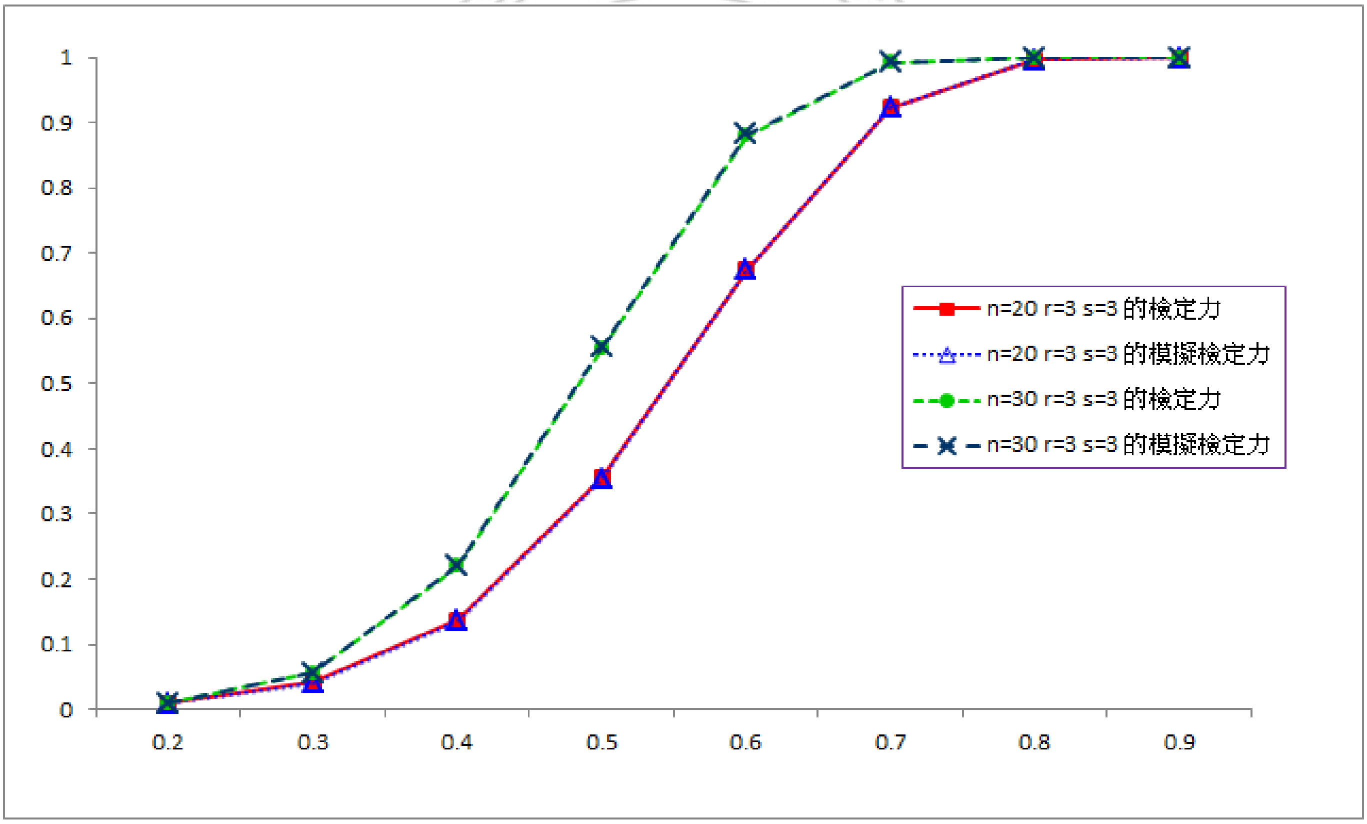

圖 2.9 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=3,s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.15 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05033	5.71E-05	0.05000	0.05078	5.56E-05
0.3	0.15336	0.15417	1.38E-04	0.18818	0.19063	1.94E-04
0.4	0.36769	0.36910	2.74E-04	0.48046	0.48322	3.14E-04
0.5	0.66521	0.66638	2.28E-04	0.81208	0.81401	1.80E-04
0.6	0.90370	0.90405	7.50E-05	0.97484	0.97510	2.60E-05
0.7	0.99051	0.99139	9.35E-06	0.99939	0.99937	7.93E-07
0.8	0.99988	0.99988	1.06E-07	1.00000	1.00000	3.42E-13
0.9	1.00000	1.00000	7.95E-17	1.00000	1.00000	3.47E-26

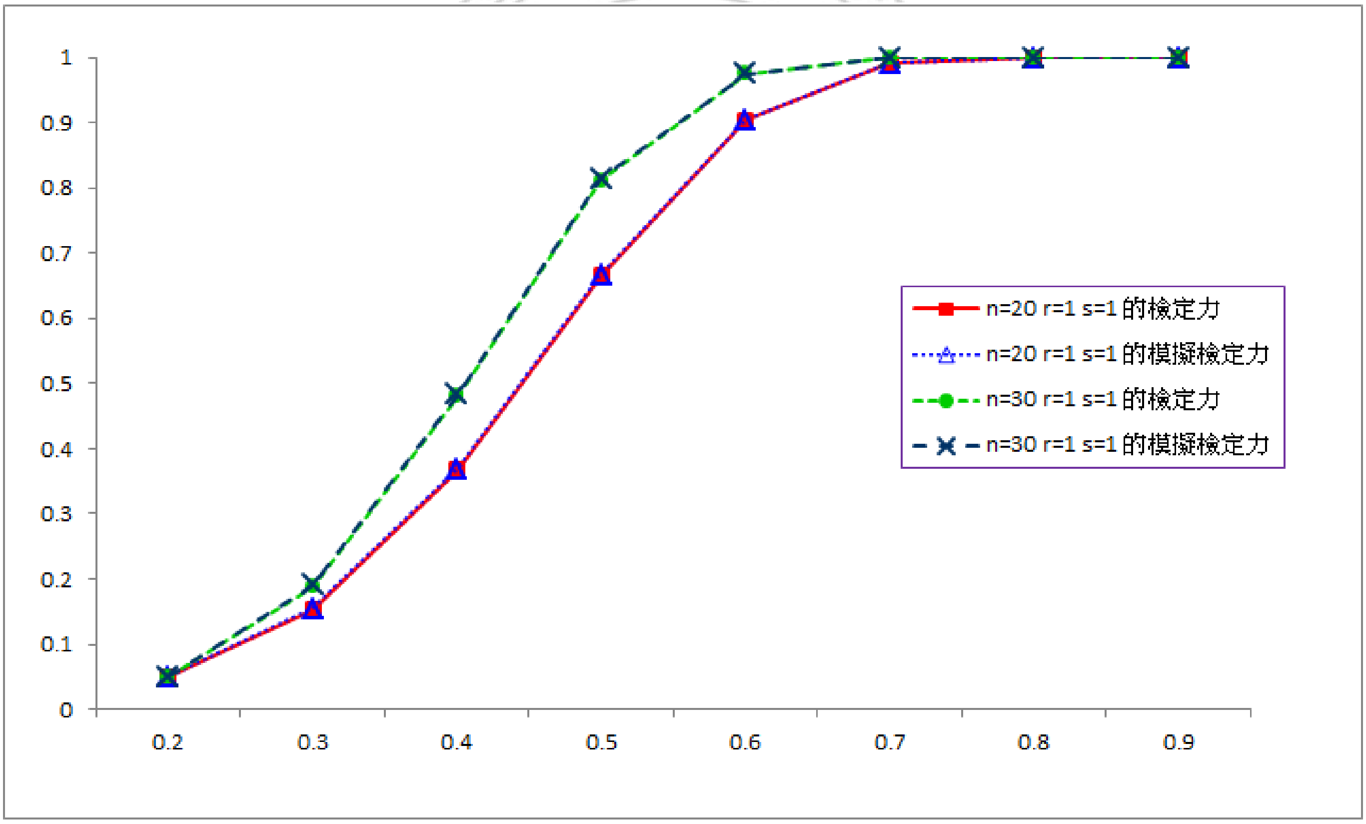

圖 2.10 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.16 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\hat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05068	4.08E-05	0.05000	0.05010	5.00E-05
0.3	0.14968	0.15161	1.23E-04	0.18483	0.18381	1.45E-04
0.4	0.35534	0.35762	2.47E-04	0.47001	0.46879	2.34E-04
0.5	0.64594	0.64416	1.83E-04	0.80064	0.80024	1.42E-04
0.6	0.89033	0.89090	9.75E-05	0.97113	0.97025	2.65E-05
0.7	0.98760	0.98766	1.22E-05	0.99919	0.99912	7.71E-07
0.8	0.99980	0.99987	1.38E-07	1.00000	1.00000	1.01E-12
0.9	1.00000	1.00000	6.67E-16	1.00000	1.00000	3.05E-25

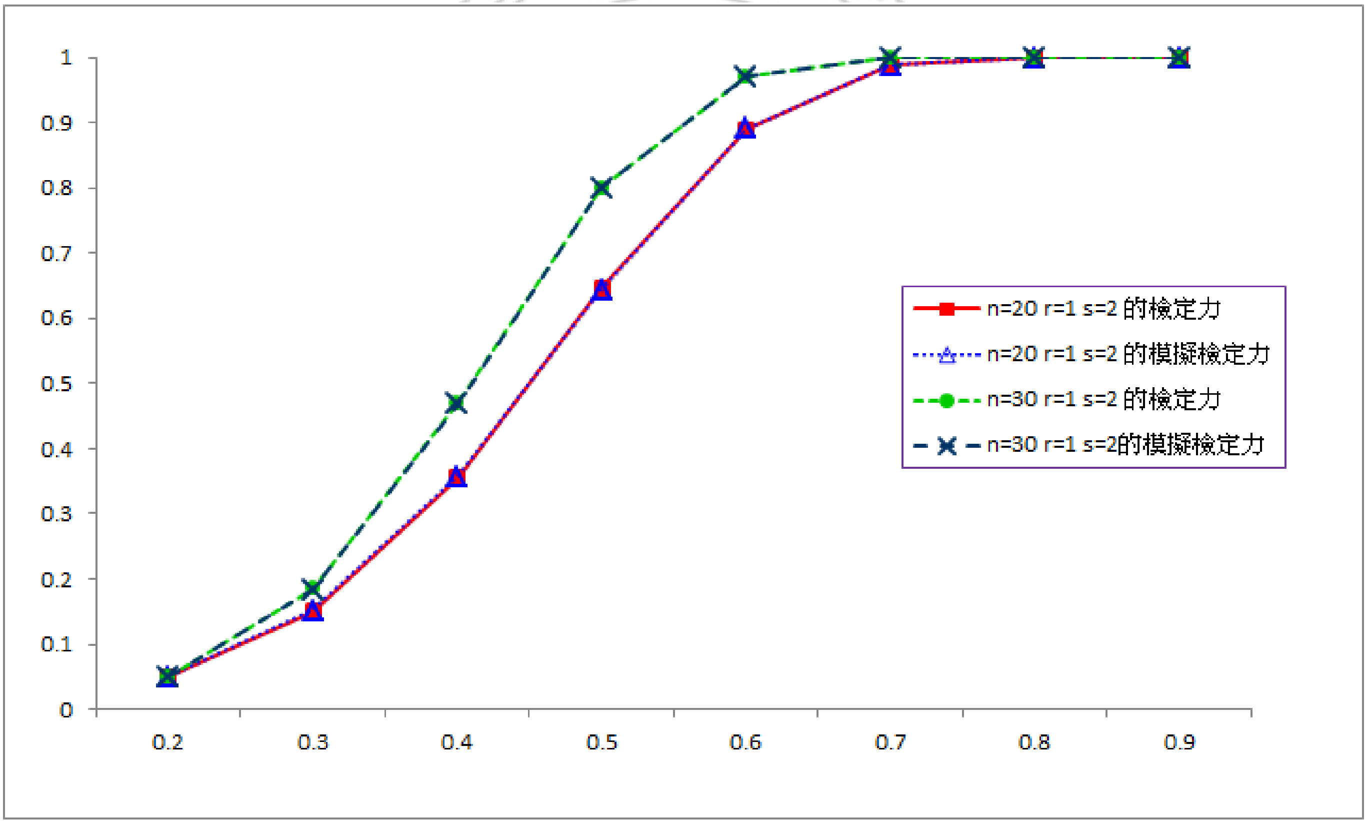

圖 2.11 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\hat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 2.17 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04939	4.36E-05	0.05000	0.05006	4.28E-05
0.3	0.14595	0.14518	1.02E-04	0.18146	0.17952	1.23E-04
0.4	0.34277	0.34376	1.94E-04	0.45938	0.45901	2.54E-04
0.5	0.62569	0.62757	2.65E-04	0.78856	0.78562	1.69E-04
0.6	0.87521	0.87487	7.80E-05	0.96691	0.96650	3.13E-05
0.7	0.98383	0.98398	1.31E-05	0.99893	0.99887	8.37E-07
0.8	0.99966	0.99961	4.01E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

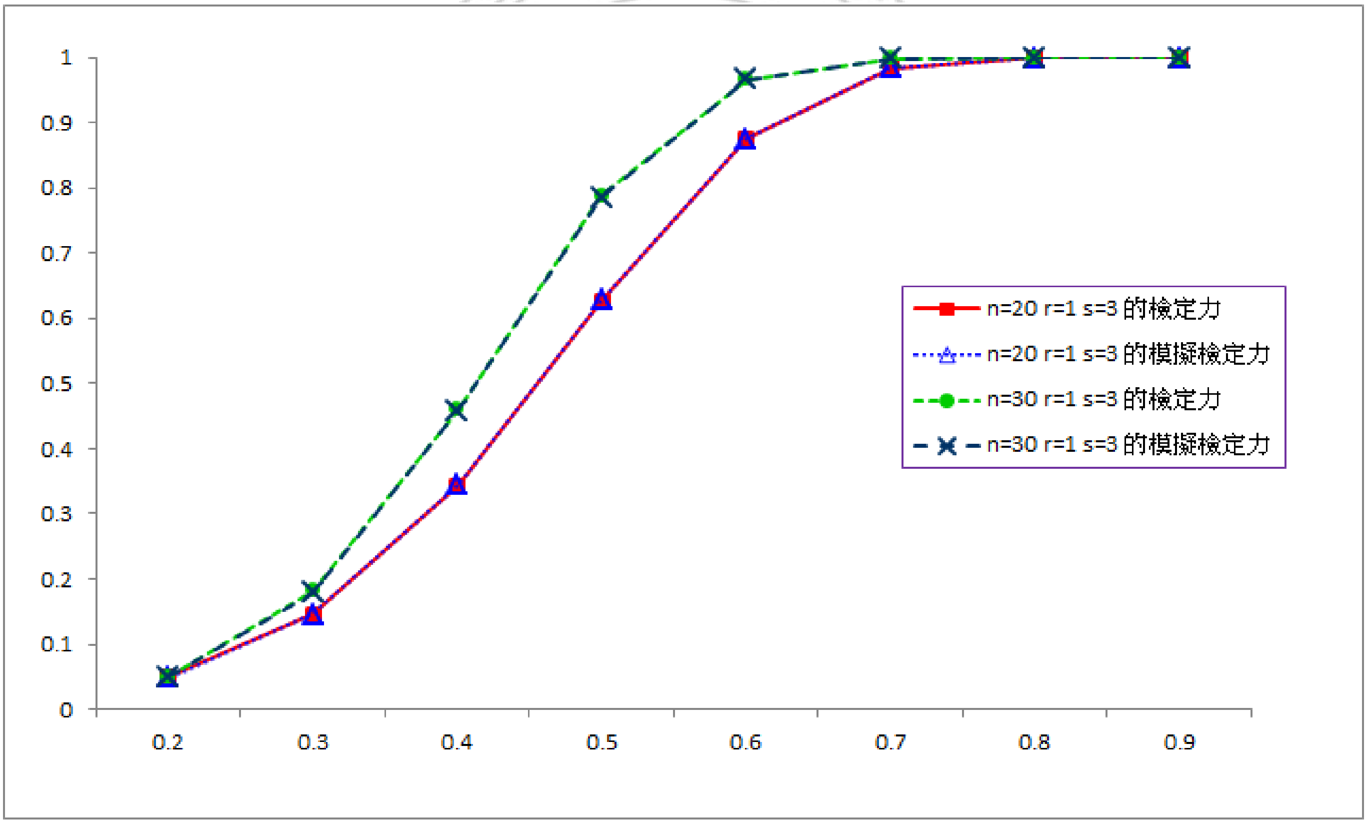

圖 2.12 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.18 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04979	5.00E-05	0.05000	0.05035	5.83E-05
0.3	0.14968	0.14990	1.36E-04	0.18483	0.18283	1.36E-04
0.4	0.35534	0.35638	2.59E-04	0.47001	0.46748	2.82E-04
0.5	0.64594	0.64693	2.33E-04	0.80064	0.80132	1.65E-04
0.6	0.89033	0.88986	1.05E-04	0.97113	0.97165	2.42E-05
0.7	0.98760	0.98787	1.23E-05	0.99919	0.99924	8.45E-07
0.8	0.99980	0.99983	1.62E-07	1.00000	1.00000	1.01E-12
0.9	1.00000	1.00000	6.67E-16	1.00000	1.00000	3.05E-25

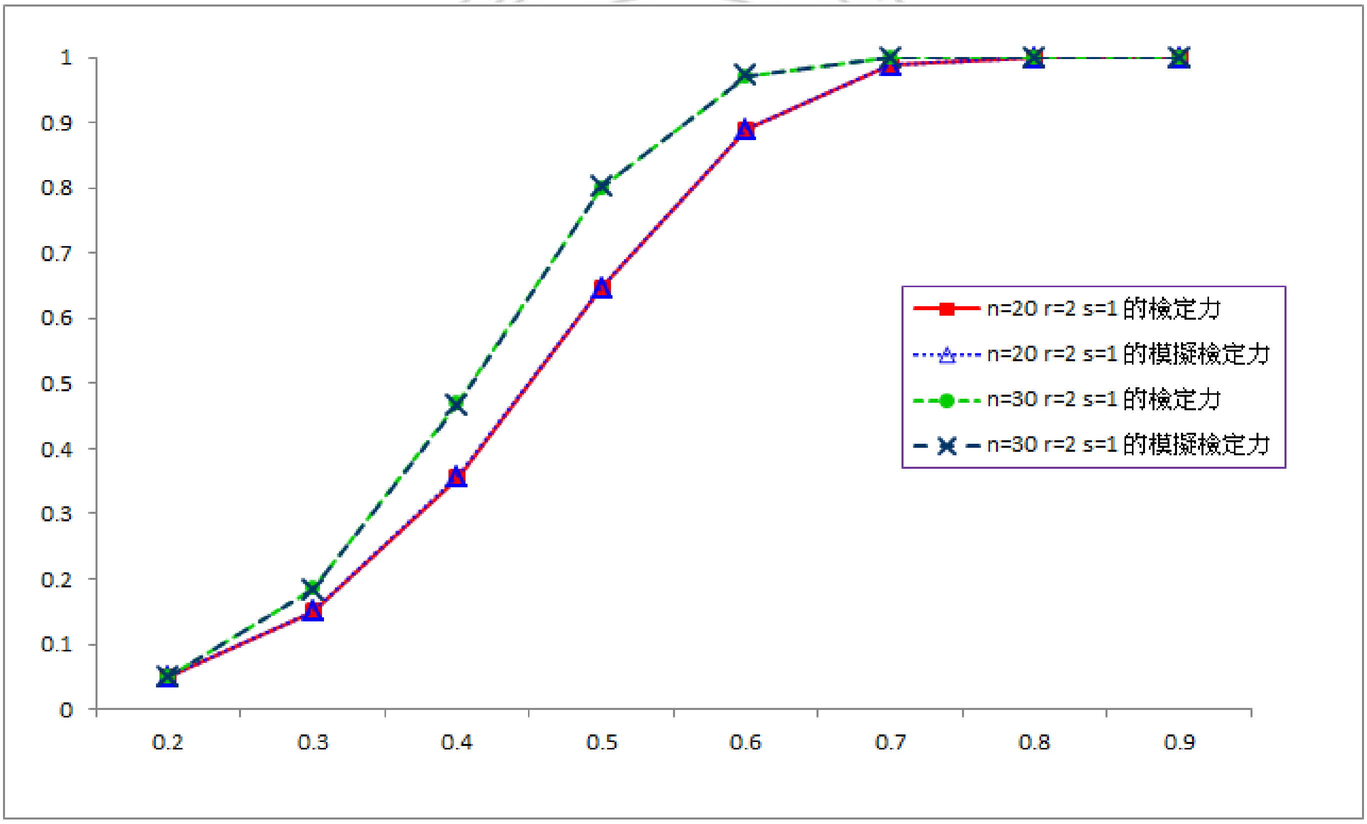

圖 2.13 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.19 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05068	4.24E-05	0.05000	0.04983	3.75E-05
0.3	0.14595	0.15161	1.21E-04	0.18146	0.18095	1.52E-04
0.4	0.34277	0.35762	2.41E-04	0.45938	0.45718	2.55E-04
0.5	0.62569	0.64416	2.10E-04	0.78856	0.78879	1.47E-04
0.6	0.87521	0.89090	1.09E-04	0.96691	0.96786	3.24E-05
0.7	0.98383	0.98766	1.33E-05	0.99893	0.99888	1.11E-06
0.8	0.99966	0.99987	2.78E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

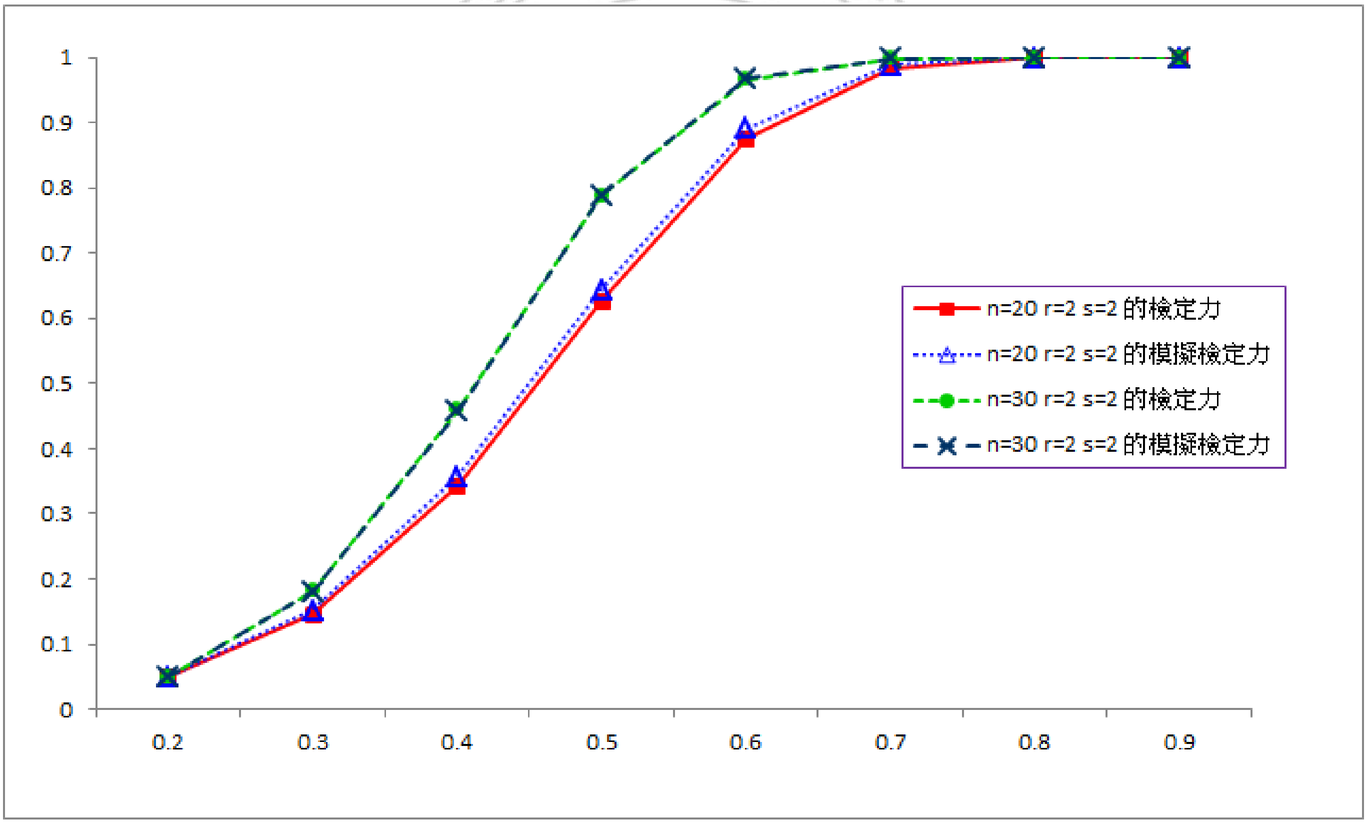

圖 2.14 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.20 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2, s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

c_1	n=20 r=2 s=3 $\alpha=0.01$ $P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	n=30 r=2 s=3 $\alpha=0.01$ $P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05007	5.01E-05	0.05000	0.05027	4.89E-05
0.3	0.14216	0.14277	1.05E-04	0.17806	0.17820	1.48E-04
0.4	0.32998	0.33037	2.76E-04	0.44858	0.44915	2.38E-04
0.5	0.60441	0.60460	2.35E-04	0.77581	0.77464	1.37E-04
0.6	0.85814	0.85728	1.11E-04	0.96209	0.96243	3.68E-05
0.7	0.97895	0.97779	2.08E-05	0.99859	0.99885	9.74E-07
0.8	0.99943	0.99941	6.42E-07	1.00000	1.00000	8.62E-12
0.9	1.00000	1.00000	4.61E-14	1.00000	1.00000	2.33E-23

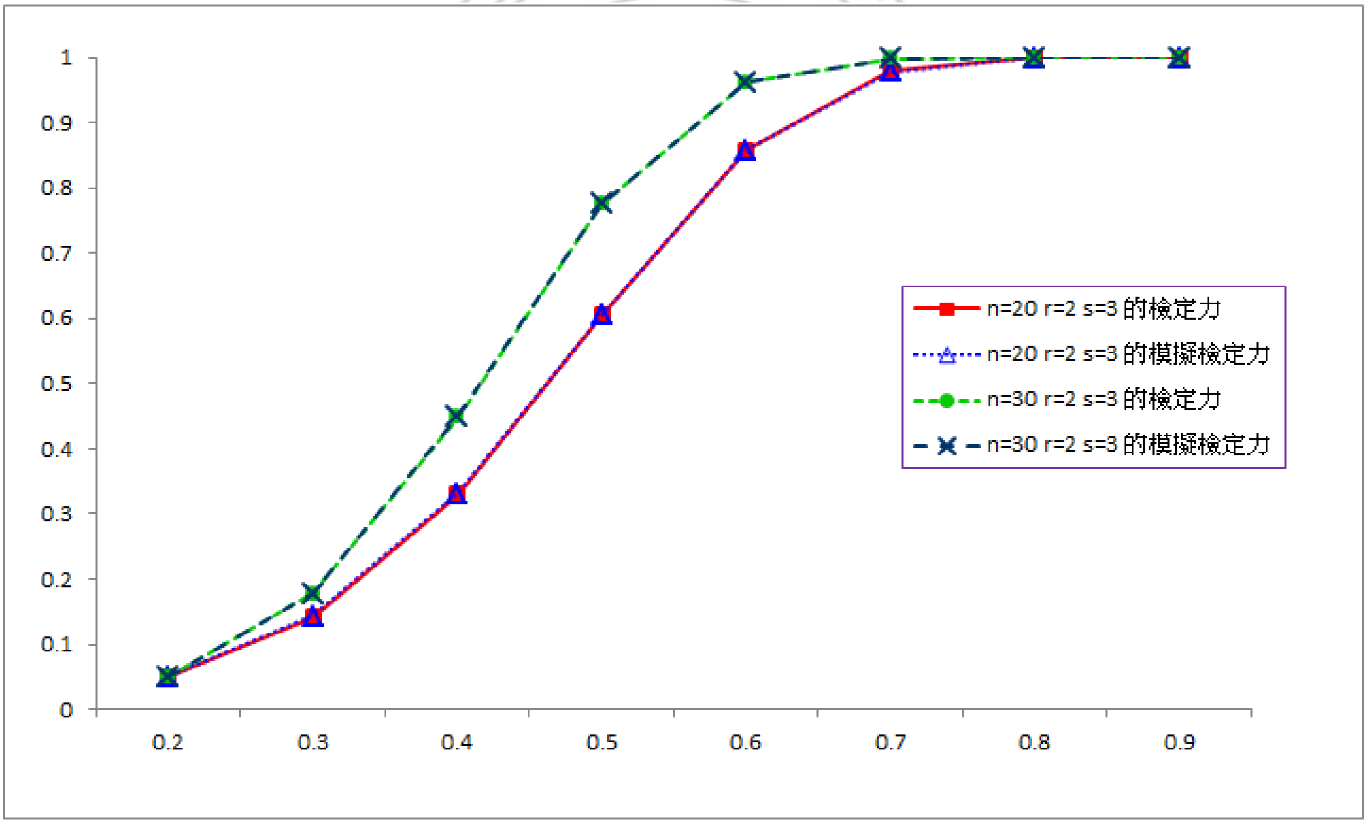

圖 2.15 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2, s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.21 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=3 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05004	2.71E-05	0.05000	0.05018	4.76E-05
0.3	0.14595	0.14482	1.22E-04	0.18146	0.18146	1.22E-04
0.4	0.34277	0.34151	2.26E-04	0.45938	0.45929	2.66E-04
0.5	0.62569	0.62569	2.62E-04	0.78856	0.78868	1.64E-04
0.6	0.87521	0.87466	9.37E-05	0.96691	0.96660	3.26E-05
0.7	0.98383	0.98362	1.42E-05	0.99893	0.99891	1.14E-06
0.8	0.99966	0.99953	4.86E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

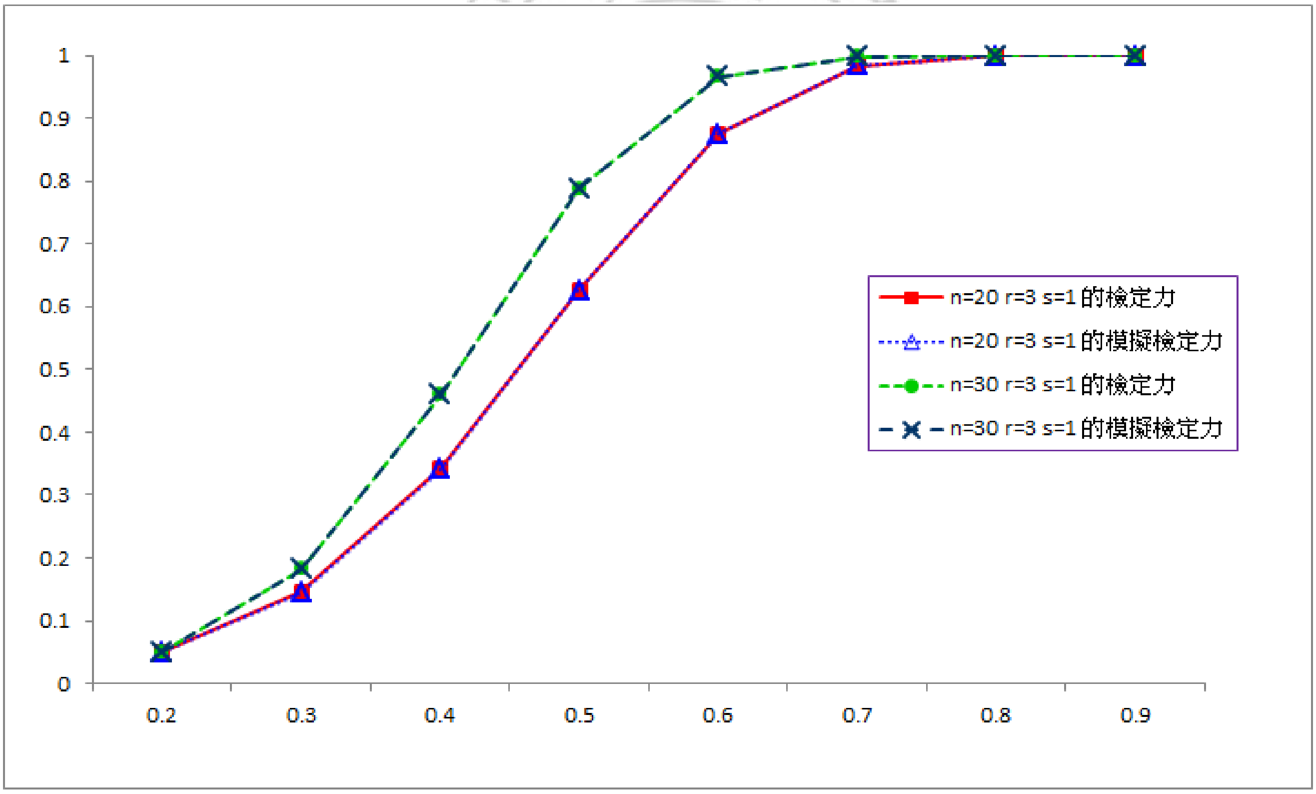

圖 2.16 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.22 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04909	4.03E-05	0.05000	0.05094	4.35E-05
0.3	0.14216	0.14190	8.44E-05	0.17806	0.17720	1.63E-04
0.4	0.32998	0.33055	2.18E-04	0.44858	0.44987	2.57E-04
0.5	0.60441	0.60457	2.85E-04	0.77581	0.77433	1.37E-04
0.6	0.85814	0.85957	1.05E-04	0.96209	0.96285	2.90E-05
0.7	0.97895	0.97844	1.82E-05	0.99859	0.99844	1.51E-06
0.8	0.99943	0.99942	5.84E-07	1.00000	0.99999	9.95E-09
0.9	1.00000	1.00000	4.61E-14	1.00000	1.00000	2.33E-23

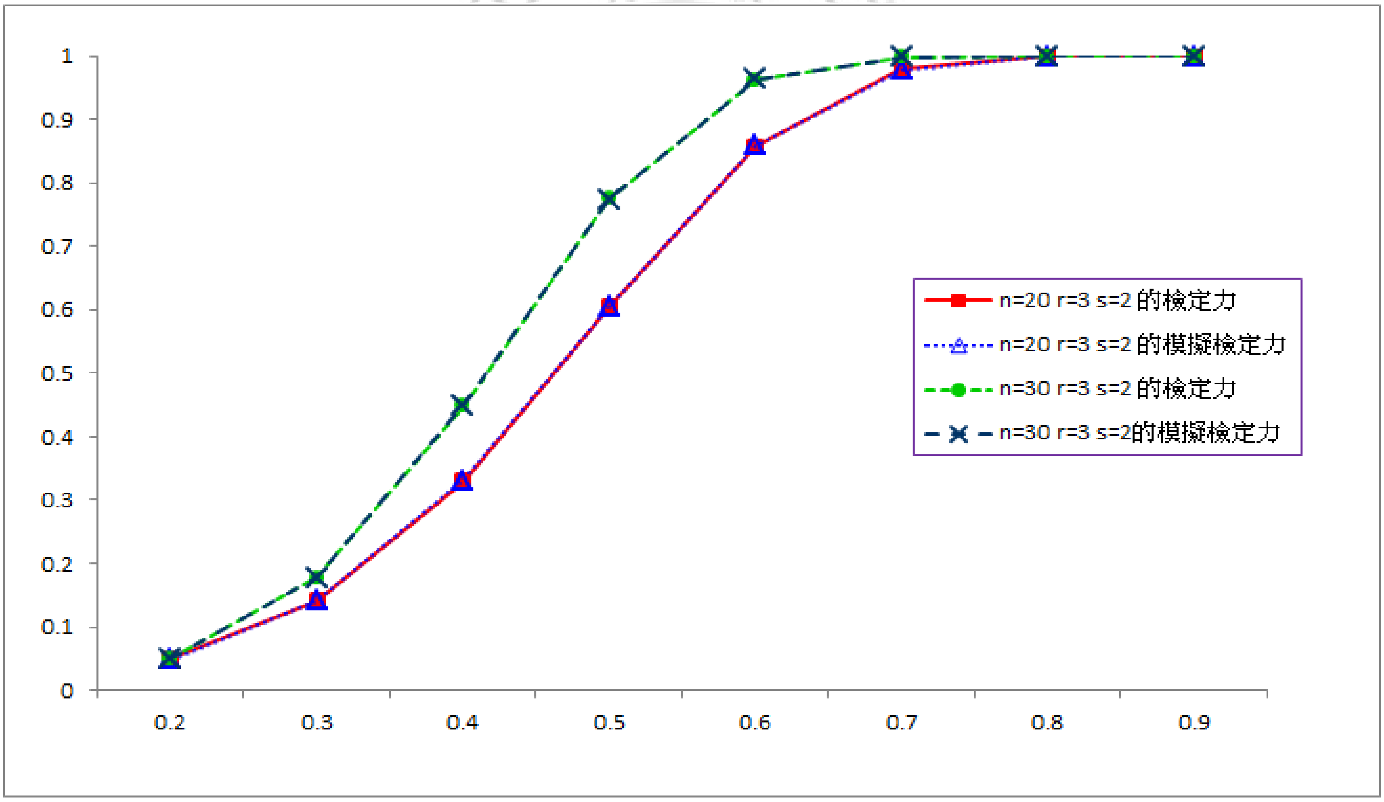

圖 2.17 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.23 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3, s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=3 $\alpha=0.01$			n=30 r=3 s=3 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04895	4.83E-05	0.05000	0.04985	5.98E-05
0.3	0.13832	0.13653	1.14E-04	0.17463	0.17465	1.75E-04
0.4	0.31695	0.31514	1.74E-04	0.43759	0.43798	2.10E-04
0.5	0.58207	0.58100	2.42E-04	0.76237	0.76174	1.96E-04
0.6	0.83889	0.83866	1.55E-04	0.95659	0.95612	3.90E-05
0.7	0.97264	0.97274	2.46E-05	0.99814	0.99808	1.50E-06
0.8	0.99905	0.99914	8.29E-07	0.99999	0.99999	9.92E-09
0.9	1.00000	1.00000	3.80E-13	1.00000	1.00000	2.03E-22

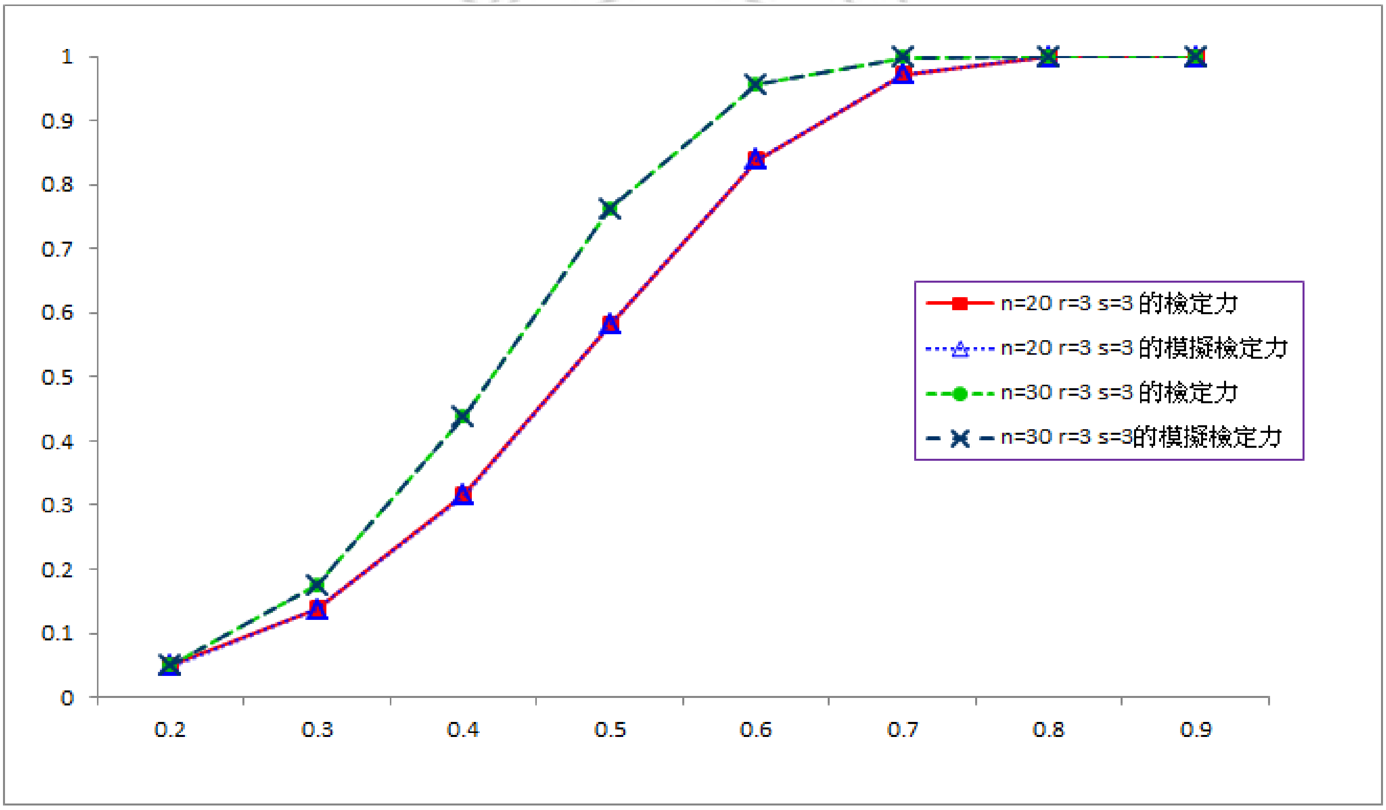

圖 2.18 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3, s=3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 2.24 在顯著水準$\alpha = 0.01$、參數值$c = 3$、目標值$C_L = 0.35$和規格下界$L = 1$下，壽命績效指標之信賴水準$(1 - \alpha)$模擬平均值與 SMSE。

	$\boldsymbol{\alpha = 0.01, c = 3}$	
(n, r, s)	$\overline{1 - \hat{\alpha}}$	SMSE
(20, 1, 1)	0.98983	9.63E-05
(20, 1, 2)	0.99018	9.78E-05
(20, 1, 3)	0.98988	1.02E-04
(20, 2, 1)	0.99082	1.00E-04
(20, 2, 2)	0.99007	9.75E-05
(20, 2, 3)	0.99007	9.95E-05
(20, 3, 1)	0.99030	1.02E-04
(20, 3, 2)	0.98929	9.99E-05
(20, 3, 3)	0.97701	4.03E-04
(30, 1, 1)	0.98983	1.04E-04
(30, 1, 2)	0.99032	9.00E-05
(30, 1, 3)	0.98978	9.48E-05
(30, 2, 1)	0.99040	9.40E-05
(30, 2, 2)	0.98988	1.07E-04
(30, 2, 3)	0.99090	1.02E-04
(30, 3, 1)	0.99023	9.87E-05
(30, 3, 2)	0.99004	9.36E-05
(30, 3, 3)	0.99016	9.82E-05

表 2.25 在顯著水準$\alpha = 0.05$、參數值$c = 3$、目標值$C_L = 0.35$和規格下界$L = 1$下，壽命績效指標之信賴水準$(1-\alpha)$模擬平均值與 SMSE。

	$\boldsymbol{\alpha = 0.05, c = 3}$	
(n, r, s)	$\overline{1-\hat{\alpha}}$	SMSE
(20, 1, 1)	0.95001	4.94E-04
(20, 1, 2)	0.95010	4.70E-04
(20, 1, 3)	0.94987	4.80E-04
(20, 2, 1)	0.95059	4.53E-04
(20, 2, 2)	0.94963	4.68E-04
(20, 2, 3)	0.95046	4.80E-04
(20, 3, 1)	0.94999	4.67E-04
(20, 3, 2)	0.94976	4.56E-04
(20, 3, 3)	0.95011	4.57E-04
(30, 1, 1)	0.95039	4.41E-04
(30, 1, 2)	0.94961	4.90E-04
(30, 1, 3)	0.94962	4.80E-04
(30, 2, 1)	0.94929	5.06E-04
(30, 2, 2)	0.94995	4.70E-04
(30, 2, 3)	0.94983	4.39E-04
(30, 3, 1)	0.94987	4.79E-04
(30, 3, 2)	0.94947	4.82E-04
(30, 3, 3)	0.94890	4.92E-04

表 2.26 參數c、$\hat{\theta}$及 SSE 的對應值

c	$\hat{\theta}$	SSE	c	$\hat{\theta}$	SSE
3.00	7.9307	0.23519	**3.50**	9.2456	0.23428
3.05	8.0621	0.23499	**3.55**	9.3772	0.23429
3.10	8.1934	0.23482	**3.60**	9.5088	0.23430
3.15	8.3248	0.23468	**3.65**	9.6405	0.23433
3.20	8.4563	0.23456	**3.70**	9.7722	0.23437
3.25	8.5878	0.23447	**3.75**	9.9039	0.23442
3.30	8.7193	0.23440	**3.80**	10.0356	0.23447
3.35	8.8508	0.23434	**3.85**	10.1674	0.23453
3.40	8.9824	0.23431	**3.90**	10.2991	0.23460
3.45	9.1139	0.23429	**3.95**	10.4309	0.23467

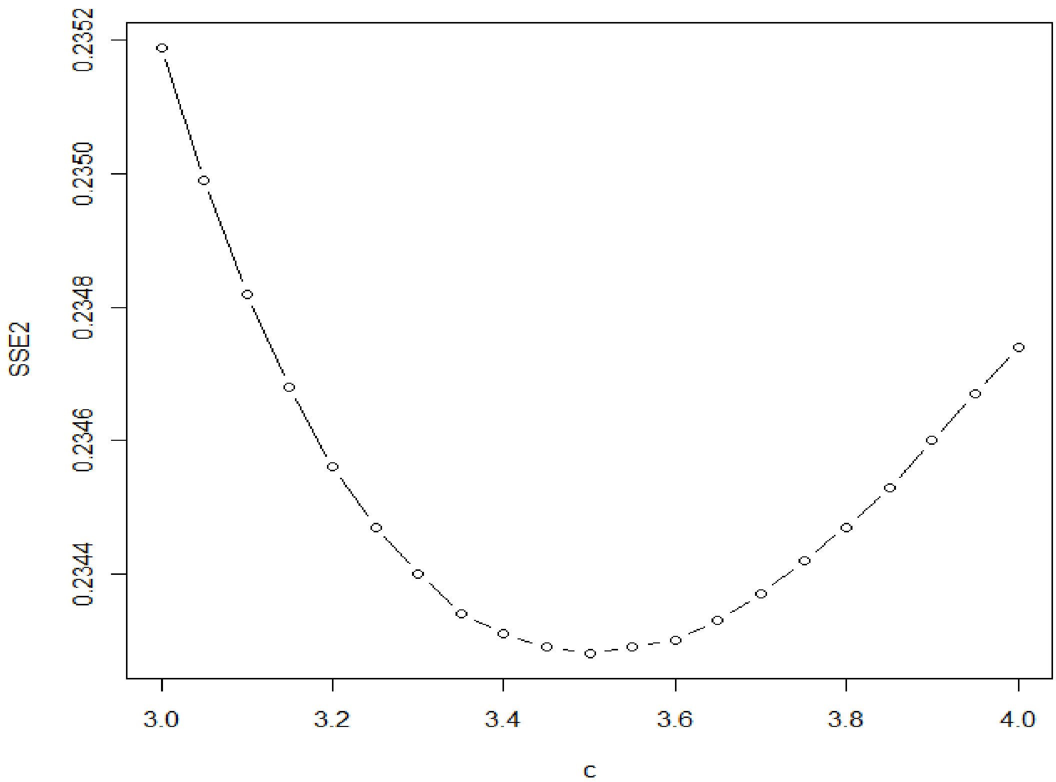

圖 2.19 c 與 SSE 的關係圖

附錄一. Burr XII 分配

$\boxed{\text{Pf:}}$ 證明$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \ldots\ldots, Z_{n-s}$ 為互相獨立且來自相同分配的單參數指數分配 Exp(k)

若設 $Y_{(i)} = \ln(1 + X_{(i)}{}^{c})$ ，c>0，經過變數變換，則 $Y_{(i)} \sim \mathrm{Exp}(k)$，

設 $Z_{r+1} = (n-r)Y_{(r+1)}$，

$Z_i = (n-i+1)(Y_{(i)} - Y_{(i-1)})$，i=r+2, ……n−s，其中$Y_{(i)}$，$i = r+1, \ldots\ldots n-s$，為$Y_i$之有序統計量。

$$
\text{設}\begin{cases}
z_{r+1} = (n-r)y_{(r+1)} \\
z_{r+2} = (n-r-1)\left(y_{(r+2)} - y_{(r+1)}\right) \\
z_{r+3} = (n-r-2)\left(y_{(r+3)} - y_{(r+2)}\right) \\
\qquad\vdots \\
z_{n-s} = (s+1)(y_{(n-s)} - y_{(n-s-1)})
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
y_{(r+1)} = \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
y_{(r+2)} = \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
y_{(r+3)} = \dfrac{1}{n-r-2} z_{r+3} + \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
\qquad\vdots \\
y_{(n-s)} = \dfrac{1}{s+1} z_{n-s} + \cdots + \dfrac{1}{n-r-2} z_{r+3} + \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow J = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{n-s}} \\
\dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{n-s}} \\
\dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{n-s}} \\
 & \vdots & & \\
\dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{n-s}}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{n-r} & 0 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & \dfrac{1}{n-r-2} & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
 & \vdots & \vdots & \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & \dfrac{1}{n-r-2} & \cdots\cdots\cdots \quad \dfrac{1}{s+1}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots\ldots(s+1)}
$$

則$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \ldots\ldots, Z_{n-s}$之聯合機率密度函數為

$h_{Z_{r+1},Z_{r+2},Z_{r+3},\ldots\ldots,Z_{n-s}}(z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3}, \ldots \ldots, \ z_{n-s})$

$= f_{Y_{(r+1)},Y_{(r+2)},Y_{(r+3)},\ldots\ldots,Y_{(n-s)}}\left(y_{(r+1)}, y_{(r+2)}, y_{(r+3)}, \ldots \ldots, y_{(n-s)}\right) \cdot$

$= e^{-k[\,Z_{r+1} + Z_{r+2} + Z_{r+3},\ldots\ldots + Z_{n-s}]\cdot k^{(n-s-r-1)}}$

$= ke^{-kZ_{r+1}} \cdot ke^{-kZ_{r+2}} \cdot ke^{-k\,Z_{r+3}} \ldots \ldots \cdot ke^{-kZ_{n-s}}$

$= \ h_{Z_{r+1}}(z_{r+1}) \cdot h_{Z_{r+2}}(\,z_{r+2}) \ \cdot \cdots \cdot h_{Z_{n-s}}(\ z_{n-s})$

⇒ 由上式可證得$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \ldots \ldots, \ Z_{n-s}$ 為互相獨立且來自相同分配的單參數指數分配 Exp(k)。

第三章 利用雙型二設限樣本評估具有極值分配之產品的壽命績效

本章節主要說明當產品之壽命服從極值分配時,使用雙型二設限樣本來評估其產品的壽命績效。3.1 節介紹產品的壽命績效指標與製程良率；3.2 節為在雙型二設限下，壽命績效指標的估計量；3.3 節為壽命績效指標的檢定程序；3.4 節為壽命績效指標的檢定立及其模擬值之比較；3.5 節為壽命績效指標的信賴區間；3.6 節為壽命績效指標之信賴水準的蒙地卡羅模擬程序；3.7 節為數值範例。

3.1 產品的壽命績效指標

假設產品之壽命 X 服從極值分配(Extreme Value distribution)，其機率密度函數(probability density function,p.d.f.)、累積分配函數(cumulative distribution function,c.d.f.)以及故障率函數(hazard function)分別如下:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} exp(\frac{x-\beta}{\theta} - exp(\frac{x-\beta}{\theta})) \tag{3.1}$$

$$F(x) = 1 - exp(-exp(\frac{x-\beta}{\theta})) \tag{3.2}$$

$$h(x) = \frac{1}{\theta} exp(\frac{x-\beta}{\theta}) \tag{3.3}$$

其中，$-\infty < x < \infty$ ，$-\infty < \beta < \infty$ ，$\theta > 0$。β為位置參數，θ為尺度參數。

藉由變數變換，令$Y = \frac{1}{\theta} e^{\frac{X-\beta}{\theta}}$，則Y會服從單參數指數分配，其機率密度函數(probability density function,p.d.f.)、累積分配函數(cumulative distribution function,c.d.f.)以及故障率函數(hazard function)分別為:

$$f_Y(y) = \theta e^{-\theta y}\text{ , } y > 0\text{ , } \theta > 0 \tag{3.4}$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\theta y}\text{ , } y > 0\text{ , } \theta > 0 \tag{3.5}$$

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{1 - F_Y(y)} = \theta\text{ , } y > 0\text{ , } \theta > 0 \tag{3.6}$$

透過變數變換所得到之產品的新壽命Y之平均數及標準差分別如下:

$$\mu = E(Y) = \frac{1}{\theta} \tag{3.7}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(Y)} = \frac{1}{\theta} \tag{3.8}$$

將(3.7)、(3.8)式依照第二章的做法代回(2.7)式，則壽命績效指標C_L可改寫成:

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma} = \frac{1/\theta - L}{1/\theta} = 1 - \theta L \tag{3.9}$$

當產品新壽命資料Y的平均數$\frac{1}{\theta} > L$時，壽命績效指標$C_L > 0$。由(3.9)式可以發現，當$\frac{1}{\theta}$越大，其故障率越小，壽命績效指標會越大。相反地，當$\frac{1}{\theta}$越小，其故障率會越大，壽命績效指標會越小。由此可知，壽命績效指標C_L能夠合理地代表產品的壽命績效。

3.2 壽命績效指標C_L的估計量

在產品的壽命試驗中，由於時間的限制以及其他(像是成本、物料來源、機器…等等)的限制，導致實驗者無法觀測到所有的產品壽命。因此，有許多研究是利用設限樣做探討。而在本章節為在雙型二設限樣本下做探討。

假設 $X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$為來自極值分配的一組雙型二設限樣本(即在樣本數為 n 之下，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$n-s-r$個樣本)，其聯合機率密度函數(p.d.f.)如下：

$$f_{X_{(r+1)},X_{(r+2)},\ldots,X_{(n-s)}}(x_{(r+1)},x_{(r+2)},\ldots,x_{(n-s)})$$

$$=\frac{n!}{r!s!}\left[F_X(x_{(r+1)})\right]^r \times \left[1-F_X(x_{(n-s)})\right]^s \times \prod_{i=r+1}^{n-s} f_X(x_{(i)})$$

$$=\frac{n!}{r!s!}\left[1-exp\left(-exp\left(\frac{x_{(r+1)}-\beta}{\theta}\right)\right)\right]^r \times \left\{1-\left[1-exp\left(-exp\left(\frac{x_{(n-s)}-\beta}{\theta}\right)\right)\right]\right\}^s$$

$$\times \sum_{i=r+1}^{n-s}\frac{1}{\theta}exp\left(\frac{x_{(i)}-\beta}{\theta}-exp\left(\frac{x_{(i)}-\beta}{\theta}\right)\right) \qquad (3.10)$$

若設 $Y_{(i)}=\frac{1}{\theta}e^{\frac{X_{(i)}-\beta}{\theta}}$，$-\infty<x<\infty$，$-\infty<\beta<\infty$，則 $Y_{(i)}$，$\mathrm{i}=r+1\ldots n-s$，為具有指數分配 Exp(θ)之有序統計量。

設 $Z_{r+1}=(n-r)Y_{(r+1)}$，

$Z_i=(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})$。

由 Bickel 與 Doksum(1977)(p.46)可證得$Z_{r+1},Z_{r+2},Z_{r+3},\ldots\ldots.,Z_{n-s}$為互相獨立且來自相同之單參數指數分配 Exp(θ)，由附錄二亦可得知。

若令 $W=\sum_{i=r+1}^{n-s}(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})$，則$W\sim Gamma(n-s-r,\theta)$，

且

$$2\theta W\sim\chi^2(2(n-r-s)) \qquad (3.11)$$

由此可知

$$E[2\theta W]=2(n-r-s)$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{W}{n-r-s}\right]=\pi \qquad (令\ \pi=\frac{1}{\theta})$$

所以，$\frac{W}{n-r-s}$為π的不偏估計量。因此，$\hat{\pi}$為

$$\hat{\pi}=\frac{1}{n-r-s}W \tag{3.12}$$

在給定規格下界 L 時，因為$C_L=1-\frac{L}{\pi}$，所以取C_L之估計量為$\widehat{C_L}=1-\frac{L}{\hat{\pi}}$，而$\widehat{C_L}$的期望值為:

$$E(\widehat{C_L})=E\left(1-\frac{L}{\hat{\pi}}\right)=1-L\times E\left(\frac{1}{\hat{\pi}}\right)$$

$$=1-L(n-s-r)\times\frac{2}{\pi}\times E\left(\frac{\pi}{2W}\right) \qquad (其中\frac{2W}{\pi}\sim\chi^2(2(n-r-s)))$$

$$=1-\left(\frac{n-s-r}{n-s-r-1}\right)\times\frac{L}{\pi} \tag{3.13}$$

由(3.13)式和(2.7)式可知 E($\widehat{C_L}$)≠ C_L，因此，$\widehat{C_L}$不是C_L的一個不偏估計量。而為求一個C_L的不偏估計量，將$\widehat{C_L}$調整為$\widehat{C_L'}$:

$$\widehat{C_L'}=1-\frac{L}{\hat{\pi}}\times\left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right)=1-\frac{L(n-s-r-1)}{W} \tag{3.14}$$

故$\widehat{C_L'}$會是C_L的一個不偏估計量。

3.3 壽命績效指標C_L的檢定程序

由於抽樣時會有抽樣誤差，且產品壽命績效指標C 的點估計並不能直接用來判斷產品的壽命是否符合要求。因此，在此節將建構一個統計檢定程序來評估壽命績效指標是否達到所要求之水準。

假設所要求的壽命績效指標值大於c^*，其中c^*為目標值(target value)，則可以建立$H_0: C_L \le c^*$(即壽命績效指標C_L未達所需求的水準)與$H_1: C_L > c^*$(即壽命績效指標C_L已達所需求的水準)之假設檢定程序。利用C_L之估計量$\widehat{C_L'}$作為檢定統計量，則拒絕域可以表示為$\left\{\widehat{C_L'} | \widehat{C_L'} > C_0\right\}$，其中$C_0$為臨界值。

而根據統計學中的顯著水準α，其為錯誤拒絕虛無假設(犯型Ⅰ誤差)的最大機率。所以在給定顯著水準α下，臨界值C_0可以被推導如下:

$$sup\ P(\widehat{C_L'} > C_0) = \alpha$$

$$P(\widehat{C_L'} > C_0 |\, C_L = c^*) = \alpha \text{，其中} \widehat{C_L'} = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} \text{，} C_L = 1 - \frac{L}{\pi}$$

$$\Rightarrow P(1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} > C_0 / 1 - \frac{L}{\pi} = c^*) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(w > \frac{L(n-s-r-1)}{1-C_0} | \frac{1}{\pi} = \frac{1-c^*}{L}) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(\frac{2w}{\pi} > \frac{2L(n-s-r-1)}{\pi(1-C_0)} | \frac{1}{\pi} = \frac{1-c^*}{L}) = \alpha$$

$$\Rightarrow\ P\left(\frac{2W}{\pi} > \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow\ P\left(\frac{2W}{\pi} \le \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)}\right) = 1-\alpha \quad \text{，其中}\ \frac{2W}{\pi} \sim \chi^2(2(n-r-s)) \qquad (3.15)$$

由(3.15)式可以得到$\frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{(1-C_0)} = \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$，其中$\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$表示自由

度為$2(\mathrm{n}-\mathrm{s}-\mathrm{r})$之卡方分配的下$(1-\alpha)$分位數(lower $(1-\alpha)$th quantile)。因此，可以得到臨界值C_0為

$$C_0 = 1-\frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} \tag{3.16}$$

其中c^*、α、r、s、n 分別表示目標值、顯著水準、左邊設限個數和右邊設限個數、樣本個數。表 3.1 與表 3.2 分別列出在$\alpha=0.01$和$\alpha=0.05$下，r=1(1)3、s=1(1)3、c^*=0.1(0.1)0.9、n=8 (1)20、$\mathrm{m}=\mathrm{n}-\mathrm{s}-\mathrm{r}$下的臨界值$C_0$。

而在(3.16)式中，當設限參數$\mathrm{r}=0$時，臨界值C_0為

$$C_0 = 1-\frac{2\times(n-s-1)\times(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s))} \tag{3.17}$$

，其對應的臨界值如表 3.3 和表 3.4 。

關於壽命績效指標C_L之檢定程序的步驟整理如下:

步驟一:

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，假設產品壽命 X 來自極值分配，其機率密度函數及累積分配函數同(3.1)式及(3.2)式，令$X_{(i)}$為服從極值分配的雙型二設限樣本，其中$\mathrm{i}=r+1,\ldots\ldots n-s$，$r,s\leq n$，則$F_X(X_{(i)})$的期望值(參考Wu et al. (2007))為：

$$E\left(F_X\left(X_{(i)}\right)\right)=\frac{i}{n+1}\ ,\mathrm{i}=r+1,\ldots\ldots n-s\ ,r,s\leq n \tag{3.18}$$

若以$\frac{i}{n+1}$代替$F_X(X_{(i)})$，即$\frac{i}{n+1}\approx 1-exp\left(-exp\left(\left(x_{(i)}-\beta\right)\pi\right)\right)$，將式子移項整理，兩邊同時取

對數，因此使用近似函數求解：

$$ln(1-\frac{i}{n+1}) \approx -e^{(x_{(i)}-\beta)\pi}\ ,\mathrm{i}=r+1,\ldots\ldots n-s \tag{3.19}$$

利用最小平方法，考慮位置參數β的各種給定值，使得誤差平方和(error sum of square, SSE)最小，即$min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[\,ln\,(-ln(1-\frac{i}{n+1}))-\pi(x_{(i)}-\beta)\right]^2\right\}$，以便求得最適合的β值，同時估計π值。

步驟二:

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，針對產品壽命 X 來自極值分配的雙型二設限樣本$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$(樣本大小為 n 的隨機樣本，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$\mathrm{n}-\mathrm{s}-\mathrm{r}$個觀測值)，利用資料轉換，令$Y_{(i)}=\frac{1}{\theta}e^{\frac{X_{(i)}-\beta}{\theta}}$，$\mathrm{i}=r+1,\ldots\ldots n-s$，則$Y_{(r+1)} < Y_{(r+2)} < \ldots < Y_{(n-s)}$為來自單參數指數分配的雙型二設限樣本。

步驟三:

決定產品壽命的規格下界 L、目標值c^*，以及給定顯著水準α，則可建構出$\mathrm{H_0}: \mathrm{C_L} \leq c^*$(表示壽命績效指標$\mathrm{C_L}$未達所需求的水準)與$\mathrm{H_1}: \mathrm{C_L} > c^*$(表示壽命績效指標$\mathrm{C_L}$已達所需求的水準)的檢定假設。

步驟四:

利用(3.12)式求得$\hat{\pi}$，然後將$\hat{\pi}$帶入(3.14)式，則可計算出檢定統計量的值:

$$\widehat{C_L'} = 1-\frac{L(n-s-r-1)}{\mathrm{W}}$$

步驟五:

根據給定的目標值c^*、樣本數 n、設限參數 r 和 s，以及顯著水準α，透過表 3.1 和表 3.2 即可得到相對應的臨界值C_0。

步驟六:

比較$\widehat{C_L'}$和C_0並做出結論。其決策的準則如下:

① 若$\widehat{C_L'} > C_0$，則拒絕H_0，表示該產品的壽命績效指標有達到廠商或顧客所需求的水準。

② 若$\widehat{C_L'} \le C_0$，則不拒絕H_0，表示該產品的壽命績效指標沒有達到廠商或顧客所需求的水準。

而當設限樣本數$r = 0$時，此為雙型二設限樣本的一個特例，則$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n-s)}$為一組具有極值分配的右型二設限樣本(樣本大小為 n 的隨機樣本中，指觀測到$n - s$個產品壽命)，我們可以根據 3.2 節的運算推導，求得其壽命績效指標之估計量和臨界值，也可按照 3.3 節壽命績效指標的檢定程序以檢定產品是否有達到所需求的水準。而$\widehat{C_L'}$的檢定力情形，將在 3.4.3 節中做討論。

3.4 壽命績效指標之檢定力及其模擬值之比較

3.4.1 壽命績效指標之檢定力函數

統計檢定的檢定力定義為正確拒絕虛無假設的機率。根據 3.3 節的假設檢定程序，欲檢定虛無假設$H_0\colon C_L \le c^*$和對立假設$H_1\colon C_L > c^*$，其統計檢定的檢定力函數推導如下:

給定樣本個數 n、設限樣本個數 r、s(r,s ≤n)以及顯著水準α，又拒絕域為$\{\widehat{C_L'} > C_0\}$，其中$C_0 = 1 - \frac{2\times(n-s-r-1)\times(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}$。當$C_L = c_1(> c^*)$，則壽命績效指標的檢定力 $P(c_1)$為:

$$P(c_1) = P(\widehat{C_L'} > C_0 \mid C_L = c_1)\text{，其中}\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W}\text{和}C_L = 1 - \frac{L}{\pi}$$

$$= P(1 - \frac{L(n-s-r-1)}{W} > 1 - \frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} / 1 - \frac{L}{\pi} = c_1)$$

$$= P(\frac{2(n-s-r-1)(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))} > \frac{L(n-s-r-1)}{W} \mid \frac{1}{\pi} = \frac{1-c_1}{L})$$

$$= P(2w > \frac{L\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{1-c^*} \mid \frac{1}{\pi} = \frac{1-c_1}{L})$$

$$= P\left(\frac{2W}{\pi} > \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))(1-c_1)}{1-c^*}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{2W}{\pi} \le \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))(1-c_1)}{1-c^*}\right), \text{其中 } \frac{2W}{\pi} \sim \chi^2(2(n-s-r)) \tag{3.20}$$

我們可以利用後面附註的表中查詢所對應的檢定力真值,至於分別求出的檢定力真值與模擬值之比較將會在 3.4.2 做討論。而當設限樣本數$r = 0$時，也可依據(3.20)式求其檢定力。

3.4.2 在設限條件下之檢定力的真值與模擬值之比較

根據 3.4.1 節所推導出的檢定力函數，本文利用蒙地卡羅(Monte Carlo)模擬方法計算壽命績效指標的檢定力，則檢定壽命績效指標的檢定力 P(c_1)模擬之步驟如下:

步驟一:

① 分別給定目標值c^*、c_1($c^* < c_1 < 1$)、位置參數β、下規格界限 L、顯著水準α、設限樣本數 r，s 以及樣本數 n。

② 參數值π可利用$C_L = 1 - \frac{L}{\pi} = c_1$得到，$C_L < 1$。

③ 利用電腦模擬生成 n 筆來自均勻分配U(0,1)之隨機樣本$U_1, U_2, \ldots, U_n$，經排序後得到其有序樣本$U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$。

④ 經由轉換$X_{(i)} = \left[\beta + \frac{1}{\pi} ln\left[-ln(1 - U_{(i)})\right]\ \right]$ ，$i = 1,2,\ldots,n$，則$\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$是來自於機率密度函數如(3.1)式的一組有序樣本。

⑤ 捨去排序後的前 r 項和後 s 項，，則可以得到有序的設限樣本為$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$ ，$r, s \le n$。經資料轉換後得到$Y_{(i)} = \frac{1}{\theta} e^{\frac{X_{(i)}-\beta}{\theta}}$，$i = r+1, r+2, \ldots n-s$。

⑥ 利用(3.12)式求出π之估計值 $\hat{\pi}$，再代入(3.14)式求出壽命績效指標C_L之不偏估計量:
$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\pi}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right)$ 。

⑦ 利用假設檢定，若$\widehat{C_L'} > C_0$，則紀錄 count=1；反之，則紀錄 count=0，其中，臨界值

$C_0 = 1 - \frac{2\times(n-s-1)\times(1-c^*)}{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}$ 。

步驟二:

① 將步驟一重複 1000 次。

② 可以得到一個 $P(c_1)$之檢定力模擬值為$\hat{P}(c_1) = \frac{Total\ count}{1000}$。

步驟三:

① 將步驟二重複 100 次，則可以得到 100 個檢定力模擬值為:

$\widehat{P_1}(c_1), \widehat{P_2}(c_1)$, $\cdots\widehat{P_{100}}(c_1)$。

② 由①步驟可以得到 100 個檢定力的模擬平均值為$\overline{\hat{P}(c_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{100}\hat{P}_i(c_i)}{100}$及其樣本均方誤差(SMSE)為: $SMSE = \frac{\sum_{i=1}^{100}[\hat{P}_i(c_i) - P(c_1)]^2}{100}$，其中 $P(c_1)$由(3.15)式求得。

依照上述步驟，在給定樣本數n為 20 與 30，目標值c^*=0.2、$c_1 = 0.2(0.1)0.9$、下規格界限 L=1、顯著水準$\alpha = 0.01$和$\alpha = 0.05$、設限樣本數(r,s)=(1,1)、(1,2)、(1,3)、(2,1)、(2,2)、(2,3)、(3,1)、(3,2)、(3,3)下，壽命績效指標的檢定力 $P(c_1)$結果呈現如表 3.5 至表 3.22 和圖 3.1 至圖 3.18 所示。

經由表 3.5 至表 3.22 及圖 3.1 至圖 3.18，可以發現：(1)在固定c_1和 n 下，其檢定力真實值 $P(c_1)$與模擬平均值$\overline{\mathrm{P}(c_1)}$會隨著設限樣本大小 r 或 s 任一的增加而減少；(2)對於任一給定之c_1值，其模擬平均值會很接近檢定力真實值，且其所有的樣本均方誤差 SMSE 都很小。

3.5 壽命績效指標的信賴區間

製造商或顧客除了可以用 3.4 節中所提出的壽命績效指標之檢定程序來判斷產品的壽命是否有達到所要求的水準外，亦可使用壽命績效指標的信賴區間作為評估的工具。

利用 3.2 節所推導出C_L之 估計量，$\widehat{C_L'}$，且假設所要求的產品壽命下規格界限 L 已知，在雙型二設限下，給定樣本數 n、設限樣本數 r、s(r,s≤ n)，則$\widehat{C_L'} = 1 - \frac{L}{\hat{\pi}} \times \left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right)$，且可由 3.3 節中得知$\frac{2W}{\pi} \sim \chi^2_{(2(n-s-r))}$。因此，在給定信賴水準為$1-\alpha$之下，壽命績效指標$C_L$之$100(1-\alpha)\%$的信賴區間滿足下列條件:

$$P\left(\frac{2W}{\pi} \le \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{\pi} \le \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{L}{\pi} \le \frac{L \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(1-\frac{L}{\pi} \ge 1-\frac{L \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2W}\right) = 1-\alpha \qquad \left(\because \frac{1}{\hat{\pi}} = \frac{n-s-r}{W}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(C_L \ge 1-\frac{(1-\widehat{C_L'}) \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}\right) = 1-\alpha \tag{3.21}$$

由(3.21)式可以得到C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界(Lower confidence bound)為:

$$\underline{LB} = 1-\frac{(1-\widehat{C_L'})\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)} \tag{3.22}$$

其中，$\widehat{C_L'}$、$\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))$、r 和 s 分別表示為$C_L$的不偏估計量、自由度為$2(n-s-r)$之卡方分配的下$(1-\alpha)$分位數和左、右設限樣本個數。因此可以得到$C_L$之$100(1-\alpha)\%$的信賴區間為:

$$C.I. = \left[1-\frac{(1-\widehat{C_L'}) \cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}, \infty\right) \tag{3.23}$$

關於壽命績效指標C_L之信賴區間的評估程序與步驟整理如下：

步驟一：

給定樣本個數 n 及設限參數 r 和 s，假設產品壽命 X 來自極值分配，其機率密度函數及累積分配函數同(3.1)式及(3.2)式，令$X_{(i)}$為服從極值分配的雙型二設限樣本，其中$i = r + 1, \ldots\ldots n - s$，$r, s \leq n$，則$F_X\left(X_{(i)}\right)$的期望值(參考Wu et al. (2007))為：

$$E\left(F_X\left(X_{(i)}\right)\right) = \frac{i}{n+1}, i = r + 1, \ldots\ldots n - s，r, s \leq n$$

若以$\frac{i}{n+1}$代替$F_X(X_{(i)})$，即$\frac{i}{n+1} \approx 1 - exp\left(-exp\left(\left(x_{(i)} - \beta\right)\pi\right)\right)$，將式子移項整理，兩邊同時取對數，因此使用近似函數求解：

$$ln(1 - \frac{i}{n+1}) \approx -e^{\left(x_{(i)} - \beta\right)\pi}, i = r + 1, \ldots\ldots n - s$$

利用最小平方法，考慮位置參數β的各種給定值，使得誤差平方和(error sum of square, SSE)最小，即$min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[ln\left(-ln(1 - \frac{i}{n+1})\right) - \pi(x_{(i)} - \beta)\right]^2\right\}$，以便求得最適合的β值，同時估計π值。

步驟二：

針對產品壽命 X 來自極值分配的雙型二設限樣本$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$(樣本大小為 n 的隨機樣本，左邊設限 r 個樣本，右邊設限 s 個樣本，只觀察到$n - s - r$個觀測值)，利用資料轉換，令$Y_{(i)} = \frac{1}{\theta}e^{\frac{X_{(i)} - \beta}{\theta}}$，$i = r + 1, \ldots\ldots n - s$，則$Y_{(r+1)} < Y_{(r+2)} < \cdots < Y_{(n-s)}$為來自單參數指數分配的雙型二設限樣本。

步驟三:

確定顧客對產品之製程良率P_r的要求,透過表 2.1 可以找到與製程良率P_r相對應之產品新壽命績效指標值,以建立目標值c^*,且決定產品新壽命的規格下界 L。

步驟四:

給定信賴水準$1-\alpha$。

步驟五:

利用(3.22)式,計算出C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界為:

$$\underline{LB}=1-\frac{(1-\widehat{C_L})\cdot\chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}$$

步驟六:

決策準則如下:

(3)若目標值$c^* \in$ C.I.,表示該產品的壽命績效指標沒有達到製造商或顧客所要求的水準。

(4)若目標值$c^* \notin$ C.I.,表示該產品的壽命績效指標有達到製造商或顧客所要求的水準。

另外,假設所要求的產品壽命下規格界限 L 已知,在右型二設限下$(r=0)$,給定樣本數 n、設限樣本數 $s(s\leq n)$,我們亦可根據前面(3.22)式求算壽命績效指標C_L之$100(1-\alpha)\%$的信賴下界,至於信賴區間的評估程序則依據上述的六步驟即可求得。

3.6 壽命績效指標之信賴水準的蒙地卡羅模擬程序

本節將根據壽命績效指標C_L之$100(1-\alpha)\%$單邊信賴區間,利用蒙地卡羅的模擬程序,模擬出其信賴水準$(1-\alpha)$。步驟如下:

步驟一:

① 分別給定C_L值、下規格界限 L、信賴水準$1-\alpha$、參數值β、設限樣本個數 r，s 以及樣本個數n。其中$C_L < 1$，r, s < n。

② 透過$C_L = 1 - \frac{L}{\pi}$，計算出參數值π。

③ 生成 n 筆來自均勻分配U(0,1)之隨機樣本$U_1, U_2, \dots, U_n$，經排序後得到其有序樣本 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$。

④ 經由轉換$X_{(i)} = \left[\beta + \frac{1}{\pi} ln\left[-ln(1-U_{(i)})\right]\ \right]$，$i = 1,2, \dots, n$，則$\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}\right)$是來自於機率密度函數如(3.1)式的一組有序樣本。

⑤ 捨去排序後的前 r 項和後 s 項，，則可以得到有序的設限樣本為$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(n-s)}$，r 和 s 皆≤n，$i = r+1, \dots \dots n-s$。

⑥ 計算 $\underline{LB}$=$1 - \frac{(1-\widehat{C_L'})\cdot \chi^2_{1-\alpha}(2(n-s-r))}{2(n-s-r-1)}$值，其中$\widehat{C_L'}$同(3.14)式。

⑦ 若$C_L \geq$ LB，則紀錄 count=1；反之，若$C_L <$ LB，則紀錄 count=0。

步驟二:

① 將步驟一重複 1000 次。

② 信賴水準$(1-\alpha)$的估計值為$(1-\hat{\alpha}) = \frac{Total\ count}{1000}$。

步驟三:

① 將步驟二重複 100 次，則可以得到 100 個信賴水準模擬值為:

$(1-\hat{\alpha})_1,\ (1-\hat{\alpha})_2\ , \cdots (1-\hat{\alpha})_{100}$。

② 由①步驟可以得到 100 個信賴水準模擬平均值為$\overline{1-\hat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^{100}(1-\hat{\alpha})_i}{100}$及其樣本均方誤差(SMSE)為: $SMSE = \frac{\sum_{i=1}^{100}[(1-\hat{\alpha})_i-(1-\alpha)]^2}{100}$。

依照上述步驟，在給定參數值$\pi = 3$與樣本數 n(n, r, s)=(20, 1, 1)、(20, 1, 2)、(20, 1, 3)、(20, 2, 1)、(20, 2, 2)、(20, 2, 3)、(20, 3, 1)、(20, 3, 2)、(20, 3, 3)、(30, 1, 1)、(30, 1, 2)、(30, 1, 3)、(30, 2, 1)、(30, 2, 2)、(30, 2, 3)、(30, 3, 1)、(30, 3, 2)、(30, 3, 3)以及下規格界限 L=1、顯著水準$\alpha = 0.01$和$\alpha = 0.05$下，壽命績效指標之信賴水準的結果呈現如表3.23 和表3.24所示。由表3.23和表 3.24 中可發現，不論(n, r, s)為多少，其信賴水準之模擬平均值$\overline{1-\hat{\alpha}}$都非常接近真實的信賴水準$(1-\alpha)$，並且所有的樣本均方誤差 SMSE 都很小，因此，由這些模擬研究的結果顯示此篇所提供的方法，是可以用來評估壽命績效指標是否達到顧客所要求的水準。

3.7 數值範例

假設欲購買產品之顧客希望產品之壽命合格率至少要達到 80%。在考慮雙型二設限樣本下，考慮一組來自具有參數$\beta = 3$與$\pi = 3$之型 I(極小值)極值分配且樣本大小為 15 的模擬資料，此 15 筆觀測值分別如下：

2.087130, 2.092034, 2.272042, 2.500391, 2.524006, 2.619046, 2.635245, 2.643926,
2.680236, 2.858504, 2.888160, 2.906782, 3.116158, 3.179643, 3.210229

我們給定設限參數$r = 2$，$s = 3$，即觀測值之樣本數為$n = 10$。根據上述資料，透過績效評估模式為此筆模擬值做壽命績效評估。

則壽命績效指標C_L之檢定評估程序與步驟如下：

步驟一：

假設 X 服從極值分配，其機率密度函數以及累積分配函數同(3.1)式及(3.2)式，令$x_{(i)}$為服從極值分配之雙型二設限樣本值，其中i=r+1,…,n-s，$r, s < n$，由 3.3 節所提及之檢定程序，利用最

小平方法，考慮位置參數β的各種給定值，使得誤差平方和(Error Sum of Square , SSE)最小，即 $min\left\{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left[\,ln\left(-ln(1-\frac{i}{n+1})\right)-\pi(x_{(i)}-\beta)\right]^2\right\}$，以便求得最適合的β值，同時估計π值。參數β的各種給定值以及參數π的估計值與誤差平方和的關係，呈現在表 3.25 與圖 3.19。由表 3.25 和圖 3.19 可以看出，當$\beta = 2.9$時，誤差平方和最小，且$\hat{\pi} = 4.2269$。

步驟二:

為了達成 80%的合格率，由表 2.1 可以知道我們的壽命績效指標C_L必須達到 0.80，才會滿足此產品的需求，即壽命績效指標的目標值設為c^*設為 0.8，且假設此產品的最低容忍規格下界$\mathrm{L} = 0.0473$，因此可達建構出虛無假設及對立假設如下：

$$\begin{cases} H_0: C_L \le 0.8 \\ H_0: C_L > 0.8 \end{cases}$$

步驟三:

給定顯著水準$\alpha = 0.05$。

步驟四:

計算檢定統計量值：

$$\widehat{C_L'} = 1-\frac{L}{\hat{\pi}}\times\left(\frac{n-s-r-1}{n-s-r}\right) = 1-\frac{L(n-s-r-1)}{\sum_{i=r+1}^{n-s}(n-i+1)(Y_{(i)}-Y_{(i-1)})}$$

$$= 1-\frac{0.0473\times(15-3-2-1)}{27.61325} = 0.98458$$

且根據$c^* = 0.8$、$\mathrm{r} = 2$、$\mathrm{s} = 3$、$\mathrm{n} = 15$及顯著水準$\alpha = 0.05$，則可由表 3.3 查到臨界值為C_0 =0.9125。

步驟五:

因為$\widehat{C_L'} = 0.98453 > C_0$ =0.9125，所以拒絕虛無假設$H_0: C_L \le 0.8$，即可判定產品的壽命績效有達到我們所要求的水準。

表 3.1 顯著水準$\alpha = 0.01$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 1(1)3$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有極值分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
2	0.8644	0.8795	0.8946	0.9096	0.9247	0.9397	0.9548	0.9699	0.9849
3	0.7859	0.8097	0.8335	0.8572	0.8810	0.9048	0.9286	0.9524	0.9762
4	0.7312	0.7611	0.7909	0.8208	0.8507	0.8805	0.9104	0.9403	0.9701
5	0.6898	0.7242	0.7587	0.7932	0.8277	0.8621	0.8966	0.9311	0.9655
6	0.6567	0.6949	0.7330	0.7711	0.8093	0.8474	0.8856	0.9237	0.9619
7	0.6294	0.6706	0.7117	0.7529	0.7941	0.8353	0.8765	0.9176	0.9588
8	0.6062	0.6500	0.6937	0.7375	0.7812	0.8250	0.8687	0.9125	0.9562
9	0.5863	0.6322	0.6782	0.7242	0.7701	0.8161	0.8621	0.9081	0.9540
10	0.5688	0.6167	0.6646	0.7125	0.7604	0.8083	0.8563	0.9042	0.9521
11	0.5532	0.6029	0.6525	0.7022	0.7518	0.8014	0.8511	0.9007	0.9504
12	0.5393	0.5905	0.6417	0.6929	0.7441	0.7953	0.8464	0.8976	0.9488
13	0.5267	0.5793	0.6319	0.6845	0.7371	0.7897	0.8422	0.8948	0.9474
14	0.5153	0.5692	0.6230	0.6769	0.7307	0.7846	0.8384	0.8923	0.9461
15	0.5048	0.5599	0.6149	0.6699	0.7249	0.7799	0.8349	0.8900	0.9450
16	0.4952	0.5513	0.6074	0.6635	0.7196	0.7756	0.8317	0.8878	0.9439
17	0.4863	0.5434	0.6004	0.6575	0.7146	0.7717	0.8288	0.8858	0.9429
18	0.4780	0.5360	0.5940	0.6520	0.7100	0.7680	0.8260	0.8840	0.9420

表 3.2 顯著水準$\alpha = 0.05$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 1(1)3$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有極值分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
2	0.8103	0.8314	0.8524	0.8735	0.8946	0.9157	0.9368	0.9578	0.9789
3	0.7141	0.7459	0.7776	0.8094	0.8412	0.8729	0.9047	0.9365	0.9682
4	0.6518	0.6905	0.7292	0.7679	0.8065	0.8452	0.8839	0.9226	0.9613
5	0.6067	0.6504	0.6941	0.7378	0.7815	0.8252	0.8689	0.9126	0.9563
6	0.5720	0.6195	0.6671	0.7146	0.7622	0.8098	0.8573	0.9049	0.9524
7	0.5440	0.5947	0.6453	0.6960	0.7467	0.7973	0.8480	0.8987	0.9493
8	0.5208	0.5741	0.6273	0.6806	0.7338	0.7870	0.8403	0.8935	0.9468
9	0.5012	0.5566	0.6120	0.6675	0.7229	0.7783	0.8337	0.8892	0.9446
10	0.4842	0.5416	0.5989	0.6562	0.7135	0.7708	0.8281	0.8854	0.9427
11	0.4694	0.5284	0.5873	0.6463	0.7052	0.7642	0.8231	0.8821	0.9410
12	0.4563	0.5167	0.5771	0.6375	0.6979	0.7583	0.8188	0.8792	0.9396
13	0.4445	0.5062	0.5680	0.6297	0.6914	0.7531	0.8148	0.8766	0.9383
14	0.4339	0.4968	0.5597	0.6226	0.6855	0.7484	0.8113	0.8742	0.9371
15	0.4243	0.4883	0.5522	0.6162	0.6802	0.7441	0.8081	0.8721	0.9360
16	0.4155	0.4805	0.5454	0.6103	0.6753	0.7402	0.8052	0.8701	0.9351
17	0.4074	0.4733	0.5391	0.6050	0.6708	0.7366	0.8025	0.8683	0.9342
18	0.4000	0.8314	0.5333	0.6000	0.6667	0.7333	0.8000	0.8667	0.9333

表 3.3 顯著水準$\alpha = 0.01$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 0$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有極值分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
5	0.6898	0.7242	0.7587	0.7932	0.8277	0.8621	0.8966	0.9311	0.9655
6	0.6567	0.6949	0.7330	0.7711	0.8093	0.8474	0.8856	0.9237	0.9619
7	0.6294	0.6706	0.7117	0.7529	0.7941	0.8353	0.8765	0.9176	0.9588
8	0.6062	0.6500	0.6937	0.7375	0.7812	0.8250	0.8687	0.9125	0.9562
9	0.5863	0.6322	0.6782	0.7242	0.7701	0.8161	0.8621	0.9081	0.9540
10	0.5688	0.6167	0.6646	0.7125	0.7604	0.8083	0.8563	0.9042	0.9521
11	0.5532	0.6029	0.6525	0.7022	0.7518	0.8014	0.8511	0.9007	0.9504
12	0.5393	0.5905	0.6417	0.6929	0.7441	0.7953	0.8464	0.8976	0.9488
13	0.5267	0.5793	0.6319	0.6845	0.7371	0.7897	0.8422	0.8948	0.9474
14	0.5153	0.5692	0.6230	0.6769	0.7307	0.7846	0.8384	0.8923	0.9461
15	0.5048	0.5599	0.6149	0.6699	0.7249	0.7799	0.8349	0.8900	0.9450
16	0.4952	0.5513	0.6074	0.6635	0.7196	0.7756	0.8317	0.8878	0.9439
17	0.4863	0.5434	0.6004	0.6575	0.7146	0.7717	0.8288	0.8858	0.9429
18	0.4780	0.5360	0.5940	0.6520	0.7100	0.7680	0.8260	0.8840	0.9420
19	0.4703	0.5291	0.5880	0.6468	0.7057	0.7646	0.8234	0.8823	0.9411

表 3.4 顯著水準$\alpha = 0.05$與壽命指標值$C_L = c^* = 0.1(0.1)0.9$在設限參數$r = 0$，$s = 1(1)3$，$n = 8(1)20$，$m = n - s - r$下，具有極值分配之產品壽命績效指標的臨界值C_0。

m	c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	c=0.5	c=0.6	c=0.7	c=0.8	c=0.9
5	0.6067	0.6504	0.6941	0.7378	0.7815	0.8252	0.8689	0.9126	0.9563
6	0.5720	0.6195	0.6671	0.7146	0.7622	0.8098	0.8573	0.9049	0.9524
7	0.5440	0.5947	0.6453	0.6960	0.7467	0.7973	0.8480	0.8987	0.9493
8	0.5208	0.5741	0.6273	0.6806	0.7338	0.7870	0.8403	0.8935	0.9468
9	0.5012	0.5566	0.6120	0.6675	0.7229	0.7783	0.8337	0.8892	0.9446
10	0.4842	0.5416	0.5989	0.6562	0.7135	0.7708	0.8281	0.8854	0.9427
11	0.4694	0.5284	0.5873	0.6463	0.7052	0.7642	0.8231	0.8821	0.9410
12	0.4563	0.5167	0.5771	0.6375	0.6979	0.7583	0.8188	0.8792	0.9396
13	0.4445	0.5062	0.5680	0.6297	0.6914	0.7531	0.8148	0.8766	0.9383
14	0.4339	0.4968	0.5597	0.6226	0.6855	0.7484	0.8113	0.8742	0.9371
15	0.4243	0.4883	0.5522	0.6162	0.6802	0.7441	0.8081	0.8721	0.9360
16	0.4155	0.4805	0.5454	0.6103	0.6753	0.7402	0.8052	0.8701	0.9351
17	0.4074	0.4733	0.5391	0.6050	0.6708	0.7366	0.8025	0.8683	0.9342
18	0.4000	0.4667	0.5333	0.6000	0.6667	0.7333	0.8000	0.8667	0.9333
19	0.3931	0.4605	0.5279	0.5954	0.6628	0.7303	0.7977	0.8651	0.9326

表 3.5 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=1 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01017	8.99E-06	0.01000	0.01017	9.21E-06
0.3	0.04724	0.04816	4.65E-05	0.06238	0.06131	6.42E-05
0.4	0.16992	0.17193	1.31E-04	0.25263	0.25243	1.54E-04
0.5	0.43912	0.44114	2.97E-04	0.61963	0.61808	2.26E-04
0.6	0.77740	0.77829	1.85E-04	0.92163	0.92224	8.18E-05
0.7	0.96802	0.96783	3.16E-05	0.99691	0.99714	2.61E-06
0.8	0.99939	0.99930	6.58E-07	1.00000	1.00000	2.45E-11
0.9	1.00000	1.00000	4.90E-15	1.00000	1.00000	7.19E-24

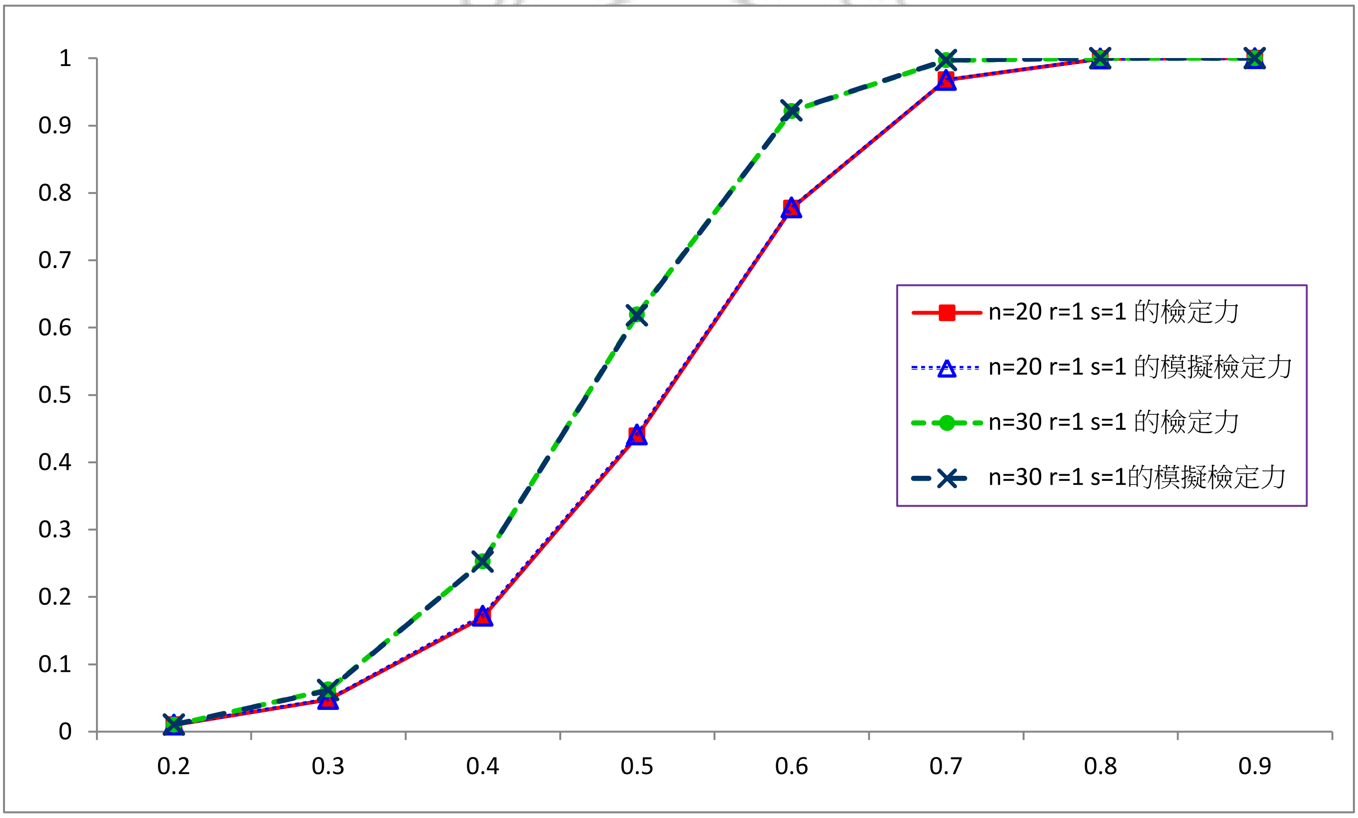

圖 3.1 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 3.6 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00982	9.82E-06	0.01000	0.00968	8.12E-06
0.3	0.04572	0.04589	3.60E-05	0.06086	0.06123	5.18E-05
0.4	0.16174	0.16431	1.27E-04	0.24434	0.24357	1.82E-04
0.5	0.41864	0.42220	2.22E-04	0.60370	0.60246	2.67E-04
0.6	0.75460	0.75519	1.34E-04	0.91258	0.91208	1.04E-04
0.7	0.96006	0.95994	3.27E-05	0.99607	0.99584	5.07E-06
0.8	0.99903	0.99904	1.12E-06	0.99999	1.00000	6.56E-11
0.9	1.00000	1.00000	3.58E-14	1.00000	1.00000	5.66E-23

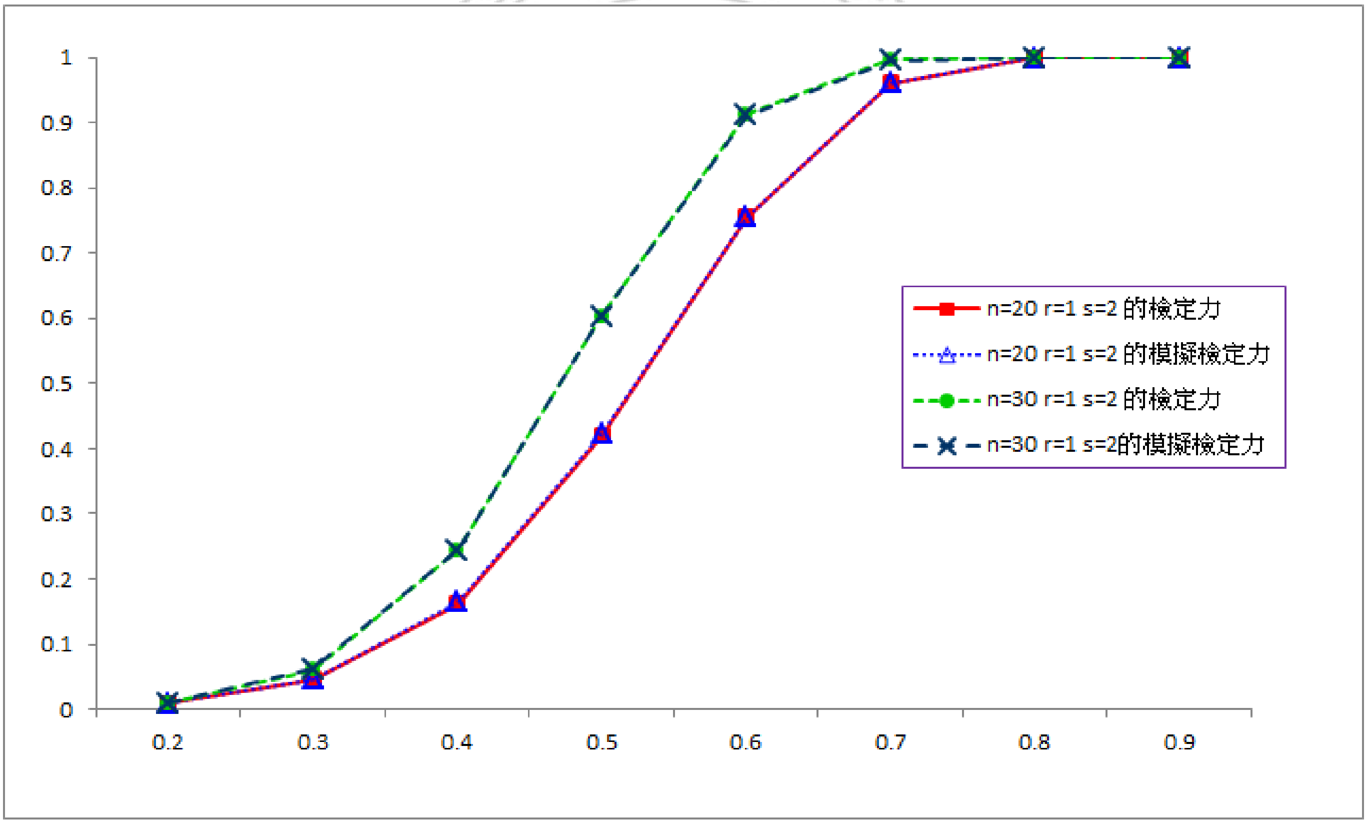

圖 3.2 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.7 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01012	8.20E-06	0.01000	0.01022	1.11E-05
0.3	0.04419	0.04375	4.26E-05	0.05935	0.05989	4.59E-05
0.4	0.15358	0.15349	1.34E-04	0.23604	0.23607	1.54E-04
0.5	0.39776	0.40054	1.93E-04	0.58728	0.58722	2.21E-04
0.6	0.72986	0.73100	2.03E-04	0.90258	0.90208	8.44E-05
0.7	0.95026	0.94978	4.37E-05	0.99500	0.99473	4.69E-06
0.8	0.99846	0.99836	1.30E-06	0.99999	1.00000	1.75E-10
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

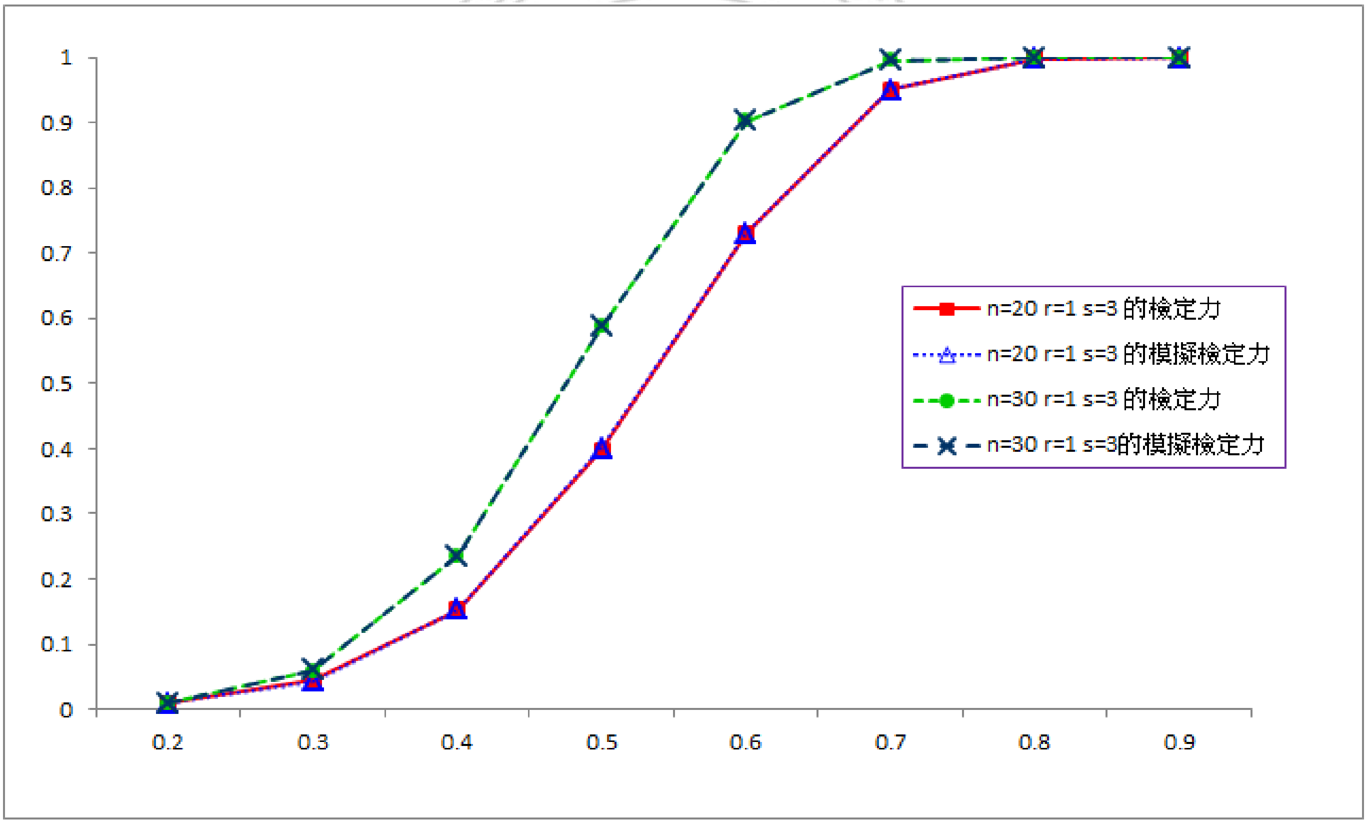

圖 3.3 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.8 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=2,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=2 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00918	8.32E-06	0.01000	0.00960	8.72E-06
0.3	0.04572	0.04444	5.06E-05	0.06086	0.06102	5.32E-05
0.4	0.16174	0.16103	1.46E-04	0.24434	0.24562	1.33E-04
0.5	0.41864	0.41720	2.51E-04	0.60370	0.60398	1.90E-04
0.6	0.75460	0.75285	2.16E-04	0.91258	0.91248	1.06E-04
0.7	0.96006	0.95937	3.65E-05	0.99607	0.99610	3.85E-06
0.8	0.99903	0.99919	6.39E-07	0.99999	1.00000	6.56E-11
0.9	1.00000	1.00000	3.58E-14	1.00000	1.00000	5.66E-23

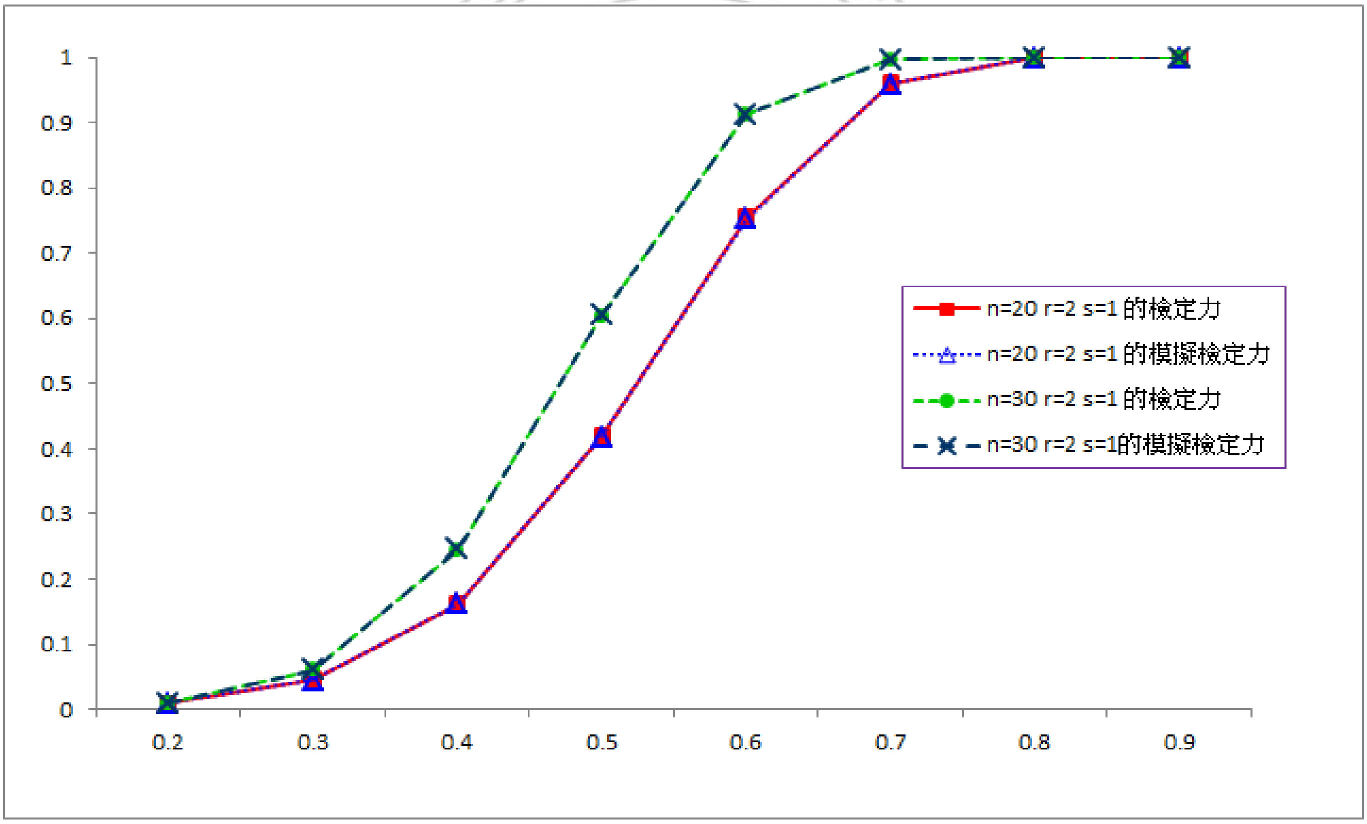

圖 3.4 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=2,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.9 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00993	8.13E-06	0.01000	0.01012	1.13E-05
0.3	0.04419	0.04474	4.86E-05	0.05935	0.05838	4.78E-05
0.4	0.15358	0.15405	1.29E-04	0.23604	0.23214	1.99E-04
0.5	0.39776	0.39849	2.22E-04	0.58728	0.58415	2.18E-04
0.6	0.72986	0.72942	1.69E-04	0.90258	0.90216	1.03E-04
0.7	0.95026	0.94992	4.32E-05	0.99500	0.99473	6.17E-06
0.8	0.99846	0.99859	1.62E-06	0.99999	0.99999	9.91E-09
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

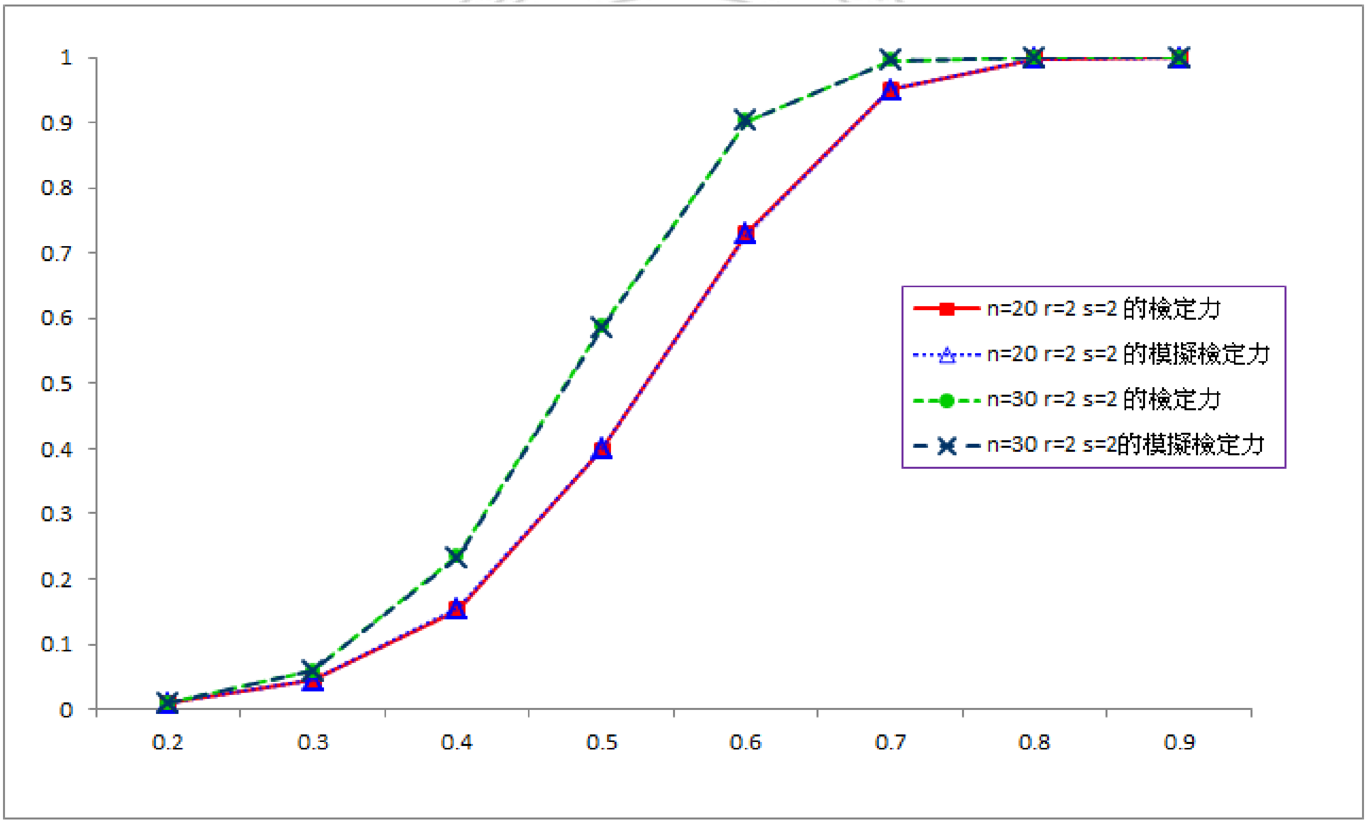

圖 3.5 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.10 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00993	1.21E-05	0.01000	0.00910	9.68E-06
0.3	0.04266	0.04179	3.86E-05	0.05783	0.05596	4.98E-05
0.4	0.14546	0.14344	1.28E-04	0.22774	0.22565	1.88E-04
0.5	0.37653	0.37577	2.40E-04	0.57038	0.57036	2.01E-04
0.6	0.70308	0.70326	2.14E-04	0.89154	0.89014	9.18E-05
0.7	0.93822	0.93862	5.98E-05	0.99365	0.99395	5.62E-06
0.8	0.99757	0.99737	3.19E-06	0.99998	0.99998	1.96E-08
0.9	1.00000	0.99999	9.97E-09	1.00000	1.00000	3.45E-21

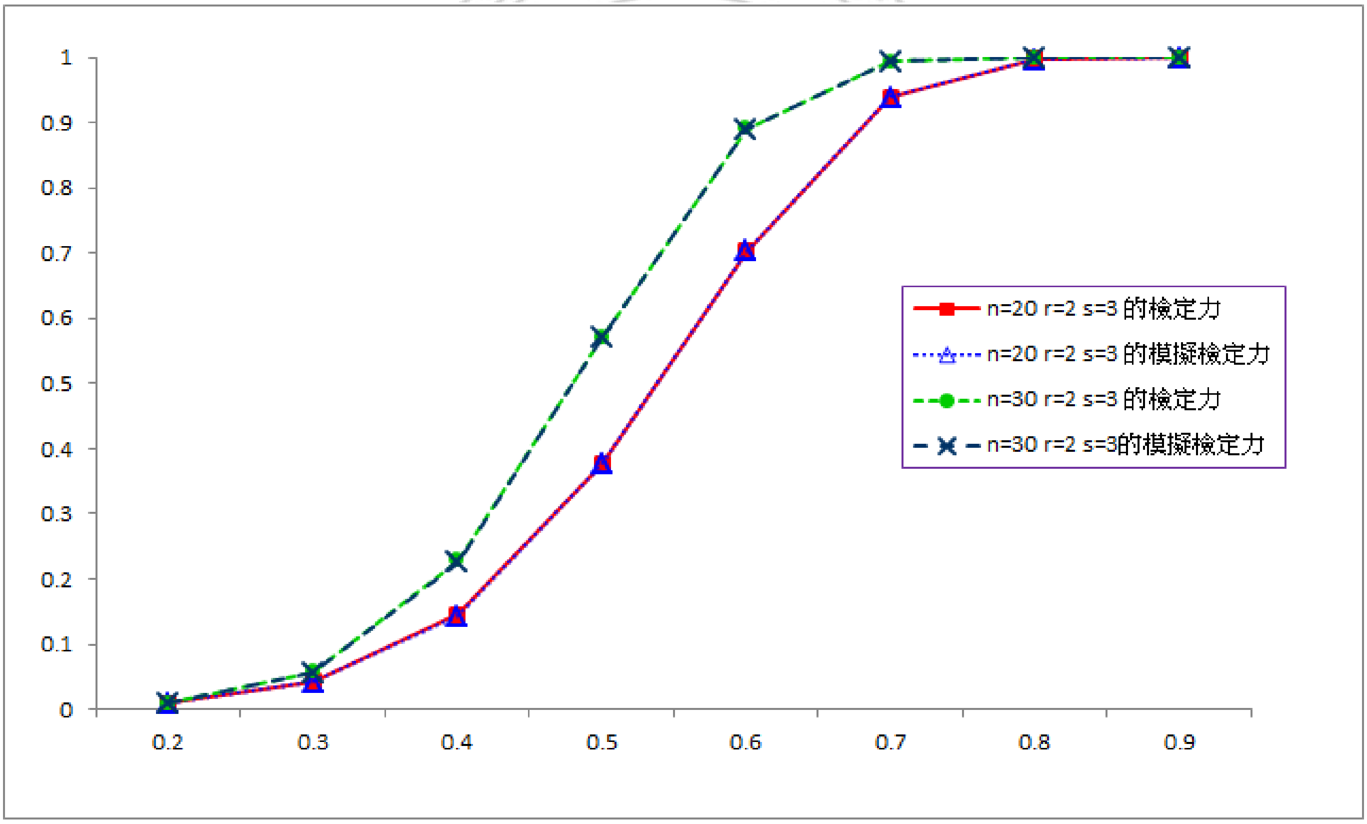

圖 3.6 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 2, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.11 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=3, s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=3 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=3 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.00970	9.38E-06	0.01000	0.00977	7.13E-06
0.3	0.04419	0.04416	3.37E-05	0.05935	0.06040	5.54E-05
0.4	0.15358	0.15472	1.41E-04	0.23604	0.23775	1.42E-04
0.5	0.39776	0.40027	2.33E-04	0.58728	0.58807	2.32E-04
0.6	0.72986	0.73002	2.56E-04	0.90258	0.90351	8.34E-05
0.7	0.95026	0.94953	4.12E-05	0.99500	0.99522	5.04E-06
0.8	0.99846	0.99844	1.37E-06	0.99999	0.99997	4.94E-08
0.9	1.00000	1.00000	2.60E-13	1.00000	1.00000	4.43E-22

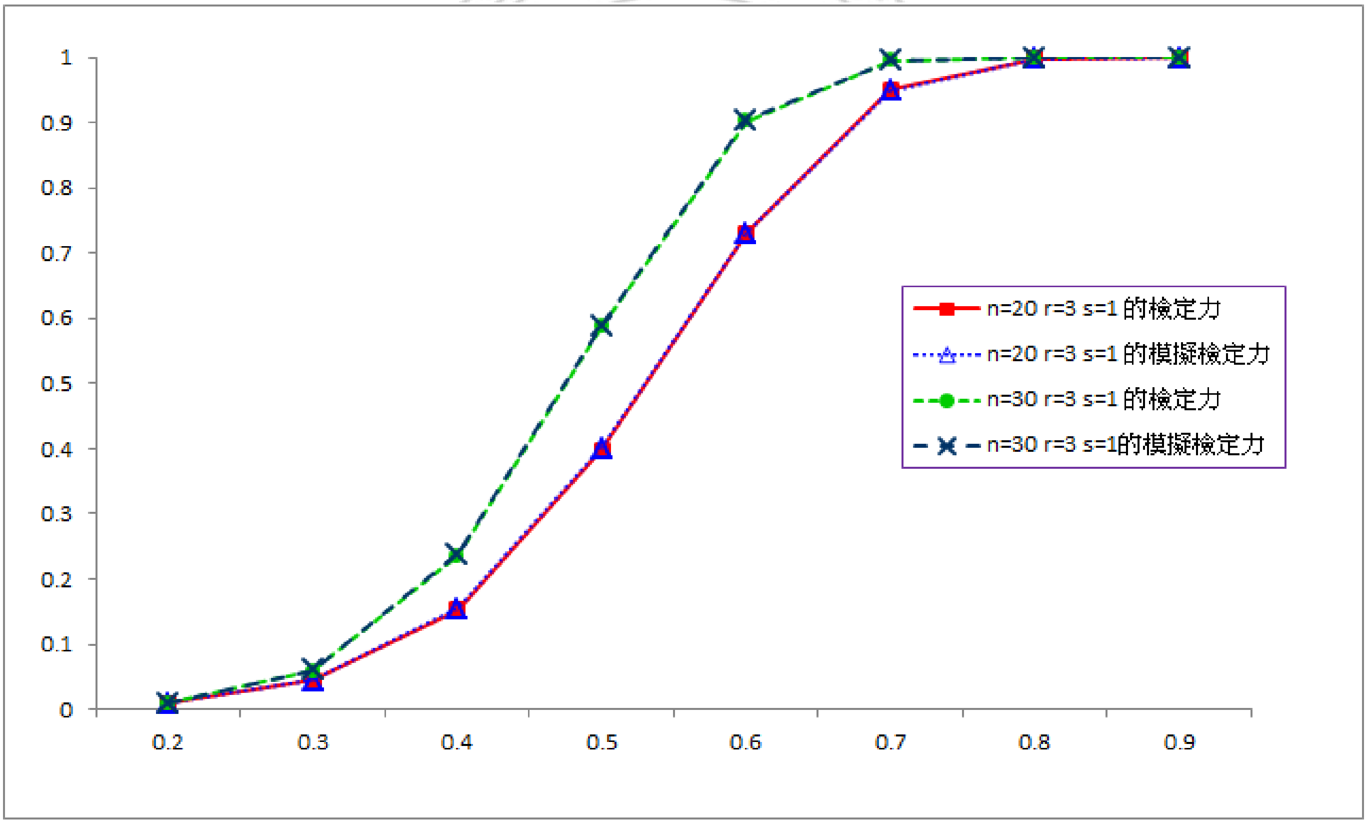

圖 3.7 在顯著水準$\alpha=0.01$與設限參數$r=3, s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{\mathrm{P}}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 3.12 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01071	9.07E-06	0.01000	0.00996	8.48E-06
0.3	0.04266	0.04369	3.70E-05	0.05783	0.05892	5.82E-05
0.4	0.14546	0.14614	1.22E-04	0.22774	0.22951	1.80E-04
0.5	0.37653	0.38052	2.10E-04	0.57038	0.57205	2.50E-04
0.6	0.70308	0.70379	2.00E-04	0.89154	0.89115	1.08E-04
0.7	0.93822	0.93834	5.33E-05	0.99365	0.99353	7.26E-06
0.8	0.99757	0.99786	2.46E-06	0.99998	0.99999	1.00E-08
0.9	1.00000	1.00000	1.86E-12	1.00000	1.00000	3.45E-21

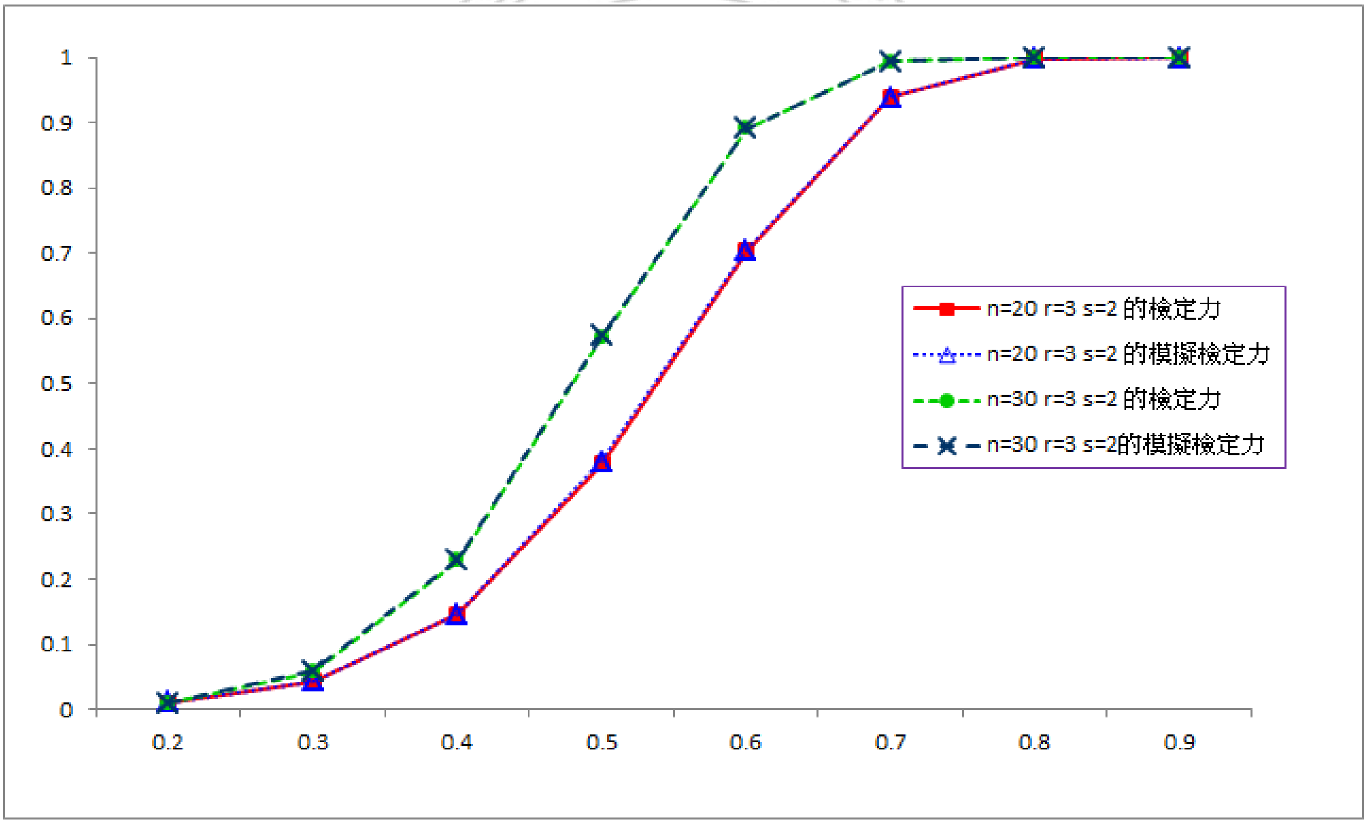

圖 3.8 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.13 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 3$ 下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.01000	0.01033	8.33E-06	0.01000	0.00984	9.74E-06
0.3	0.04112	0.04203	3.77E-05	0.05632	0.05651	4.72E-05
0.4	0.13736	0.13968	1.20E-04	0.21944	0.21856	1.43E-04
0.5	0.35495	0.35886	2.01E-04	0.55301	0.55410	2.19E-04
0.6	0.67417	0.67542	1.98E-04	0.87939	0.87984	9.37E-05
0.7	0.92349	0.92417	9.48E-05	0.99196	0.99225	8.75E-06
0.8	0.99619	0.99608	5.67E-06	0.99996	0.99995	4.77E-08
0.9	1.00000	0.99999	9.94E-09	1.00000	1.00000	2.66E-20

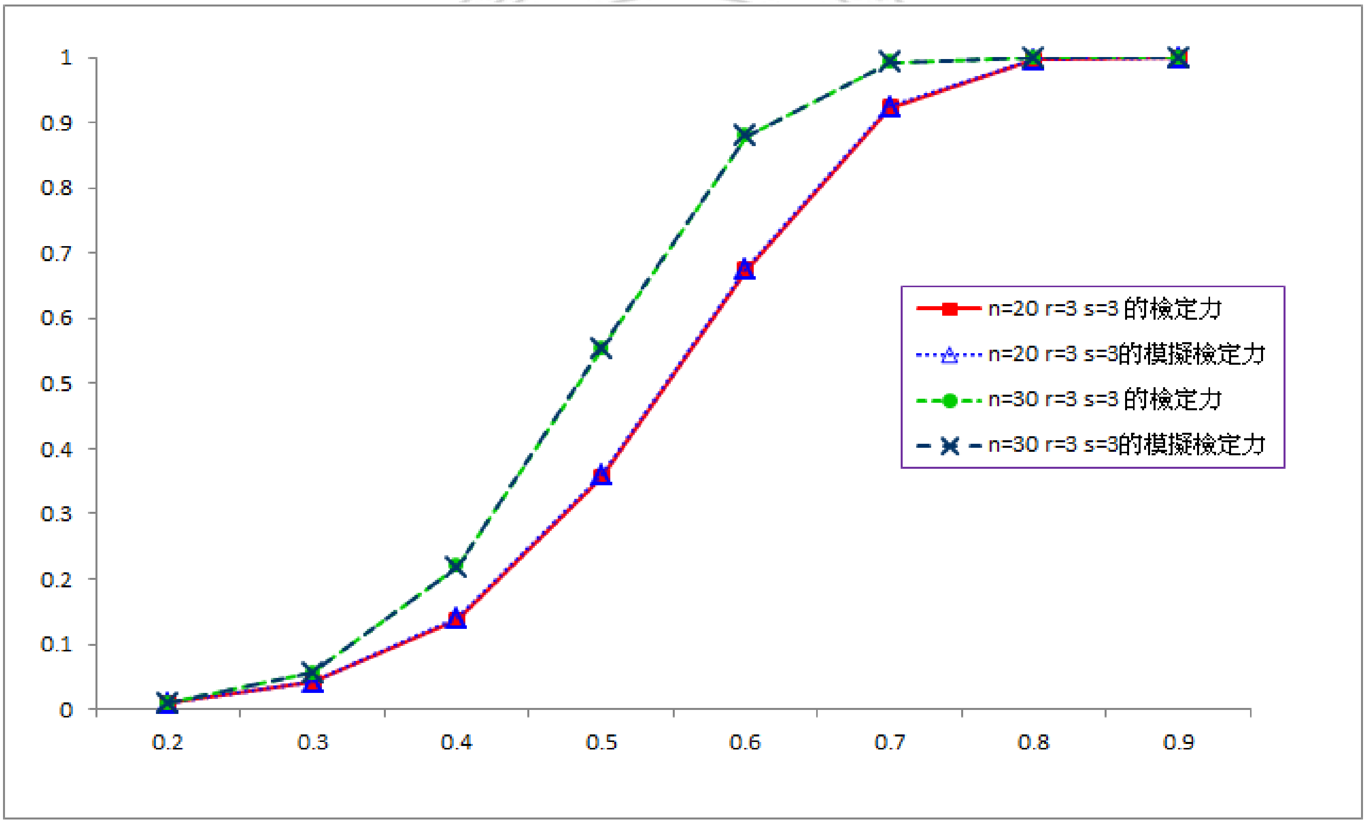

圖 3.9 在顯著水準$\alpha = 0.01$與設限參數$r = 3, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.14 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=1,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=1 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05000	5.13E-05	0.05000	0.04961	4.55E-05
0.3	0.15336	0.15267	1.21E-04	0.18818	0.18826	1.78E-04
0.4	0.36769	0.36891	2.04E-04	0.48046	0.48310	2.32E-04
0.5	0.66521	0.66771	3.08E-04	0.81208	0.81169	1.20E-04
0.6	0.90370	0.90289	7.97E-05	0.97484	0.97465	2.98E-05
0.7	0.99051	0.99004	1.27E-05	0.99939	0.99940	4.40E-07
0.8	0.99988	0.99987	1.13E-07	1.00000	0.99999	9.99E-09
0.9	1.00000	1.00000	7.95E-17	1.00000	1.00000	3.47E-26

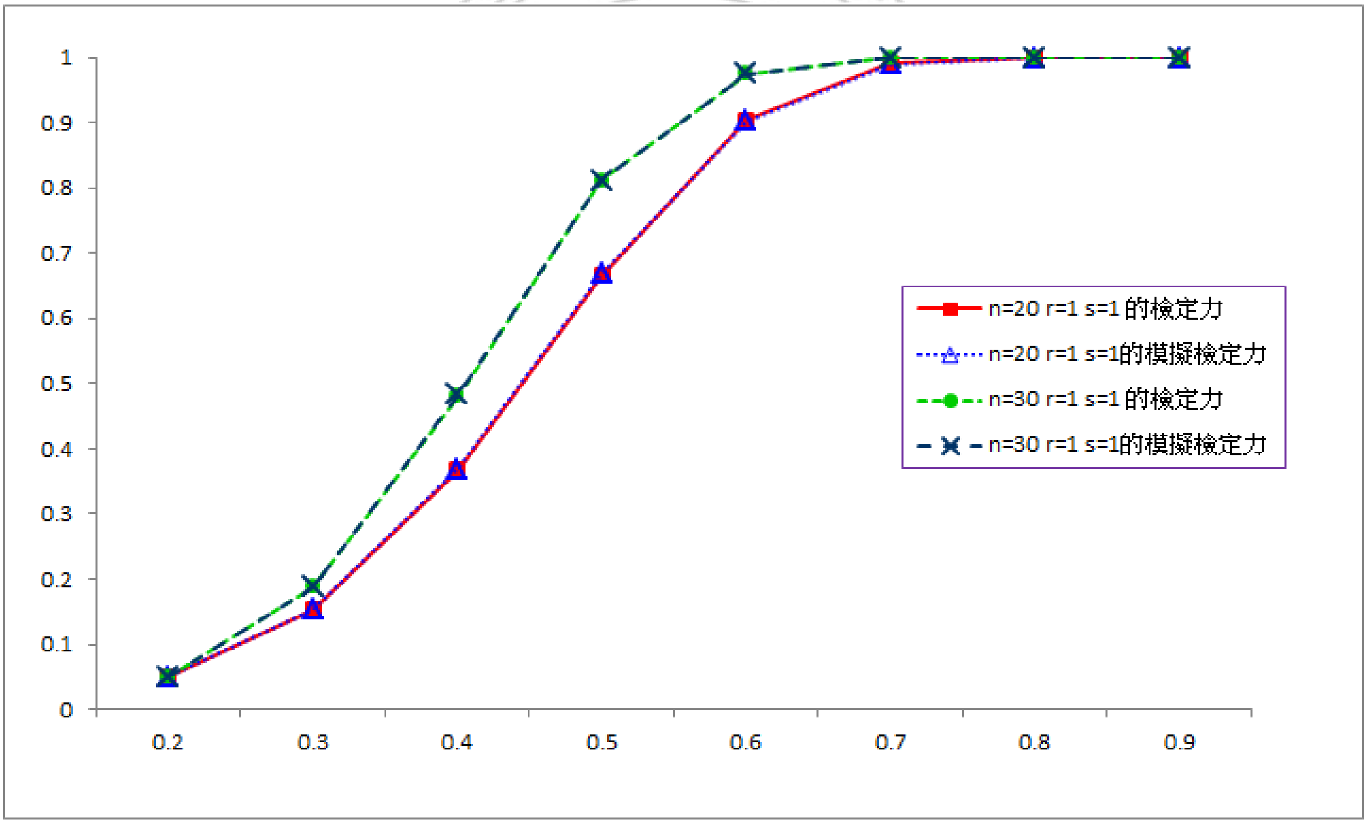

圖 3.10 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=1,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.15 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04990	4.26E-05	0.05000	0.05039	4.06E-05
0.3	0.14968	0.15012	1.28E-04	0.18483	0.18700	1.63E-04
0.4	0.35534	0.35437	3.00E-04	0.47001	0.47244	3.04E-04
0.5	0.64594	0.64564	2.73E-04	0.80064	0.80304	1.47E-04
0.6	0.89033	0.89068	1.07E-04	0.97113	0.97125	3.49E-05
0.7	0.98760	0.98780	1.16E-05	0.99919	0.99924	7.05E-07
0.8	0.99980	0.99982	1.68E-07	1.00000	1.00000	1.01E-12
0.9	1.00000	1.00000	6.67E-16	1.00000	1.00000	3.05E-25

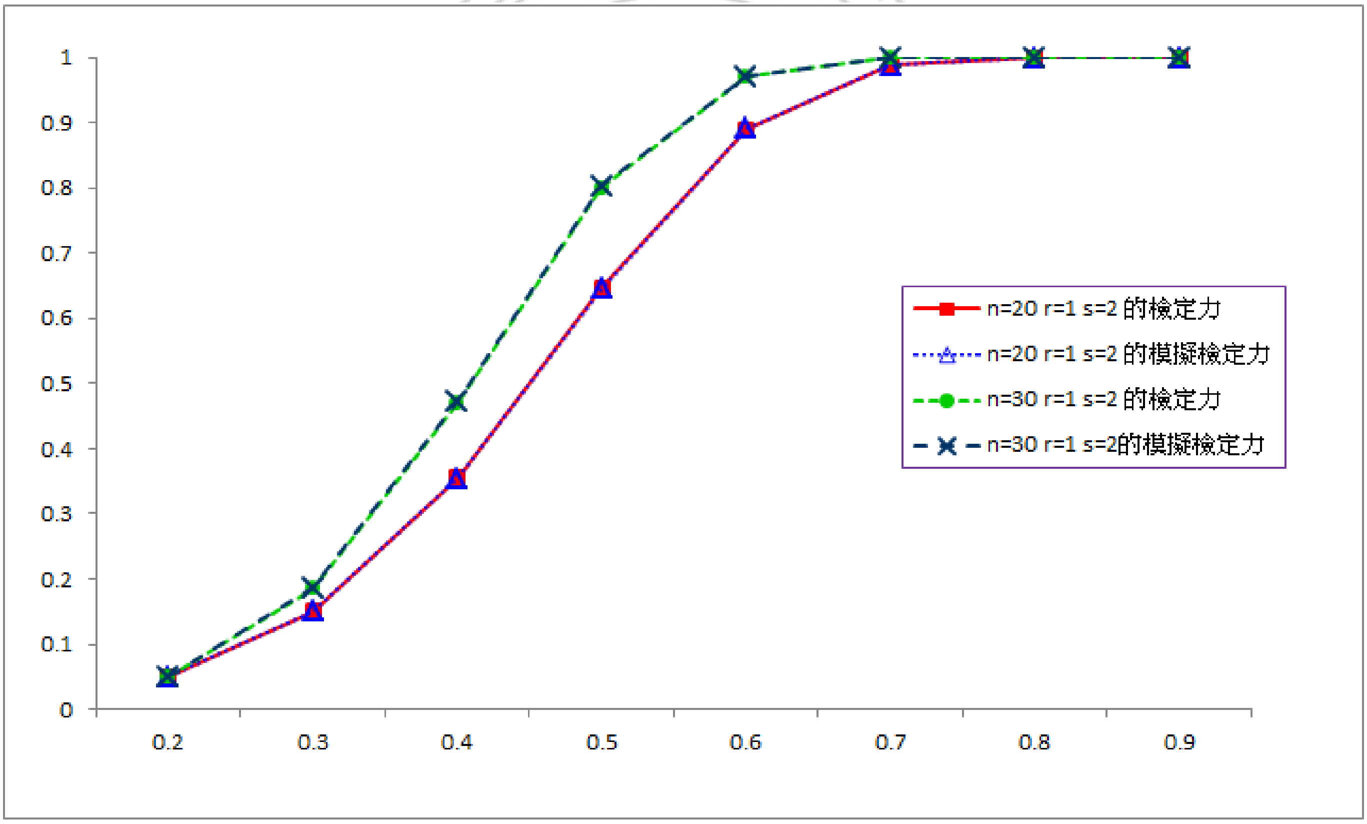

圖 3.11 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.16 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=1 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05013	5.07E-05	0.05000	0.05038	5.42E-05
0.3	0.14595	0.14696	1.39E-04	0.18146	0.18138	1.58E-04
0.4	0.34277	0.34390	2.79E-04	0.45938	0.45928	2.60E-04
0.5	0.62569	0.62507	2.23E-04	0.78856	0.78784	1.48E-04
0.6	0.87521	0.87683	1.20E-04	0.96691	0.96572	2.39E-05
0.7	0.98383	0.98407	2.15E-05	0.99893	0.99903	1.10E-06
0.8	0.99966	0.99959	4.47E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

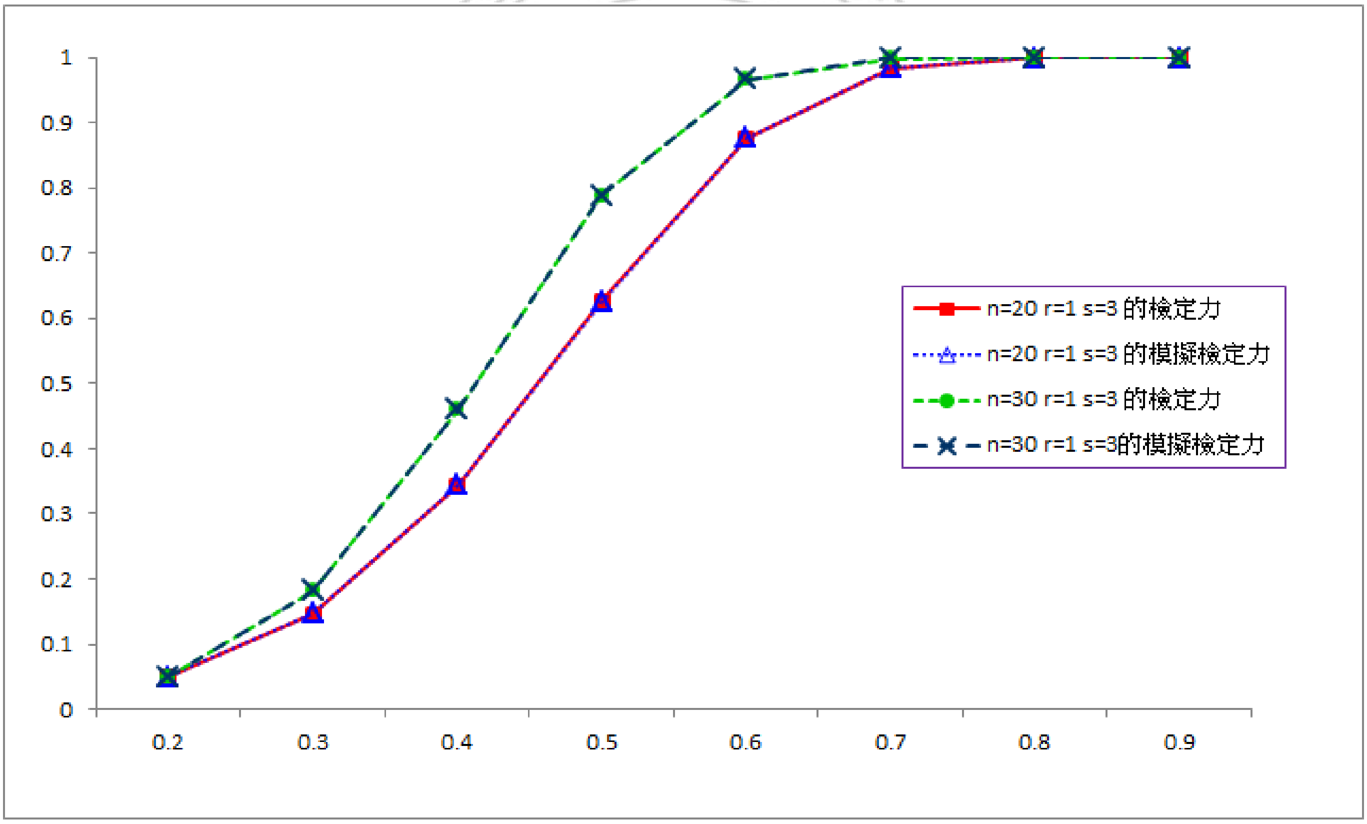

圖 3.12 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 1, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.17 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=2 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04941	4.77E-05	0.05000	0.05071	4.10E-05
0.3	0.14968	0.14949	1.32E-04	0.18483	0.18566	1.30E-04
0.4	0.35534	0.35765	2.24E-04	0.47001	0.46857	3.10E-04
0.5	0.64594	0.64545	1.92E-04	0.80064	0.79865	1.53E-04
0.6	0.89033	0.88961	1.11E-04	0.97113	0.97105	2.96E-05
0.7	0.98760	0.98746	1.01E-05	0.99919	0.99903	8.16E-07
0.8	0.99980	0.99988	1.12E-07	1.00000	1.00000	1.01E-12
0.9	1.00000	1.00000	6.67E-16	1.00000	1.00000	3.05E-25

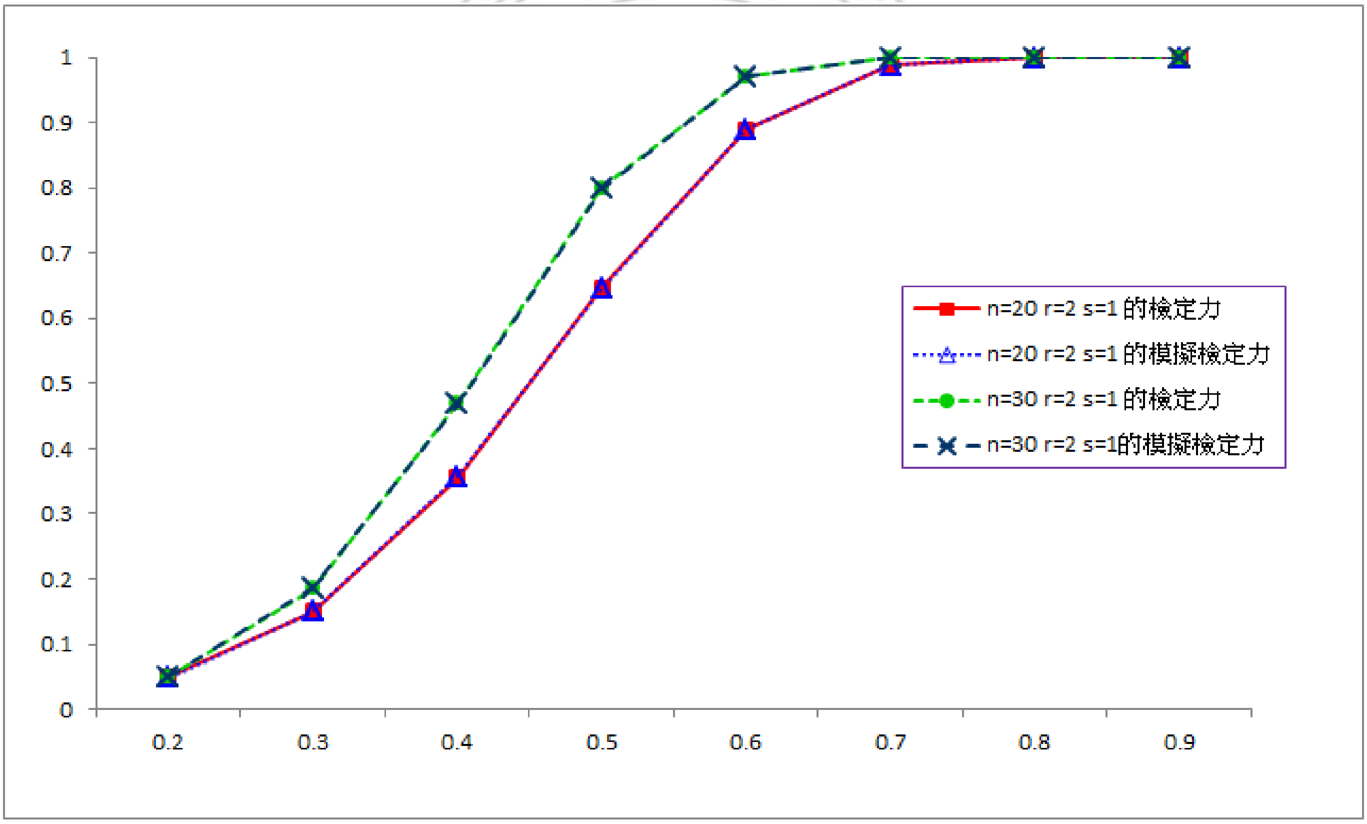

圖 3.13 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2,s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\widehat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.18 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2,s=2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\hat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=2 s=2 $\alpha=0.01$			n=30 r=2 s=2 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05037	4.47E-05	0.05000	0.05005	5.38E-05
0.3	0.14595	0.14600	1.35E-04	0.18146	0.17975	1.46E-04
0.4	0.34277	0.34360	2.09E-04	0.45938	0.45737	2.38E-04
0.5	0.62569	0.62650	2.16E-04	0.78856	0.78788	1.79E-04
0.6	0.87521	0.87419	9.78E-05	0.96691	0.96659	3.26E-05
0.7	0.98383	0.98391	1.62E-05	0.99893	0.99892	1.07E-06
0.8	0.99966	0.99969	3.15E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

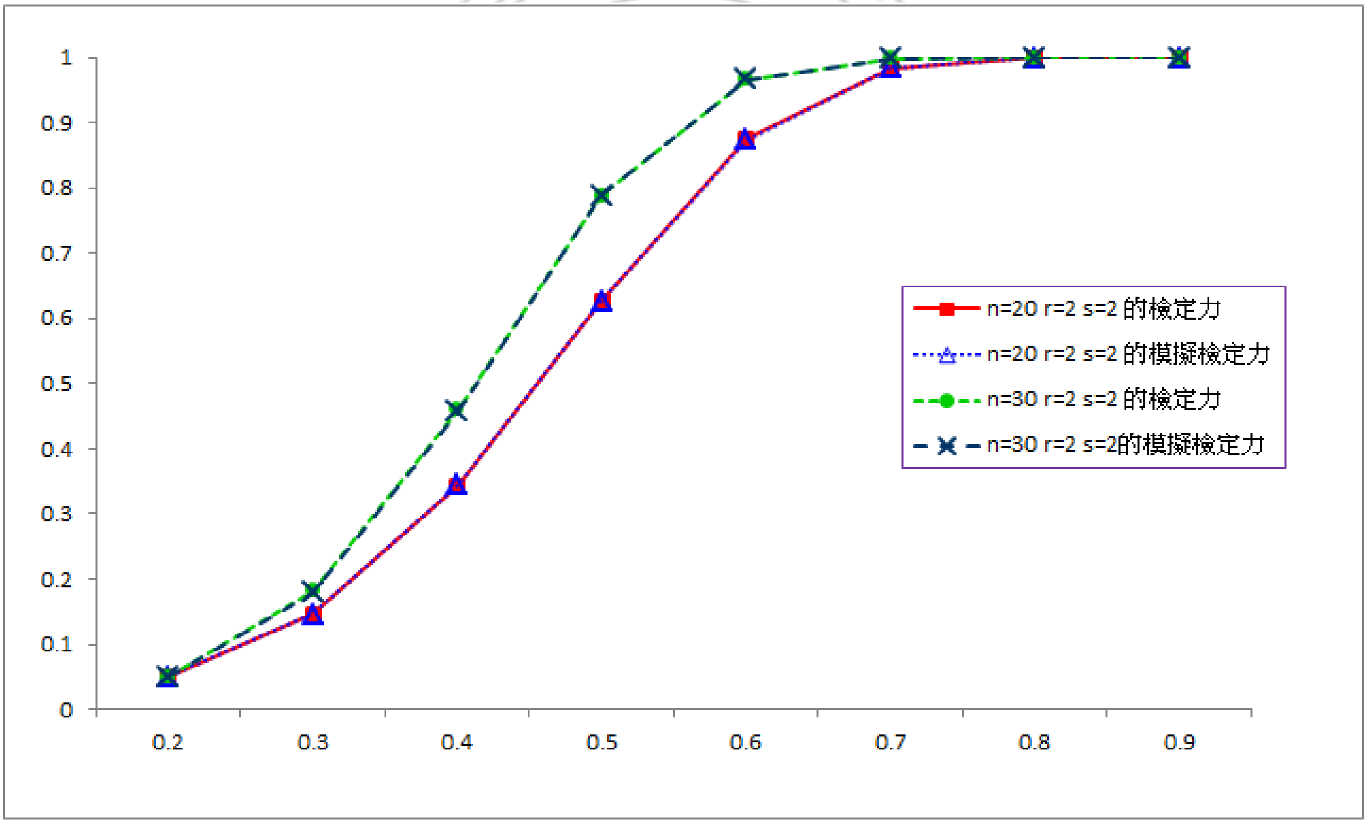

圖 3.14 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=2,s=2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\hat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 3.19 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=2 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=2 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04954	4.97E-05	0.05000	0.05016	3.91E-05
0.3	0.14216	0.14244	1.26E-04	0.17806	0.17680	1.32E-04
0.4	0.32998	0.33212	1.97E-04	0.44858	0.44618	2.52E-04
0.5	0.60441	0.60586	2.01E-04	0.77581	0.77574	1.55E-04
0.6	0.85814	0.85838	8.73E-05	0.96209	0.96232	3.49E-05
0.7	0.97895	0.97918	2.46E-05	0.99859	0.99870	1.10E-06
0.8	0.99943	0.99936	5.76E-07	1.00000	1.00000	8.62E-12
0.9	1.00000	1.00000	4.61E-14	1.00000	1.00000	2.33E-23

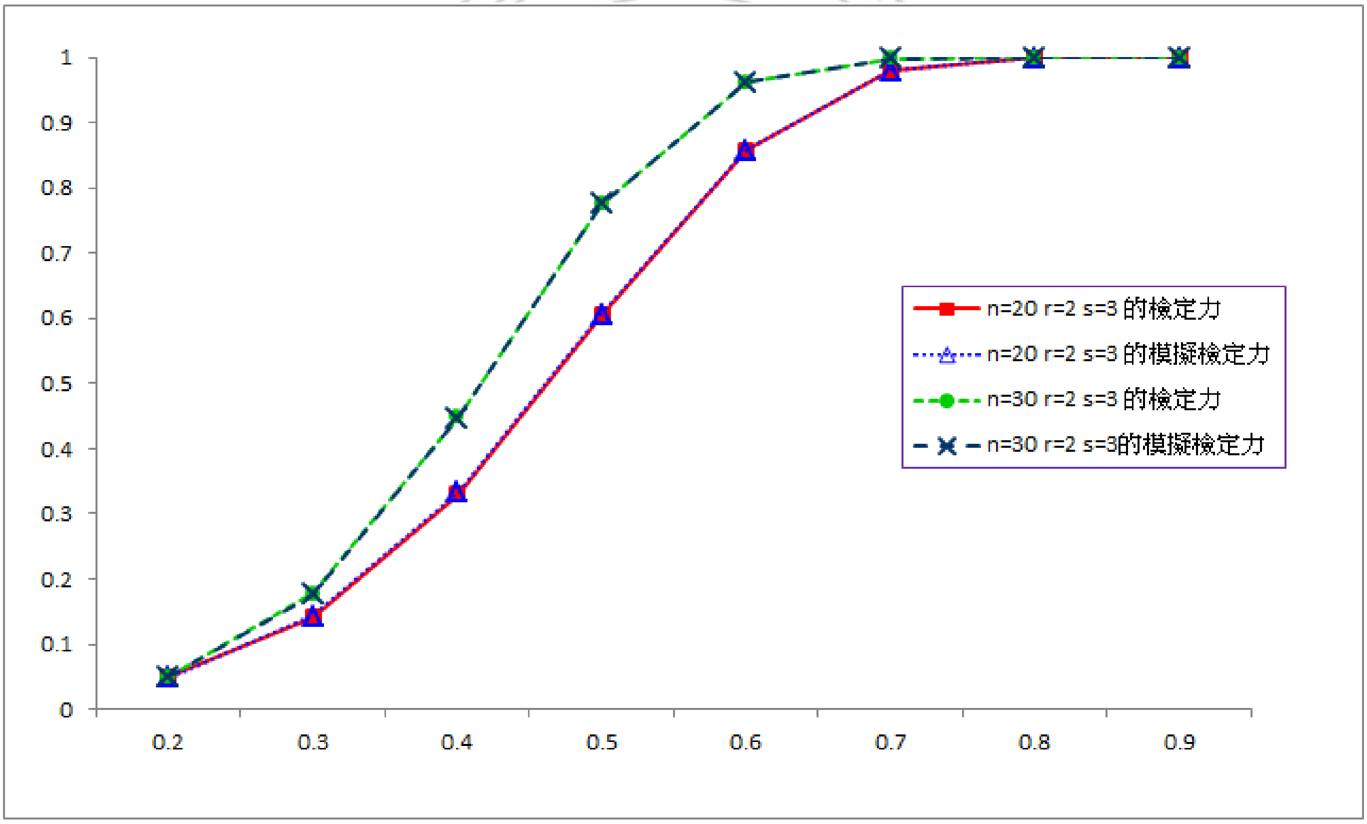

圖 3.15 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 2, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.20 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3, s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)及 SMSE。

	n=20 r=3 s=1 $\alpha=0.01$			n=30 r=3 s=1 $\alpha=0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\hat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05001	3.89E-05	0.05000	0.05013	4.98E-05
0.3	0.14595	0.14667	1.28E-04	0.18146	0.18266	1.37E-04
0.4	0.34277	0.34366	2.35E-04	0.45938	0.45945	2.40E-04
0.5	0.62569	0.62657	2.18E-04	0.78856	0.78824	1.70E-04
0.6	0.87521	0.87524	1.05E-04	0.96691	0.96713	3.30E-05
0.7	0.98383	0.98411	1.73E-05	0.99893	0.99903	8.38E-07
0.8	0.99966	0.99962	3.37E-07	1.00000	1.00000	2.95E-12
0.9	1.00000	1.00000	5.57E-15	1.00000	1.00000	2.67E-24

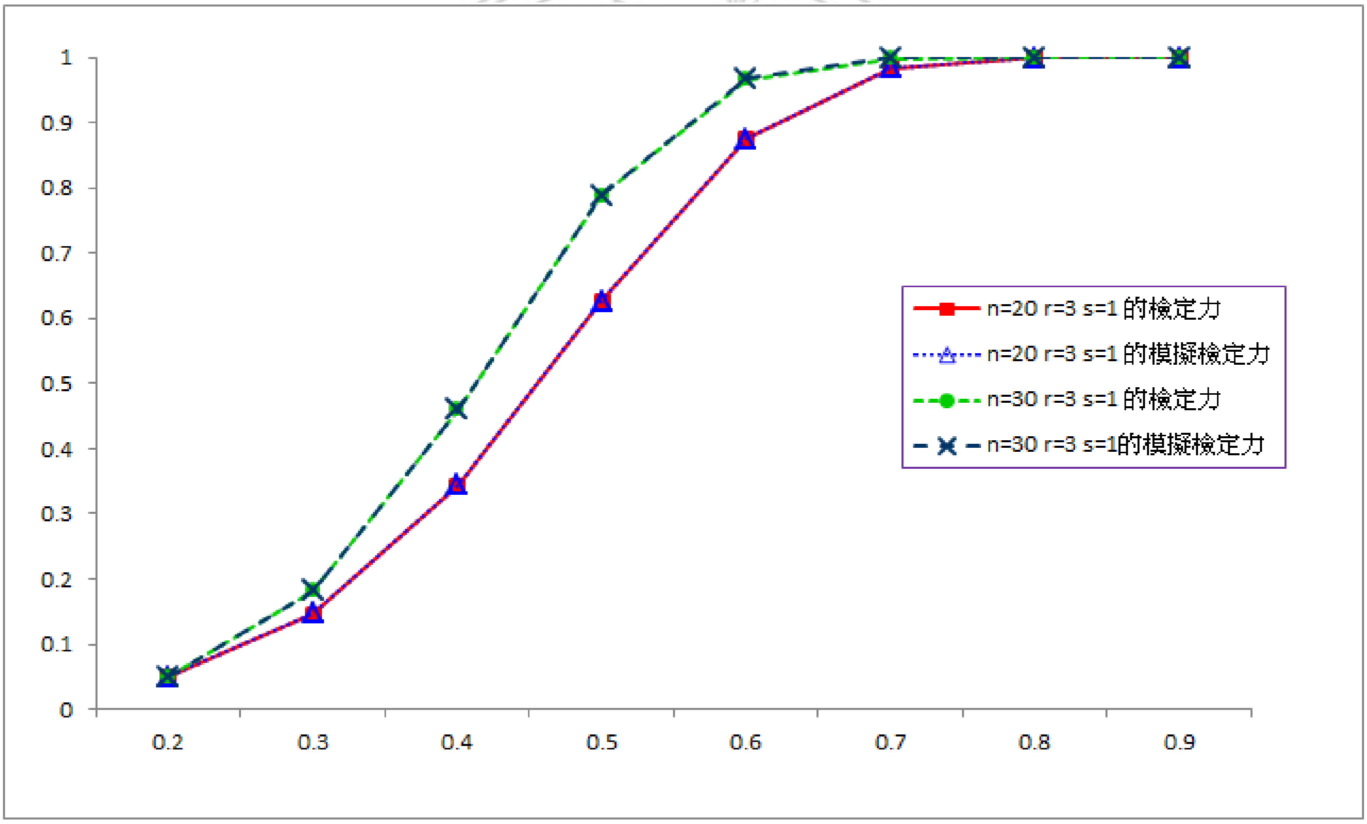

圖 3.16 在顯著水準$\alpha=0.05$與設限參數$r=3, s=1$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值($\overline{\hat{P}(c_1)}$)與真值($P(c_1)$)之圖形。

表 3.21 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=2 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.05024	4.37E-05	0.05000	0.05053	4.82E-05
0.3	0.14216	0.14054	1.33E-04	0.17806	0.17855	1.22E-04
0.4	0.32998	0.32770	2.66E-04	0.44858	0.44837	2.22E-04
0.5	0.60441	0.60334	3.42E-04	0.77581	0.77577	1.77E-04
0.6	0.85814	0.85714	1.28E-04	0.96209	0.96226	4.47E-05
0.7	0.97895	0.97758	2.59E-05	0.99859	0.99873	1.04E-06
0.8	0.99943	0.99947	5.31E-07	1.00000	1.00000	8.62E-12
0.9	1.00000	1.00000	4.61E-14	1.00000	1.00000	2.33E-23

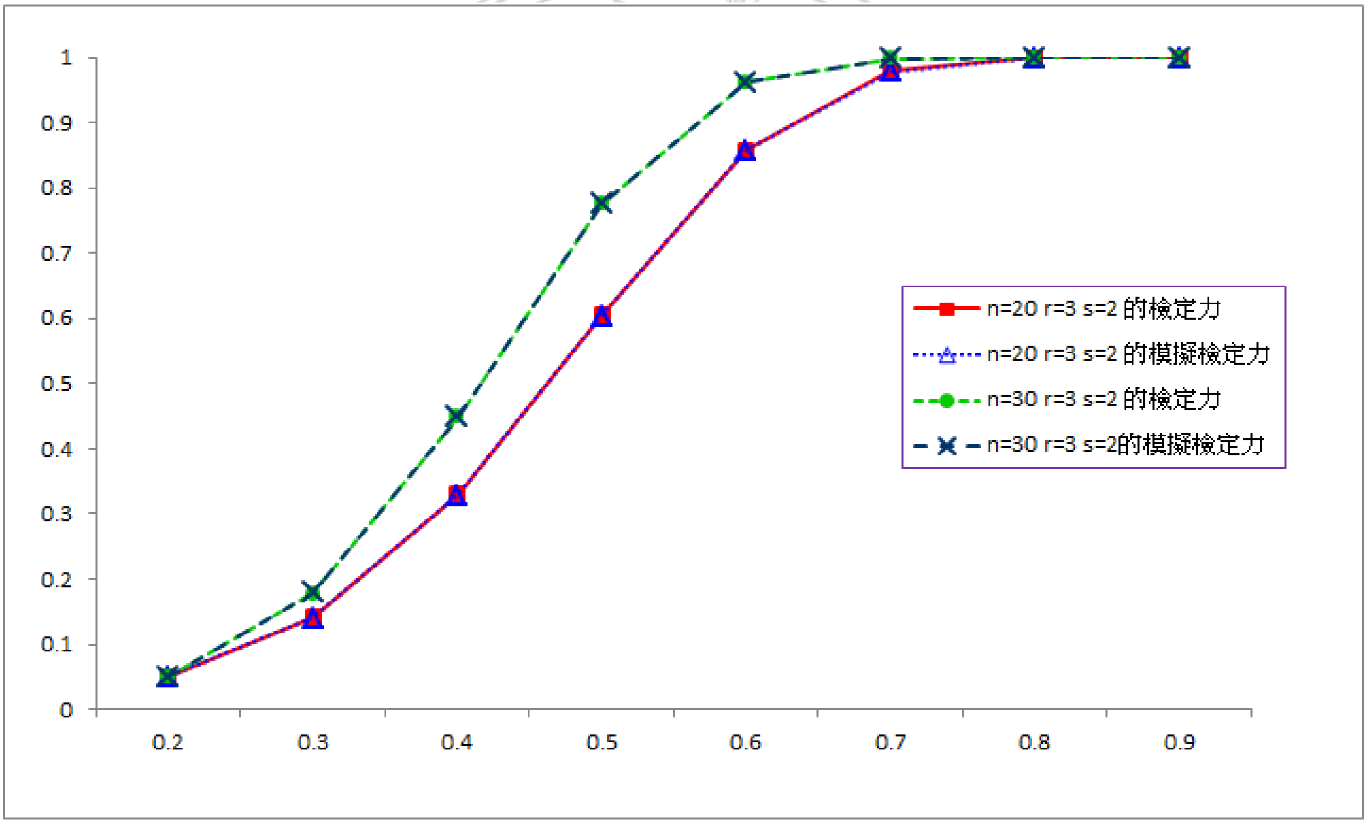

圖 3.17 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 2$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 3.22 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$及 SMSE。

	n=20 r=3 s=3 $\alpha = 0.01$			n=30 r=3 s=3 $\alpha = 0.01$		
c_1	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE	$P(c_1)$	$\overline{\widehat{P}(c_1)}$	SMSE
0.2	0.05000	0.04989	3.38E-05	0.05000	0.05110	5.26E-05
0.3	0.13832	0.13933	9.62E-05	0.17463	0.17685	1.40E-04
0.4	0.31695	0.31771	2.08E-04	0.43759	0.43857	1.95E-04
0.5	0.58207	0.58457	2.43E-04	0.76237	0.76144	1.47E-04
0.6	0.83889	0.84015	1.20E-04	0.95659	0.95567	4.95E-05
0.7	0.97264	0.97282	2.45E-05	0.99814	0.99805	2.10E-06
0.8	0.99905	0.99886	1.24E-06	0.99999	1.00000	2.51E-11
0.9	1.00000	1.00000	3.80E-13	1.00000	1.00000	2.03E-22

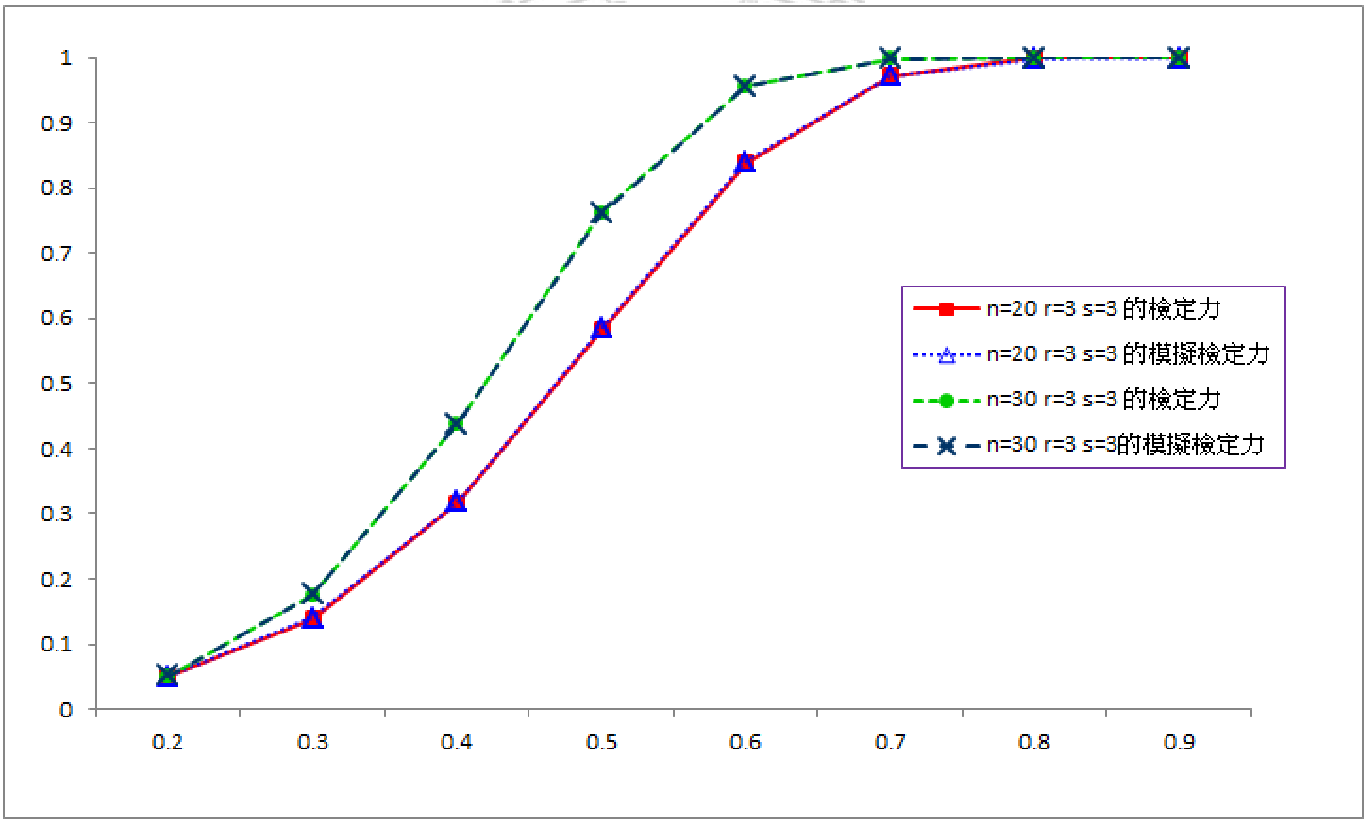

圖 3.18 在顯著水準$\alpha = 0.05$與設限參數$r = 3, s = 3$下，壽命績效指標的檢定力模擬平均值$(\overline{\widehat{P}(c_1)})$與真值$(P(c_1))$之圖形。

表 3.23 在顯著水準$\alpha = 0.01$、參數值$\beta = 3$、目標值$C_L = 0.35$和規格下界$L = 1$下，壽命績效指標之信賴水準$(1-\alpha)$模擬平均值與 SMSE。

	$\boldsymbol{\alpha = 0.01, \beta = 3}$	
(n, r, s)	$\overline{1-\hat{\alpha}}$	SMSE
(20, 1, 1)	0.98994	9.74E-05
(20, 1, 2)	0.98981	1.03E-04
(20, 1, 3)	0.99046	9.22E-05
(20, 2, 1)	0.98996	1.04E-04
(20, 2, 2)	0.98948	1.03E-04
(20, 2, 3)	0.98967	1.11E-04
(20, 3, 1)	0.99002	9.22E-05
(20, 3, 2)	0.99024	9.90E-05
(20, 3, 3)	0.99013	9.45E-05
(30, 1, 1)	0.99022	9.40E-05
(30, 1, 2)	0.99010	1.06E-04
(30, 1, 3)	0.99010	1.00E-04
(30, 2, 1)	0.98983	1.08E-04
(30, 2, 2)	0.98965	1.01E-04
(30, 2, 3)	0.99025	9.33E-05
(30, 3, 1)	0.98958	9.88E-05
(30, 3, 2)	0.98967	9.77E-05
(30, 3, 3)	0.99062	9.34E-05

表 3.24 在顯著水準$\alpha = 0.05$、參數值$\beta = 3$、目標值$C_L = 0.35$和規格下界$L = 1$下，壽命績效指標之信賴水準$(1-\alpha)$模擬平均值與 SMSE。

	$\boldsymbol{\alpha = 0.05, \beta = 3}$	
(n, r, s)	$\overline{1-\hat{\alpha}}$	SMSE
(20, 1, 1)	0.95068	4.88E-04
(20, 1, 2)	0.95022	4.96E-04
(20, 1, 3)	0.94910	4.90E-04
(20, 2, 1)	0.95091	4.60E-04
(20, 2, 2)	0.94954	4.82E-04
(20, 2, 3)	0.94991	4.98E-04
(20, 3, 1)	0.94987	4.64E-04
(20, 3, 2)	0.95033	4.61E-04
(20, 3, 3)	0.95053	4.73E-04
(30, 1, 1)	0.95036	4.60E-04
(30, 1, 2)	0.95011	4.77E-04
(30, 1, 3)	0.94939	4.95E-04
(30, 2, 1)	0.94914	4.88E-04
(30, 2, 2)	0.95051	5.07E-04
(30, 2, 3)	0.95014	4.70E-04
(30, 3, 1)	0.98985	1.01E-04
(30, 3, 2)	0.99003	9.73E-05
(30, 3, 3)	0.94884	5.09E-04

表 3.25 參數β、$\hat{\pi}$及 SSE 的對應值

β	$\hat{\pi}$	SSE	β	$\hat{\pi}$	SSE
2.83	5.0184	0.89649	**2.94**	3.8129	0.53049
2.84	4.9062	0.75765	**2.95**	3.7168	0.57270
2.85	4.7921	0.64901	**2.96**	3.6238	0.62051
2.86	4.6773	0.56693	**2.97**	3.5339	0.67296
2.87	4.5627	0.50808	**2.98**	3.447	0.72922
2.88	4.449	0.46947	**2.99**	3.3632	0.78857
2.89	4.3369	0.44837	**3.00**	3.2823	0.85038
2.90	4.2269	0.44240	**3.01**	3.2042	0.91411
2.91	4.1192	0.44939	**3.02**	3.129	0.97930
2.92	4.0142	0.46748	**3.03**	3.0564	1.04555
2.93	3.9121	0.49500	**3.04**	2.9865	1.11251

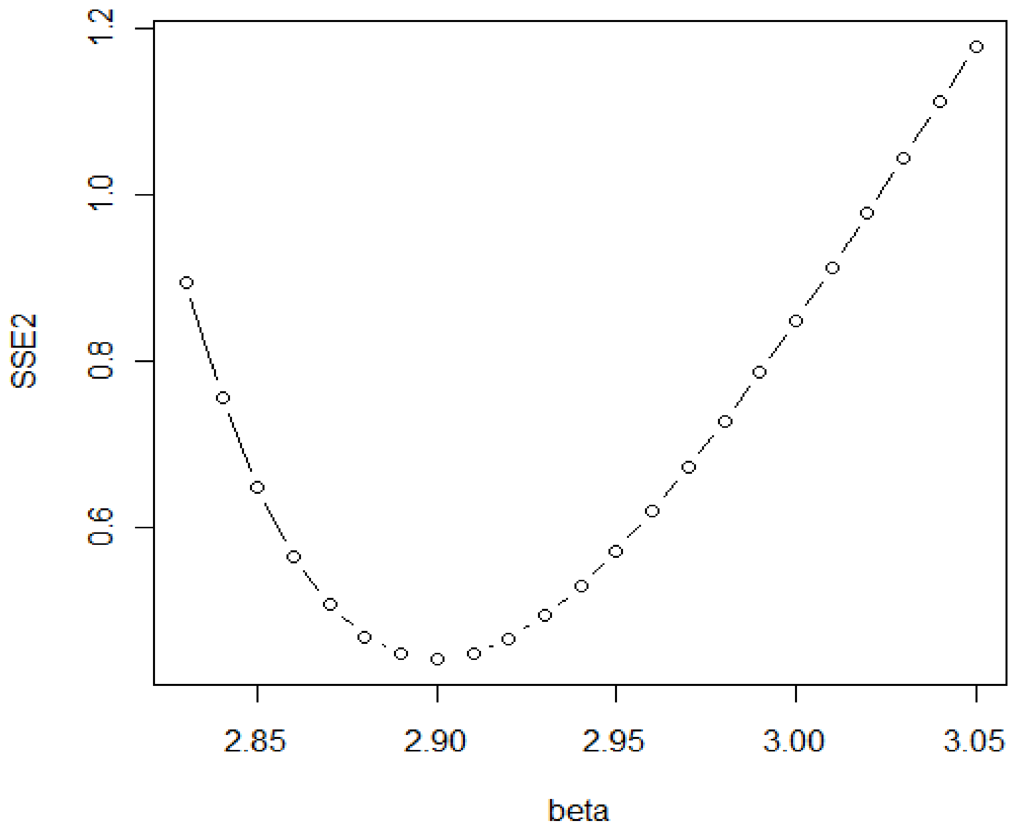

圖 3.19 beta 與 SSE 的關係圖

附錄二. 極值分配

$\boxed{\text{Pf:}}$ 證明$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \ldots\ldots, Z_{n-s}$ 為互相獨立且來自相同分配的單參數指數分配 Exp(π)

若設 $Y_{(i)} = \frac{1}{\theta} e^{\frac{X_{(i)}-\beta}{\theta}}$ ，$-\infty < x < \infty$ ，$-\infty < \beta < \infty$ ，$\theta > 0$，經過變數變換，則 $Y_{(i)} \sim \mathrm{Exp}(\pi)$。

設 $Z_{r+1} = (n-r)Y_{(r+1)}$，

$Z_i = (n-i+1)(Y_{(i)} - Y_{(i-1)})$，i=r+2, ……n−s，其中$Y_{(i)}$，$i = r+1, \ldots\ldots n-s$，為$Y_i$之有序統計量。

$$
\text{設} \begin{cases}
z_{r+1} = (n-r)y_{(r+1)} \\
z_{r+2} = (n-r-1)\left(y_{(r+2)} - y_{(r+1)}\right) \\
z_{r+3} = (n-r-2)\left(y_{(r+3)} - y_{(r+2)}\right) \\
\qquad \vdots \\
z_{n-s} = (s+1)(y_{(n-s)} - y_{(n-s-1)})
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
y_{(r+1)} = \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
y_{(r+2)} = \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
y_{(r+3)} = \dfrac{1}{n-r-2} z_{r+3} + \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1} \\
\qquad \vdots \\
y_{(n-s)} = \dfrac{1}{s+1} z_{n-s} + \cdots + \dfrac{1}{n-r-2} z_{r+3} + \dfrac{1}{n-r-1} z_{r+2} + \dfrac{1}{n-r} z_{r+1}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow J = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+1)}}{\partial z_{n-s}} \\
\dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+2)}}{\partial z_{n-s}} \\
\dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(r+3)}}{\partial z_{n-s}} \\
 & \vdots & & \\
\dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{r+1}} & \dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{r+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial y_{(n-s)}}{\partial z_{n-s}}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{n-r} & 0 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & \dfrac{1}{n-r-2} & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
 & \vdots & \vdots & \\
\dfrac{1}{n-r} & \dfrac{1}{n-r-1} & \dfrac{1}{n-r-2} & \cdots\cdots\cdots \dfrac{1}{s+1}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots\ldots(s+1)}
$$

則$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \ldots\ldots, Z_{n-s}$之聯合機率密度函數為

$$h_{Z_{r+1},Z_{r+2},Z_{r+3},\dots\dots,Z_{n-s}}(z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3}, \dots \dots,\ z_{n-s})$$

$$= f_{Y_{(r+1)},Y_{(r+2)},Y_{(r+3)},\dots\dots,Y_{(n-s)}}(y_{(r+1)}, y_{(r+2)}, y_{(r+3)}, \dots \dots, y_{(n-s)}) \cdot |J|$$

$$= e^{-\theta[\ Z_{r+1} + Z_{r+2} + Z_{r+3},\dots\dots + Z_{n-s}]\cdot k^{(n-s-r-1)}}$$

$$= \theta e^{-\theta} \cdot \theta e^{-\theta Z_{r+2}} \cdot \theta e^{-\theta Z_{r+3}} \dots \dots \cdot \theta e^{-\theta Z_{n-s}}$$

$$= h_{Z_{r+1}}(z_{r+1}) \cdot h_{Z_{r+2}}(z_{r+2}) \cdot \dots \cdot h_{Z_{n-s}}(z_{n-s})$$

$\Rightarrow$ 由上式可證得$Z_{r+1}, Z_{r+2}, Z_{r+3}, \dots \dots, Z_{n-s}$ 為互相獨立且來自相同分配的單參數指數分配 Exp(π)。

第四章 結論與未來研究方向

4.1 結論

為因應現今社會科技產業的進步，及滿足消費者對產品的喜好程度，製造商為了想提高產品的壽命、性能，即必須做嚴格的把關與控管，並適時地改善製程，以確保達到消費者所需的品質水準。

在實務上，一般常用製程能力指標來評估產品的壽命績效，然而在現實生活中，常常因為時間的限制及成本考量等因素，無法觀測到所有產品的壽命資料。因此在本文主要是研究在雙型二設限樣本下，評估對具有 Burr XII 分配和極值分配之產品的壽命績效，依照 2.2 節和 3.2 節的資料轉換過程可以求出壽命績效指標C_L的不偏估計量$\hat{C}_L'$，且在給定規格下界 L、目標值c^*以及顯著水準α下，進一步發展出假設檢定程序及信賴區間的估計，以評估產品壽命是否達到消費者所要求的水準，及是否需改善製程以提高產品的品質。

此外，我們也對壽命績效指標的檢定力和信賴區間，在給定不同設限樣本個數的情況下進行蒙地卡羅模擬，經由模擬結果我們可以發現，不論樣本數n或設限樣本個數(r、s)如何變動，其壽命績效指標的檢定力真實值$\mathrm{P}(c_1)$和模擬平均值$\overline{\hat{P}(c_1)}$相比之下，發現數值相當接近，樣本均方誤差 SMSE 也非常的小；而信賴水準之模擬平均值$\overline{1-\hat{\alpha}}$亦非常接近真實的信賴水準$(1-\alpha)$，且其樣本均方誤差 SMSE 亦非常的小。由此模擬結果顯示，我們可利用本文所提出的方法評估產品之壽命績效指標是否達到消費者所要求的水準。而第二章和第三章的最後我們也各舉一個實例和一模擬分析作為驗證。

4.2 未來研究方向

本文是針對雙型二設限樣本下，對具有 Burr XII 分配和極值分配之產品做壽命績效的評估。在雙型二設限樣本下的研究中，大多是探討產品壽命信賴區間的推論，較少著墨在對產品壽命績效指標的評估，因此，在未來的研究中，可以針對不同分配的產品壽命，依照本文所探討的檢定程序及方法做壽命績效指標的評估，或是將設限樣本型態推廣至多重設限樣本作探討。

參考文獻

一、 中文部分

[1] 王文成(民95)，在雙型II設限樣本下，對具有指數分配的產品之壽命績效作統計推論，嘉義大學應用數學系碩士班碩士論文。

[2] 李百靈(民89)，以雙型II設限樣本探討Gompertz和極值分配之參數的區間估計，淡江大學統計學系應用統計學碩士班碩士論文。

[3] 林雅莉(民94)，利用多重型II設限樣本對Burr Type XII 及Lognormal分配的形狀參數作統計推論。

[4] 林躍融(民100)，利用型II設限與逐步設限樣本評估具有浴缸型分配之產品的壽命績效指標，淡江大學統計學系應用統計學碩士班碩士論文。

二、 英文部分

[1] Bain, L. J. & Engelhart, M. (1992).*Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press.

[2] Bickel, P. J., and Doksum, K. A. (1977). *Mathematical Statistics:Biasic Ideas and Selected Topics*.Holden-Day Inc..

[3] Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F. A. (1988). A new measure of process capability: C_{pm}. *Journal of Quality Technology*, **20**(3), 162-175.

[4] Clement, J.A. (1989). Process capability calculations for non-normal distribution. *Quality Progress,* **22**, 95-100.

[5] Cohen, A.C. (1963). Progressively censored samples in the life testing. *Technometrics*, Vol. **5**, pp.327-339.

[6] Cohen, A.C. (1991). *Truncated and Censored Samples*. Marcel Dekker, Inc.

[7] Fernández A.J. (2000). On maximum likelihood prediction based on Type-II censored exponential data. *Metrika*, Vol. **50**, pp. 211-220.

[8] Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes*. New York：Columbia University Press.

[9] Jiang, R. Ji,P. & Xiao, X. (2003). Aging property of unimodal failure rate models. *Reliability Engineering & System Safety*,**79**,113-116.

[10] Johnson, L. N. & Kotz, S. (1970). *Distribution in Statistics*：*Continuous Univariate DistriButIons.* Vol.**1&2**, Wiley, New York.

[11] Kane, V.E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology,* **18**(1), 41-52.

[12] Lawless, J.E.(1982). *Statistical Models and Methods for lifetime Data*. John Wiley and Sons, New York.

[13] Lee,W.C.,Wu,J.W,Hong,C.W. (2009). Assessing the lifetime performance index of products from progressively type II right censored data using Burr XII model.*Mathematics and Computers in Simulation.* **79**,2167-2179.

[14] Montgomery, D.C. (1985). *Introduction to Statistical Quality control*. John Wiley and Sons.

[15] Nelson.W, (1982). *Applied Life Data Analysis*. Wiley,New York.

[16] Nordquist, J. F. (1945). Theory of largest values, applied to earthquake magnitudes. *Transactions of American Geographical Union*, **26**, pp. 29-31.

[17] Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1997). Capability indices for non-normal distributions with an application in electrolytic capacitor manufacturing. *Microelectronics and Reliability,* **37**(12), 1853-1858.

[18] Pearn, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology,* **24**(4), 216-233.

[19] Potter, W. D. (1949). *Normalcy test of Precipitation and frequency studies of runoff on small watersheds*. U. S. Department of Agriculture Technical Bulletin, No.985,Washington, DC：GPO.

[20] Rantz, S. F. & Riggs, H. C.(1949). *Magnitude and frequency of floods in the Columbia River Basin*. U. S. Geological Survey, Water Supply Paper1080, pp. 317-476.

[21] Tong, L.I., Chen, K.T. and Chen, H.T. (2002). Statistical testing for assessing the performance of lifetime index of electronic components with exponential distribution. *International Journal of Quality & Reliability Management,* **19**(7), 812-824.

[22] Wu, J.W., Lee, W.C., and Hou, H.C. (2007). Assessing the performance for the products with rayleigh lifetime. *Journal of Quantitative Management,* **4,** 147-160.

[23] Wu, J.W., and Li, P.L.(2004). Optimal Parameter Estimation of the Extreme Value Distribution Based on a Type II Censored Sample. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, Vol.**32**, pp.533-554.

[24] Wu,S.F.(2008). Interval estimation for Pareto distribution based on a doubly type II censored sample.*Statistics and Data Analysis,* **52**,3779-3788.

[25] Wu,S.F.,Wu,C.C.,Chen,Y.L.,Yu,Y.R.,Lin,Y.P.(2010). Interval estimation of two-parameter Burr-XII distribution under progressive censoring. *Statistics,*Vol.**44**,No.1,pp.77-88.