

# 科技部補助專題研究計畫報告

## 含有限長度裂紋之磁電彈材料之動力破壞分析

報告類別：成果報告  
計畫類別：個別型計畫  
計畫編號：MOST 108-2221-E-032-019-  
執行期間：108年08月01日至109年07月31日  
執行單位：淡江大學學校財團法人淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：大專生-兼任助理：陳炳憲  
大專生-兼任助理：謝采倫  
大專生-兼任助理：廖亦倫  
大專生-兼任助理：張菀婷  
大專生-兼任助理：鄧依庭

本研究具有政策應用參考價值：否 是，建議提供機關  
(勾選「是」者，請列舉建議可提供施政參考之業務主管機關)  
本研究具影響公共利益之重大發現：否 是

中華民國 109 年 10 月 31 日

中文摘要：本文研究一內含有限長裂紋之無窮域磁電彈材料，於距離裂紋尖端  $h$  的裂紋面上，施予一對反平面機械點載荷，且受到無窮多個繞射波影響之暫態問題。先在拉普拉斯轉換域中，求得含半無限長裂紋之無窮域磁電彈材料的曳引力型和位移型基本解，且在轉換域中利用曳引力型負載之基本解做疊加，可獲得入射波於轉換域中的解；接著再運用座標轉換與位移型基本解做疊加，可得到裂紋尖端的第二次繞射波；如此反覆進行，可得到兩裂紋尖端的無窮多個的繞射波之全場解與應力、電位移、磁感應強度因子；最後再使用做兩次逆轉換以求得時域中之暫態解。最後對結果進行數值計算，做詳細的討論並與文獻上的特例做比較。

中文關鍵詞：磁電彈材料、有限長裂紋、暫態、應力強度因子、繞射波

英文摘要：Many multiferroic composites, made of piezoelectric and piezomagnetic or magnetostrictive materials can achieve much large magnetoelectric coupling than those in single-phase materials. The magnetoelectric effect in magneto-electro-elastic(MEE) materials has many potential innovative applications in multifunctional devices such as current sensors, magnetic sensors, and magnetic energy harvesters. This study is to investigate the transient response of a finite crack in MEE materials subjected to anti-plane mechanical concentrated load on the crack faces. First, three useful fundamental solutions were derived and the solutions can be determined by superposition of the fundamental solutions in the Laplace transform domain. Then the coordinate transformation and superposition of the displacement fundamental solution were used to obtain the second diffraction wave of the crack tip. Finally, the Cagniard method of Laplace inversion was applied to obtain the transient solutions in time domain. The numerical results were evaluated and discussed in detail.

英文關鍵詞：magneto-electro-elastic material, finite crack, transient, stress intensity factor, diffraction wave

## 目 錄

第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 文獻回顧與探討.....	1
第二章 理論基礎.....	4
2.1 問題描述.....	4
2.2 磁電彈材料控制方程與本構方程.....	5
2.3 邊界條件.....	7
2.4 拉普拉斯轉換(Laplace Transform).....	7
2.5 座標轉換.....	8
2.6 Wiener-Hopf method.....	8
2.7 Cagniard method.....	9
第三章 基本解.....	10
3.1 曳引力型基本解.....	10
3.2 位移型基本解.....	19
第四章 有限長度裂紋之磁電彈材料受動力機械點載荷之暫態響應.....	24
4.1 第一個繞射波.....	24
4.2 第二重繞射.....	28
第五章 結論.....	35
5.1 目前成果.....	35
5.2 尚待研究方向.....	35
參考文獻.....	36
圖表.....	40
圖 1 有限長裂紋之無窮域磁電彈材料受點載荷和入射波之幾何結構示意圖.....	40
圖 2 含半無限長裂紋之無窮域磁電彈材料受指數型負載之幾何結構示意圖.....	41

圖 3 (82)式的積分路徑 .....	42
圖 4 (97)式中各項解析域示意圖 .....	43
圖 5 (133)式中各項解析域示意圖 .....	44
圖 6 (175)式的積分路徑 .....	45
圖 7 (176)式的積分路徑 .....	46
圖 8 施加應力負載在 $h/l = 0.1$ 時之強度因子.....	47
圖 9 施加應力負載在 $h/l = 0.25$ 時之強度因子 .....	48
圖 10 施加應力負載在 $h/l = 0.5$ 時之強度因子.....	49
表 1 $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ 之材料常數 .....	50

## 摘要

本文研究一內含有限長裂紋之無窮域磁電彈材料，於距離裂紋尖端  $h$  的裂紋面上，施予一對反平面機械點載荷，且受到無窮多個繞射波影響之暫態問題。先在拉普拉斯轉換域中，求得含半無限長裂紋之無窮域磁電彈材料的曳引力型和位移型基本解，且在轉換域中利用曳引力型負載之基本解做疊加，可獲得入射波於轉換域中的解；接著再運用座標轉換與位移型基本解做疊加，可得到裂紋尖端的第二次繞射波；如此反覆進行，可得到兩裂紋尖端的無窮多個的繞射波之全場解與應力、電位移、磁感應強度因子；最後再使用做兩次逆轉換以求得時域中之暫態解。最後對結果進行數值計算，做詳細的討論並與文獻上的特例做比較。

關鍵詞：磁電彈材料、有限長裂紋、暫態、應力強度因子、繞射波

## Abstract

Many multiferroic composites, made of piezoelectric and piezomagnetic or magnetostrictive materials can achieve much large magnetoelectric coupling than those in single-phase materials. The magnetoelectric effect in magneto-electro-elastic(MEE) materials has many potential innovative applications in multifunctional devices such as current sensors, magnetic sensors, and magnetic energy harvesters. This study is to investigate the transient response of a finite crack in MEE materials subjected to anti-plane mechanical concentrated load on the crack faces. First, three useful fundamental solutions were derived and the solutions can be determined by superposition of the fundamental solutions in the Laplace transform domain. Then the coordinate transformation and superposition of the displacement fundamental solution were used to obtain the second diffraction wave of the crack tip. Finally, the Cagniard method of Laplace inversion was applied to obtain the transient solutions in time domain. The numerical results were evaluated and discussed in detail.

Keywords: magneto-electro-elastic material, finite crack, transient, stress intensity factor, diffraction wave

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

隨著材料科技與製造技術的改善，磁電彈材料因其擁有獨特的磁電耦合性質，成為學界和工業界中備受關注的焦點，吸引了不少學者投入對此材料的研究。此材料同時具有壓電性(piezoelectricity)與壓磁性(piezomagnetism)，且相較於單一的壓電材料及壓磁材料多出了磁電耦合的特性。這樣的突破，使得磁電彈材料被大量且廣泛運用在制動器、智慧型結構元件與感應器等工業機械的基本元件上。

由於磁電彈複合材料多為脆性材料，在遭受外力時，容易因過大的應力產生預期外的損壞，其中裂紋的產生已成為製造商與使用者想盡力避免的狀況，但卻無法完全迴避的問題。加上可能有許多感應器與制動器在機械中的位置，恰好在維修時不易觸及的地方，導致檢查和更換的困難；如此一來，對於磁電彈材料的動力破壞分析，便顯得愈發重要。本文將利用理論解析與數值計算來研究一內含有限長裂紋之無窮域磁電彈材料，受動力載荷下，裂紋尖端產生的無窮多個繞射波的影響，以模擬現實中感應器等元件有裂紋產生且受動力載荷時的情形。

## 1.2 文獻回顧與探討

1880年，科學家 Curie 兄弟發現，對電氣石(tourmaline)施加一機械應力，會在其表面產生電荷，且電荷量與壓力的大小呈線性關係，這種因為應力而產生電位差的現象即為壓電效應。而磁電效應，是指利用磁場變化誘使電場產生變化或利用電場變化使磁場產生變化的現象。磁壓電複合材料的緣起和磁電耦合之電磁係數的發現，最早可追溯至 Suchtelen (1972)的研究。Boomgaard et al. (1974)利用 Fe-Co-Ti-Ba-O 等元素成功合成出壓電性與壓磁性兼具的磁電彈複合材料。

壓電材料內含裂紋的破壞問題在近年來已有不少學者進行研究，但時至今日，裂紋面之邊界條件的假設仍有爭議，其種類大致可分為幾種。前兩種假設為 Bleustein (1968)所提出，分別為在裂紋面覆蓋一層極薄的導電金屬，且導電電極完美接地，因此裂紋上、下表面之電位能皆為零；第二種假設為真空邊界條件，此假設為上、下兩裂紋間存在一真空區域。利用 Bleustein (1968)的理論進行相關含有裂紋之磁電彈材料的研究與討論有 Bagheri (2017)、Chen and Mai (2012)、Wang et al. (2007)。接著 Parton (1976)假設裂紋面為無曳引力且具可誘電性，但材料之介電常數與壓磁常數和空氣或真空相差甚遠，因此裂紋上、下表面之電位能，應該為不連續。Deeg (1980)假設在裂紋面上電位移的垂直分量為零，就是裂紋面具有不可誘電性。

對於無窮域磁電彈材料中內含單一或多個裂紋的反平面問題分析有 Gao et al. (2003a, b)、Sih and Chen (2003)、Sih et al. (2003)、Chen (2009)，其中 Gao et al. (2003a, b)曾針對兩種不同磁電彈材料間的單一或數個裂紋的靜力問題做出討論，而 Sih and Chen (2003)與 Sih et al. (2003)則探討了 mode-I 以及 mode-II 的裂紋，在不同邊界條件下和不同的初始裂紋角度的破壞力學行為。相較於 Gao et al. (2003a, b)和 Sih et al. (2003)對含有裂紋之磁電彈材料的靜力問題的研究，Chen(2009)對於一擴展裂紋的動力破壞問題之暫態型研究就顯得困難許多，其假設負載施加在一開始的擴展裂紋面上，使用移動座標系，假設裂紋間含流體，電位能與磁位能在材料與流體之交界面連續，本計畫於裂紋面邊界條件之假設，亦將採用此種假設型式。

文獻上研究含半無限長靜止裂紋之無窮域磁電彈材料的學者相當多，因為只有一個裂紋尖端，計算時並不會產生反復繞射的問題。本研究參考毛思瑤(2019)半無限長裂紋之無窮域磁電彈材料求得曳引力及位移型強度因子，在進一步推算其強度因子。本研究相較於毛思瑤(2019)為有限長靜止裂紋之無窮域磁電彈材料，其問題因為含有兩個裂紋尖端，會來回產生無窮多個繞射波，由於數學上的困難，研究者大多利用純數值計算的方法來求解，然而，我們可以使用疊加方法，在解析原問題前，先求得對

半無限長裂紋施加一指數型負載之曳引力和位移基本解，再配合座標轉換的方式求出反向的位移基本解，並利用此基本解在拉普拉斯轉換域中進行疊加，這樣即可求得此複雜問題的解。本計畫將採用此方法來求解此含有限長靜止裂紋之無窮域磁電彈材料之動力破壞問題，將基本解在一次拉普拉斯轉換域中進行疊加，最後再將其中一側之繞射波疊加在另一端，這麼一來可以得到該裂紋尖端受到無限多個繞射波之影響，最後使用 Cagniard method (1939)做二次逆轉換來求得時域中之暫態解。

做逆轉換時，多數學者皆利用數值逆轉換來求得時域解，Aboudi (2017)利用兩次的傅立葉轉換及逆轉換來獲取全場解析解，Ryvkin and Hadar (2015)使用有限項離散傅立葉轉換及有限元素法針對問題進行解析、分析，並運用應力強度因子  $K$  來處理均質材料中裂紋尖端的受力問題。Ing and Wang (2004a, 2004b)則使用 Cagniard method(1939)來進行二次拉普拉斯逆轉換，獲得時域中的解析解。



## 第二章 理論基礎

本章首先針對此研究中探討的問題以及所用到的理論作一些簡單的介紹。在本研究將介紹如何由磁電彈材料控制方程、本構方程以及不同的邊界條件進而推導出曳引力及位移型基本解，再利用疊加方法得到其個別的強度因子。其次則是介紹解析此數學問題的一些重要方法和定義，包含拉普拉斯轉換、座標轉換、Wiener-Hopf method、Cagniard de-Hoop method (de Hoop (1960))等。

### 2.1 問題描述

首先考慮一有限長度裂紋之磁電彈材料，其材料系數可參考表 1，長度為  $l$ ，裂紋面上的點載荷與裂紋尖端  $A$  的距離為  $h$ ，幾何結構示意圖如圖 1 所示。假設有一入射波傳向  $A$  端，且在  $A$  點產生繞射波，隨著時間的推演，繞射波傳遞到  $B$  端且在  $B$  端也產生繞射波，此點產生的繞射波隨著時間的傳遞又到了  $A$  端，並在  $A$  端產生第二個繞射波，以此類推。本計畫可描述裂紋尖端  $A$  當受到無限個繞射波影響下之暫態解析，最後比較其與數值解之差異。

因本計畫要先求出曳引力型和位移型基本解，若考慮的問題為反平面問題，只考慮  $z$  方向上的反平面位移且只與  $(x, y)$  有關，即

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = w(x, y, t) \quad (1)$$

又考慮平面電場與磁場，故

$$E_x = E_x(x, y, t), \quad E_y = E_y(x, y, t), \quad E_z = 0 \quad (2)$$

$$M_x = M_x(x, y, t), \quad M_y = M_y(x, y, t), \quad M_z = 0 \quad (3)$$

其中  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  分別為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向上的位移， $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  為電場強度， $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  為磁場強度。

## 2.2 磁電彈材料控制方程與本構方程

此磁電彈材料之反平面控制方程式如下：

$$C_{44}\nabla^2 w + e_{15}\nabla^2 \phi + f_{15}\nabla^2 \psi = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$e_{15}\nabla^2 w - \varepsilon_{11}\nabla^2 \phi - g_{11}\nabla^2 \psi = 0 \quad (5)$$

$$f_{15}\nabla^2 w - g_{11}\nabla^2 \phi - \mu_{11}\nabla^2 \psi = 0 \quad (6)$$

其中 $w$ 為 $z$ 方向的反平面位移， $\phi$ 為電位能， $\psi$ 為磁位能， $C_{44}$ 為彈性常數， $e_{15}$ 為壓電常數， $\varepsilon_{11}$ 介電常數， $f_{15}$ 為壓磁常數， $g_{11}$ 為磁電常數， $\mu_{11}$ 為磁性常數， $\rho$ 為材料密度， $\nabla^2$ 為兩次拉普拉斯運算子，即

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (7)$$

位於磁電彈材料裂紋間所含一流體，其控制方程如下：

$$\frac{\partial^2 \phi^{(f)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(f)}}{\partial y^2} = 0 = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi^{(f)}}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(f)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(f)}}{\partial y^2} = 0 = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi^{(f)}}{\partial t^2} \quad (9)$$

其中 $\phi^{(f)}$ 為裂紋間流體之電位能， $\psi^{(f)}$ 為裂紋間流體之磁位能， $\varepsilon$ 趨近於 $0^+$ 。

此問題的本構方程式如下：

$$\tau_{xz} = C_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_{15} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

$$\tau_{yz} = C_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y} + f_{15} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} - g_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12)$$

$$D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} - g_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (13)$$

$$B_x = f_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (14)$$

$$B_y = f_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (15)$$

其中 $\tau_{ij}$ 為應力張量， $D_i$ 為電位移， $B_i$ 為磁感應。

因控制方程(4)~(6)為 $w$ 、 $\phi$ 、 $\psi$ 耦合之方程式，為了將其耦合拆解，令兩變數 $\chi$ 、 $\zeta$ 與 $\phi$ 、 $\psi$ 、 $w$ 的關係如下：

$$\phi = \frac{1}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} [(\mu_{11}e_{15} - g_{11}f_{15})w - \mu_{11}\chi + g_{11}\zeta] \quad (16)$$

$$\psi = \frac{-1}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} [(g_{11}e_{15} - \varepsilon_{11}f_{15})w - g_{11}\chi + \varepsilon_{11}\zeta] \quad (17)$$

將(16)、(17)式代入(4)~(6)之控制方程式可得：

$$\nabla^2 w = b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\nabla^2 \chi = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (19)$$

$$\nabla^2 \zeta = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (20)$$

其中 $\varepsilon$ 趨近於 $0^+$ ，且

$$b = \sqrt{\frac{\rho}{\bar{c}_{44}}} = \frac{1}{c} \quad (21)$$

此處 $\bar{c}_{44}$ 為磁電彈耦合係數，且

$$\begin{aligned} \bar{c}_{44} = c_{44} + \frac{1}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} (\mu_{11}e_{15} - g_{11}f_{15}) \\ - \frac{1}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} (g_{11}e_{15} - \varepsilon_{11}f_{15}) \end{aligned} \quad (22)$$

### 2.3 邊界條件

此問題之邊界條件為含有特徵長度的混合型邊界條件，可描述如下：

$$\tau_{yz}(x, \pm\delta, t) = -\tau_0\delta(x+h)H(t), \quad -\infty < x < 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} D_y(x, \pm\delta, t) - D_y^{(f)}(x, \pm\delta, t) \\ = -D_0\delta(x+h)H(t), \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} B_y(x, \pm\delta, t) - B_y^{(f)}(x, \pm\delta, t) \\ = -B_0\delta(x+h)H(t), \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$w(x, 0^+, t) - w(x, 0^-, t) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (26)$$

$$\phi(x, \pm\delta, t) - \phi^{(f)}(x, \pm\delta, t) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (27)$$

$$\psi(x, \pm\delta, t) - \psi^{(f)}(x, \pm\delta, t) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (28)$$

其中 $\delta(\ )$ 為 Dirac delta function， $H(t)$ 為 Heaviside function， $D_y$ 為材料區之電位移， $B_y$ 為材料區之磁感應， $D_y^{(f)}$ 為裂紋間流體之電位移， $B_y^{(f)}$ 為裂紋間流體之磁感應， $\phi$ 、 $\psi$ 分別為材料區之電位能與磁位能， $\phi^{(f)}$ 、 $\psi^{(f)}$ 分別為流體之電位能與磁位能。

式(23) ~ (25)其物理意義是說明在  $x = -h$  處施加之剪應力、電位移與磁感應，其中(24) ~ (25)代表流體與材料區之電位移與磁感應之差值，為施加之電位移與磁感應。(26) ~ (28)說明材料與流體之電位能與磁位能是連續的，且(26)的結果是因上下平面施予大小相等方向相反之負載，因此在 $x > 0$ 的 $x$ 軸上，其位移 $w$ 等於零。

### 2.4 拉普拉斯轉換(Laplace Transform)

本研究探討之控制方程、本構方程等方程式型皆為偏微分方程式，擬採用積分轉換法，將偏微分方程式，經由二次拉普拉斯轉換，變成常微分方程式。首先對時間  $t$  取單邊拉普拉斯轉換，其定義如下：

$$\bar{w}(x, y, s) = \int_0^{\infty} w(x, y, t) e^{-st} dt \quad (29)$$

再由(29)式，對位置  $x$  取雙邊拉普拉斯轉換，其定義如下

$$\bar{w}^*(\lambda, y, s) = \int_0^{\infty} \bar{w}(x, y, s) e^{-s\lambda x} dx \quad (30)$$

單邊與雙邊拉普拉斯轉換的逆轉換則可以下列兩式表示

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{w}^*(\lambda, y, s) e^{s\lambda x} d(s\lambda) \quad (31)$$

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{w}(x, y, s) e^{st} ds \quad (32)$$

其中  $\Gamma$  表示  $\lambda$  的複數平面上沿著虛軸從  $-i\infty$  到  $i\infty$  的積分路徑。

由於本計畫之邊界條件，為擁有一特徵長度  $h$  之混合型邊界問題，於數學上無法直接解析，因此選擇運用疊加之方式。解析原問題前，擬先求得於裂紋面施加一指數型負載  $e^{s\eta x}$  的基本解，其物理意義是相對於有一點載荷，以  $1/\eta$  之速度向左移動。

## 2.5 座標轉換

當右裂紋尖端的繞射波行進到左裂紋尖端時，我們將進行座標轉換，目的是要以左裂紋尖端來做疊加。由圖 1，我們將原本的負載在一次轉換域中用曳引力型基本解作疊加，可得到  $A$  點的第一次繞射波。再將座標轉換後，利用位移型基本解在一次轉換域做疊加，可得到  $B$  點的第一次繞射波；再將  $B$  點的第一次繞射波做一次座標轉換，在  $A$  點做疊加，就可以得到  $A$  點第二次的繞射波。以此類推，用相同的做法可以得到載兩裂紋尖端受  $N$  次繞射之影響。

## 2.6 Wiener-Hopf method

Wiener-Hopf 方法常被應用於混合型邊界條件之偏微分方程的求解，其技巧乃以商分解，將一個複數函數拆解為正(+)、負(-)兩個函數，兩個函數分別於複數平面上的某部分可解析，本計畫將運用此方法進行拆解偏微分方程以獲得解析解。

## 2.7 Cagniard method

Cagniard (1939)方法，或者被稱為 Cagniard de-Hoop method (de Hoop (1960))，其原理是利用變數變換將積分路徑改變，把轉換域中的 $\bar{f}^*(\lambda, y, s)$ 直接做兩次逆轉換得到時域中的 $f(x, y, t)$ 。此技巧能將兩次逆轉換的工作一次完成，對於波傳問題的研究分析，有十分廣泛的應用及可觀的貢獻。

本計畫擬在獲得兩次拉普拉斯轉換域中之全場解析解之後，利用 Cagniard (1939)方法二次逆轉換法，求得在時間域中之暫態解。最後，再對其暫態解進行數值計算，對結果做詳細的討論並與文獻上的特例做比較。

### 第三章 基本解

#### 3.1 曳引力型基本解

考慮一無窮域靜止之磁電彈材料，幾何結構示意圖如 圖 2 所示。本計畫假設上、下兩裂紋面間含一流體。

對邊界條件(23)取單邊、雙邊拉普拉斯轉換，可得

$$\bar{\tau}_{yz}^*(\lambda, y, s) = -\frac{\tau_0}{s} e^{s\lambda h} \quad (33)$$

對(33)式進行一次逆轉換，可得

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = -\frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} e^{s\lambda(x+h)} d\lambda \quad (34)$$

觀察邊界條件(34)，可知其為空間函數 $e^{s\eta x}$ 的積分式，所以若能先求得一次拉普拉斯轉換域中的此指數型負載之解，即可利用此基本解進行疊加而得到原問題的解。此指數型負載的邊界條件可以描述如下：

$$\bar{\tau}_{yz}(x, 0, s) = e^{s\eta x}, \quad -\infty < x < 0 \quad (35)$$

$$\bar{w}(x, 0, s) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (36)$$

$$\bar{D}_y(x, \pm\delta, s) - \bar{D}_y^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (37)$$

$$\bar{B}_y(x, \pm\delta, s) - \bar{B}_y^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (38)$$

$$\bar{\phi}(x, \pm\delta, s) - \bar{\phi}^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (39)$$

$$\bar{\psi}(x, \pm\delta, s) - \bar{\psi}^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (40)$$

其中 $\bar{D}_y$ 、 $\bar{D}_y^{(f)}$ 、 $\bar{B}_y$ 、 $\bar{B}_y^{(f)}$ 、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\phi}^{(f)}$ 、 $\bar{\psi}$ 、 $\bar{\psi}^{(f)}$ 為一次拉普拉斯轉換域中材料與流體的電位移、磁位移、電位能與磁位能， $\delta$ 趨近於 $0^+$

對(18)(19)(20)做雙邊拉普拉斯轉換取通解，可得

$$\bar{w}^*(\lambda, y, s) = \operatorname{sgn}(y) A(s, \lambda) e^{-s\alpha|y|}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (41)$$

$$\bar{\chi}^*(\lambda, y, s) = \operatorname{sgn}(y) B(s, \lambda) e^{-s\beta|y|}, \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (42)$$

$$\bar{\zeta}^*(\lambda, y, s) = \operatorname{sgn}(y) C(s, \lambda) e^{-s\beta|y|}, \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (43)$$

其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為一個  $s$  與  $\lambda$  的未知函數

$$\alpha(\lambda) = \sqrt{b^2 - \lambda^2} \quad (44)$$

$$\beta(\lambda) = \sqrt{\varepsilon^2 - \lambda^2} \quad (45)$$

對(8)(9)做雙邊拉普拉斯轉換並取通解，可得

$$\bar{\phi}^{*(f)} = D_-(s, \lambda) e^{-s\beta y} + D_+(s, \lambda) e^{s\beta y} \quad (46)$$

$$\bar{\psi}^{*(f)} = E_-(s, \lambda) e^{-s\beta y} + E_+(s, \lambda) e^{s\beta y} \quad (47)$$

其中  $D_-$ 、 $D_+$ 、 $E_-$ 、 $E_+$  為一個  $s$  與  $\lambda$  的未知函數。

首先考慮  $y > 0$  上半平面的情況，並令

$$c_1 = \frac{\mu_{11}e_{15} - g_{11}f_{15}}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} \quad (48)$$

$$c_2 = \frac{\varepsilon_{11}f_{15} - g_{11}e_{15}}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2} \quad (49)$$

$$m_0 = \mu_{11}\varepsilon_{11} - (g_{11})^2 \quad (50)$$

對(16)(17)做拉普拉斯轉換，並將(41)~(43)帶入，再根據(39)(40)可以得到

$$\begin{aligned} c_1 A e^{-s\alpha y} + \frac{-\mu_{11}}{m_0} B e^{-s\beta y} + \frac{g_{11}}{m_0} C e^{-s\beta y} \\ = D_- e^{-s\beta y} + D_+ e^{s\beta y} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} c_2 A e^{-s\alpha y} + \frac{g_{11}}{m_0} B e^{-s\beta y} + \frac{-\varepsilon_{11}}{m_0} C e^{-s\beta y} \\ = E_- e^{-s\beta y} + E_+ e^{s\beta y} \end{aligned} \quad (52)$$

對(35)(36)再做一次拉普拉斯轉換



$$\bar{\tau}_{yz}^*(x, \delta, s) = \frac{1}{s(\eta-\lambda)} + \bar{\tau}_+^* \quad (53)$$

$$\bar{w}^*(x, \delta, s) = \bar{w}_-^* = A(s, \lambda) \quad (54)$$

其中 $\bar{\tau}_+^*$ 代表在 $x > 0$ 時的應力張量， $\bar{w}_-^*$ 代表在裂紋面上 $x < 0$ 的位移。

對本構方程(10)~(15)取單邊雙邊拉普拉斯轉換，將(16)(17)同取拉普拉斯轉換再帶入(10)~(15)並化簡，得

$$\bar{\tau}_{xz}^* = \bar{C}_{44}s\lambda\bar{w}^* - s\lambda c_1\bar{\chi}^* - s\lambda c_2\bar{\zeta}^* \quad (55)$$

$$\bar{\tau}_{yz}^* = \bar{C}_{44} \frac{d\bar{w}^*}{dy} - c_1 \frac{d\bar{\chi}^*}{dy} - c_2 \frac{d\bar{\zeta}^*}{dy} \quad (56)$$

$$\bar{D}_x^* = s\lambda\bar{\chi}^* \quad (57)$$

$$\bar{D}_y^* = \frac{d\bar{\chi}^*}{dy} \quad (58)$$

$$\bar{B}_x^* = s\lambda\bar{\zeta}^* \quad (59)$$

$$\bar{B}_y^* = \frac{d\bar{\zeta}^*}{dy} \quad (60)$$

將(41)~(43)、(50)帶入(56)，得

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yz}^*(\lambda, \delta, s) &= \bar{C}_{44}(-s\alpha)A + c_1(s\beta)B + c_2(s\beta)C \\ &= \frac{1}{s(\eta-\lambda)} + \bar{\tau}_+^* \end{aligned} \quad (61)$$

裂紋間流體之本構方程如下

$$D_x^{(f)} = -\varepsilon_{11}^{(f)} \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial x} - g_{11}^{(f)} \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial x} \quad (62)$$

$$D_y^{(f)} = -\varepsilon_{11}^{(f)} \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial y} - g_{11}^{(f)} \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial y} \quad (63)$$

$$B_x^{(f)} = -g_{11}^{(f)} \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial x} - \mu_{11}^{(f)} \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial x} \quad (64)$$

$$B_y^{(f)} = -g_{11}^{(f)} \frac{\partial \phi^{(f)}}{\partial y} - \mu_{11}^{(f)} \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial y} \quad (65)$$

其中  $D_i^{(f)}$  為裂紋間流體之電位移， $B_i^{(f)}$  為裂紋間流體之磁感應。

對(63)(65)取單邊雙邊拉普拉斯轉換，同時討論  $y < 0$  與  $y > 0$  的情況，再將(46)(47)帶入，由邊界條件(37)(38)，同時考慮  $y = \pm\delta$  的情形。將其結果帶回(37)~(40)解聯立，將  $B$ 、 $C$ 、 $D_+$ 、 $E_+$  表示成  $A$  的函數，獲得以下結果

$$B = \frac{Ae^{(-s\alpha\delta+s\beta\delta)} \cosh(s\beta\delta)}{f_\varepsilon f_\mu - f_g^2} [f_\mu (e_{15} \varepsilon_{11}^{(f)}) - f_g (e_{15} g_{11}^{(f)} + f_{15} \varepsilon_{11}^{(f)}) + f_\varepsilon (f_{15} g_{11}^{(f)})] \quad (66)$$

$$C = \frac{Ae^{(-s\alpha\delta+s\beta\delta)} \cosh(s\beta\delta)}{f_\varepsilon f_\mu - f_g^2} [f_\varepsilon (f_{15} \mu_{11}^{(f)}) - f_g (f_{15} g_{11}^{(f)} + e_{15} \mu_{11}^{(f)}) + f_\mu (e_{15} g_{11}^{(f)})] \quad (67)$$

$$D_+ = -D_- = \frac{e_{15} f_\mu - f_{15} f_g}{2(f_\varepsilon f_\mu - f_g^2)} A e^{(-s\alpha\delta)} \quad (68)$$

$$E_+ = -E_- = \frac{f_{15} f_\varepsilon - e_{15} f_g}{2(f_\varepsilon f_\mu - f_g^2)} A e^{(-s\alpha\delta)} \quad (69)$$

其中

$$f_\varepsilon = \cosh(s\beta\delta) \varepsilon_{11}^{(f)} + \sinh(s\beta\delta) \varepsilon_{11} \quad (70)$$

$$f_g = \cosh(s\beta\delta) g_{11}^{(f)} + \sinh(s\beta\delta) g_{11} \quad (71)$$

$$f_\mu = \cosh(s\beta\delta) \mu_{11}^{(f)} + \sinh(s\beta\delta) \mu_{11} \quad (72)$$

假設裂紋間流體無磁電交互作用， $g_{11}^{(f)} \rightarrow 0$ ，同時取  $\delta \rightarrow 0$  但仍保留  $\sinh(s\beta\delta)$ ，再令  $\sinh(s\beta\delta) \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^{(f)}} \rightarrow \lambda_e$ ； $\sinh(s\beta\delta) \frac{\mu_{11}}{\mu_{11}^{(f)}} \rightarrow \lambda_m$ 。

當  $\lambda_e \rightarrow 0$  以及  $\lambda_m \rightarrow 0$ ，代表裂紋面可導電亦可導磁； $\lambda_e \rightarrow \infty$  以及  $\lambda_m \rightarrow \infty$  則代表裂紋面是不導電亦不導磁； $\lambda_e \rightarrow \infty$  以及  $\lambda_m \rightarrow 0$  代表裂紋面是不導電但可導磁； $\lambda_e \rightarrow 0$  以及  $\lambda_m \rightarrow \infty$  代表裂紋面可導電但不導磁。通過令  $\lambda_e$ 、 $\lambda_m$ ，(66)(67) 便可改寫成以下形式

$$B = P_B \times A \quad (73)$$

$$C = P_C \times A \quad (74)$$

其中

$$P_B = \frac{e_{15}\mu_{11}\varepsilon_{11}(\lambda_m+1) - f_{15}\varepsilon_{11}g_{11}\lambda_m}{\mu_{11}\varepsilon_{11}(\lambda_e+1)(\lambda_m+1) - \lambda_e\lambda_m g_{11}^2} \quad (75)$$

$$P_C = \frac{f_{15}\mu_{11}\varepsilon_{11}(\lambda_e+1) - e_{15}\mu_{11}g_{11}\lambda_e}{\mu_{11}\varepsilon_{11}(\lambda_e+1)(\lambda_m+1) - \lambda_e\lambda_m g_{11}^2} \quad (76)$$

將(51)(73)(74)帶入(61)並化簡，得到以下式

$$\begin{aligned} -\bar{C}_{44} \times A(\alpha - k_f^2 \beta) &= -\bar{C}_{44} \times \bar{w}_-^*(\alpha - k_f^2 \beta) \\ &= \frac{1}{s^2(\eta - \lambda)} + \frac{\bar{\tau}_+^*}{s} \end{aligned} \quad (77)$$

其中

$$k_f^2 = [c_1 P_B + c_2 P_C] \times \frac{1}{\bar{C}_{44}} \quad (78)$$

利用 Wiener Hopf Method 來拆解(77)式

先是令  $G(\lambda) = -\bar{C}_{44}(\alpha - k_f^2 \beta)$ ，得到以下方程式

$$G(\lambda) \times \bar{w}_-^* = \frac{1}{s^2(\eta - \lambda)} + \frac{\bar{\tau}_+^*}{s} \quad (79)$$

對  $G(\lambda)$  進行改寫，得到

$$G(\lambda) = \frac{-\bar{C}_{44}(1 - k_f^2)}{c_{bg}} \sqrt{1 + C_{bg}\lambda} \sqrt{1 - C_{bg}\lambda} \cdot S(\lambda) \quad (80)$$

其中

$$C_{bg} = \sqrt{\frac{\bar{C}_{44}}{\rho}} \sqrt{1 - k_f^4} \quad (81)$$

$$S(\lambda) = \frac{b\sqrt{1+c\lambda}\sqrt{1-c\lambda} - k_f^2\sqrt{\varepsilon+\lambda}\sqrt{\varepsilon-\lambda}}{\sqrt{1+C_{bg}\lambda}\sqrt{1-C_{bg}\lambda}} k \quad (82)$$

$$c = \frac{1}{b} \quad (83)$$

$$c_{bg} = \frac{1}{b_{bg}} \quad (84)$$

$$k = \frac{c_{bg}}{1-k_f^2} \quad (85)$$

對 $S(\lambda)$ 進行拆解

$$S(\lambda) = S_+(\lambda)S_-(\lambda) \quad (86)$$

分解成在正方向解析的 $S_+(\lambda)$ ，與在負方向解析的 $S_-(\lambda)$ ，對其取自然對數得到

$$\ln S(\lambda) = \ln S_+(\lambda) + \ln S_-(\lambda) \quad (87)$$

根據柯西積分公式，得到下列方程式

$$\ln S(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\ln S(z)}{z-\lambda} dz \quad (88)$$

根據(85)(88)式對 $S(\lambda)$ 進行路徑積分，其路徑  $\Gamma$  如圖 3 所示，分支切割在  $\frac{-1}{c_{bg}} <$

$$\lambda < \frac{-1}{c}, \quad \frac{-1}{c} < \lambda < -\varepsilon, \quad \varepsilon < \lambda < \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{c} < \lambda < \frac{1}{c_{bg}}$$

$\Gamma = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9} + \textcircled{10}$ ，又因為路徑 $\textcircled{2}$ 與 $\textcircled{5}$ 、 $\textcircled{7}$ 與 $\textcircled{10}$ 積分方向相反，故 $\textcircled{2} + \textcircled{5} = \textcircled{7} + \textcircled{10} = 0$ ，且 $\textcircled{1} + \textcircled{6} = 0$ ，因為當 $|z|$ 趨近於 $\infty$ ， $S(z) \rightarrow 1$ ， $\ln S(z)$ 會趨近於 $0$ 。

所以， $\Gamma = \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{8} + \textcircled{9}$ ，同時也是分支切割的貢獻。再將路徑  $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$ ，其中  $\Gamma_+ = \textcircled{3} + \textcircled{4}$ ， $\Gamma_- = \textcircled{8} + \textcircled{9}$ 。

$$\begin{aligned} \ln S(\lambda) &= \ln S_+(\lambda) + \ln S_-(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{\ln S(z)}{z-\lambda} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_-} \frac{\ln S(z)}{z-\lambda} dz \end{aligned} \quad (89)$$

經過路徑積分與化簡，得到 $S_+(\lambda)$ 與 $S_-(\lambda)$

$$S_+(\lambda) = \sqrt{\frac{\frac{1}{c_{bg}} + \lambda}{\frac{1}{c} + \lambda}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{c}} \tan^{-1} \left[ \frac{k_f^2 \sqrt{z^2 - \varepsilon^2}}{\alpha(-z)} \right] \frac{dz}{z+\lambda} \right\} \quad (90)$$

$$S_-(\lambda) = \sqrt{\frac{\frac{1}{c_{bg}} - \lambda}{\frac{1}{c} - \lambda}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{c}} \tan^{-1} \left[ \frac{k_f^2 \sqrt{z^2 - \varepsilon^2}}{\alpha(z)} \right] \frac{dz}{z-\lambda} \right\} \quad (91)$$

令

$$Q_{\pm}(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{c}} \tan^{-1} \left[ \frac{k_f^2 \sqrt{z^2 - \varepsilon^2}}{\alpha(\bar{z})} \right] \frac{dz}{z \pm \lambda} \right\} \quad (92)$$

則(90)(91)可改寫成以下形式

$$S_+(\lambda) = \sqrt{\frac{\frac{1}{c} + \lambda}{C_{bg}}} \cdot Q_+(\lambda) \quad (93)$$

$$S_-(\lambda) = \sqrt{\frac{\frac{1}{c} - \lambda}{C_{bg}}} \cdot Q_-(\lambda) \quad (94)$$

根據 (80)(87)對(79)進行改寫

$$\begin{aligned} & \frac{-\bar{c}_{44}(1-k_f^2)}{\sqrt{C_{bg}}} \sqrt{1-C_{bg}\lambda} \cdot S_-(\lambda) \bar{w}_-^* \\ &= \frac{\sqrt{C_{bg}}}{s^2(\eta-\lambda) \sqrt{1+C_{bg}\lambda S_+(\lambda)}} + \frac{\sqrt{C_{bg}} \bar{r}_+^*}{s \sqrt{1+C_{bg}\lambda S_+(\lambda)}} \end{aligned} \quad (95)$$

令  $F_+(\lambda) = \frac{\sqrt{\frac{1}{c} + \lambda}}{(\frac{1}{c} + \lambda) Q_+(\lambda)}$ ，可整理得下列方程式

$$\begin{aligned} & -\bar{c}_{44}(1-k_f^2) \frac{(b_{bg}-\lambda)}{\sqrt{b-\lambda}} Q_-(\lambda) \bar{w}_-^* - \frac{F_+(\eta)}{s^2(\eta-\lambda)} \\ &= \frac{F_+(\lambda) - F_+(\eta)}{s^2(\eta-\lambda)} + \frac{F_+(\lambda) \bar{r}_+^*}{s} \end{aligned} \quad (96)$$

在(96)式中等號兩邊皆減去在  $(\eta = \lambda)$  時極點之貢獻，此時根據圖 4 可以發現等號左邊各項均在  $\text{Re}(\lambda) < 0$  之範圍解析，而等號右邊各項則在  $\text{Re}(\lambda) > -\varepsilon$  之範圍解析，事實上以上所描述之範圍正代表(79)式在  $\lambda$  平面上均到處解析，故可以令(96)式等於一解析之完全函數(Entire function)  $E^*(\lambda)$ ，如下：

$$\begin{aligned} & -\bar{c}_{44}(1-k_f^2) \frac{(b_{bg}-\lambda)}{\sqrt{b-\lambda}} Q_-(\lambda) \bar{w}_-^* - \frac{F_+(\eta)}{s^2(\eta-\lambda)} \\ &= \frac{F_+(\lambda) - F_+(\eta)}{s^2(\eta-\lambda)} + \frac{F_+(\lambda) \bar{r}_+^*}{s} = E^*(\lambda) \end{aligned} \quad (97)$$

根據李維定理(Liouville's theorem) 一個在複數平面上處處均解析並有界之完全函數為一個常數，因此只要決定此常數便可求出 $\bar{\tau}_+$ 與 $\bar{w}_-$ 。

在(97)式中，當 $x \rightarrow 0^+$ 時 $\bar{\tau}_+(x, s)$ 的收斂行為為 $O(x^{-1/2})$ ， $\bar{w}_-$ 則為 $O(x^{1/2})$ ，根據阿貝爾定理(Abel theorem)， $|\lambda| \rightarrow \infty$ 時 $\bar{\tau}_+$ 與 $F_+(\lambda)$ 的收斂行為為 $O(\lambda^{-1/2})$ ，而 $\bar{w}_-$ 與完全函數 $E^*(\lambda)$ 之收斂行為為 $O(\lambda^{-3/2})$ 。所以，當 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 時，此完全函數 $E^*(\lambda)$ 便趨近於零，也就是 $E^*(\lambda) = 0$ 。由此可得式子如下：

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} E^*(\lambda) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left[ \frac{F_+(\lambda) - F_+(\eta)}{s^2(\eta - \lambda)} + \frac{F_+(\lambda)\bar{\tau}_+}{s} \right] = 0 \quad (98)$$

因此利用(97)式可以求出 $\bar{\tau}_+$ 與 $\bar{w}_-$ ，如下：

$$\bar{\tau}_+ = \frac{1}{s^2(\eta - \lambda)} \left[ \frac{F_+(\eta)}{F_+(\lambda)} - 1 \right] \quad (99)$$

$$\bar{w}_- = \frac{F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda}}{-s^2\bar{c}_{44}(1-k_f^2)(\eta-\lambda)(\lambda-b_{bg})Q_-(\lambda)} \quad (100)$$

將(99) (100)式帶入(41) ~ (43)，同時帶回本構方程(55) ~ (60)，並且假設在材料上半平面， $y > 0$ 之情況下，將其作一次逆轉換，得到在一次拉普拉斯轉換域中之曳引力型基本解，如下：

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\alpha y + s\lambda x}}{s(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz}(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{c}_{44}\lambda F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\alpha y + s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \\ &\quad - \frac{\bar{c}_{44}k_f^2}{2\pi i} \int \frac{\lambda F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y + s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \end{aligned} \quad (102)$$

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{c}_{44}\alpha(\lambda)F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\alpha y + s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda$$

$$+ \frac{\bar{c}_{44}k_f^2}{2\pi i} \int \frac{\beta(\lambda)F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y+s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (103)$$

$$\bar{D}_x(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_B \lambda F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y+s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (104)$$

$$\bar{D}_y(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-P_B \beta(\lambda)F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y+s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (105)$$

$$\bar{B}_x(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_C \lambda F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y+s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (106)$$

$$\bar{B}_y(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-P_C \beta(\lambda)F_+(\eta)\sqrt{b-\lambda} e^{-s\beta y+s\lambda x}}{(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)(\eta-\lambda)(-\bar{c}_{44})(1-k_f^2)} d\lambda \quad (107)$$

接著我們要求得曳引力型強度因子，而應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子的定義如下

$$\text{應力強度因子:} \quad \bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi r} \bar{\tau}_{yz} \Big|_{y=0} \quad (108)$$

$$\text{電位移強度因子:} \quad \bar{K}_{III}^{(D)}(s) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi r} \bar{D}_y \Big|_{y=0} \quad (109)$$

$$\text{磁感應強度因子:} \quad \bar{K}_{III}^{(B)}(s) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi r} \bar{B}_y \Big|_{y=0} \quad (110)$$

由上式所得曳引力型基本解三種基本解之 $\bar{\tau}_{yz}$ 、 $\bar{D}_y$ 、 $\bar{B}_y$ ，帶入(108)~(110)，可以分別得到曳引力型應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子如下：

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = \frac{-\sqrt{2}F_+(\eta)}{\sqrt{s}} \quad (111)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = \frac{-\sqrt{2}P_B F_+(\eta)}{\sqrt{s}\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \quad (112)$$

$$\bar{K}_{III}^{(B)}(s) = \frac{-\sqrt{2}P_c F_+(\eta)}{\sqrt{s}\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \quad (113)$$

### 3.2 位移型基本解

不同於曳引力基本解，此指數型負載的邊界條件可以描述如下：

$$\bar{\tau}_{yz}(x, 0, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (114)$$

$$\bar{w}(x, \pm\delta, s) - \bar{w}^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 2e^{s\eta x}, \quad 0 < x < \infty \quad (115)$$

$$\bar{D}_y(x, \pm\delta, s) - \bar{D}_y^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (116)$$

$$\bar{B}_y(x, \pm\delta, s) - \bar{B}_y^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (117)$$

$$\bar{\phi}(x, \pm\delta, s) - \bar{\phi}^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (118)$$

$$\bar{\psi}(x, \pm\delta, s) - \bar{\psi}^{(f)}(x, \pm\delta, s) = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (119)$$

其中 $\bar{D}_y$ 、 $\bar{D}_y^{(f)}$ 、 $\bar{B}_y$ 、 $\bar{B}_y^{(f)}$ 、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\phi}^{(f)}$ 、 $\bar{\psi}$ 、 $\bar{\psi}^{(f)}$ 為一次拉普拉斯轉換域中材料與流體的電位移、磁位移、電位能與磁位能， $\delta$ 趨近於 $0^+$ 。

對邊界條件(114)(115)取雙邊拉普拉斯轉換，得

$$\bar{\tau}_{yz}^*(x, \delta, s) = +\bar{\tau}_+^*, \quad -\infty < x < 0 \quad (120)$$

$$\bar{w}^*(x, 0^+, t) - \bar{w}^*(x, 0^-, t) = 2 \left[ \left( \frac{-1}{s(\eta-\lambda)} \right) + \bar{w}_-^* \right] \quad (121)$$

其中

$$\left( \frac{-1}{s(\eta-\lambda)} \right), \quad 0 < x < \infty \quad (122)$$

$$\bar{w}_-^*, \quad -\infty < x < 0 \quad (123)$$

將(41)代入(115)可以得到

$$A = \left( \frac{-1}{s(\eta-\lambda)} \right) + \bar{w}_-^* \quad (124)$$



與曳引力型基本解雷同，(41)~(43)以及(46)(47)之通解依然成立， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D_+$ 與 $D_-$ 、 $E_+$ 與 $E_-$ 之間的關係式依然成立，其中(61)須改寫如下：

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{yz}^*(\lambda, \delta, s) &= \bar{C}_{44}(-s\alpha)A + c_1(s\beta)B + c_2(s\beta)C \\ &= +\bar{\tau}_+^*\end{aligned}\quad (125)$$

將(66)~(76)、(78)代入(125)後，得到

$$-\bar{C}_{44} \times sA(\alpha - k_f^2\beta) = +\bar{\tau}_+^* \quad (126)$$

將(124)代入(126)後，得到

$$-\bar{C}_{44} \times s \left[ \left( \frac{-1}{s(\eta-\lambda)} \right) + \bar{w}_-^* \right] \times (\alpha - k_f^2\beta) = +\bar{\tau}_+^* \quad (127)$$

其中

$$k_f^2 = [c_1P_B + c_2P_C] \times \frac{1}{\bar{C}_{44}} \quad (128)$$

對(127)進行 Wiener Hopf 拆解，與曳引力基本解相似作法，可得下列方程式

$$\begin{aligned}-\bar{C}_{44}(1 - k_f^2) \times \frac{1}{F_-(\lambda)} \times s\bar{w}_-^* + \frac{\bar{C}_{44}(1-k_f^2)}{(\eta-\lambda)} \left[ \frac{1}{F_-(\lambda)} - \frac{1}{F_-(\eta)} \right] \\ = F_+(\lambda)\bar{\tau}_+^* - \frac{\bar{C}_{44}(1-k_f^2)}{(\eta-\lambda)F_-(\eta)}\end{aligned}\quad (129)$$

其中

$$Q_{\pm}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \tan^{-1} \left[ \frac{k_f^2 \sqrt{z^2 - \varepsilon^2}}{\alpha(\mp z)} \right] \frac{dz}{z \pm \lambda} \right\} \quad (130)$$

$$F_+(\lambda) = \frac{\sqrt{b+\lambda}}{(b_{bg}+\lambda)Q_+(\lambda)} \quad (131)$$

$$b_{bg} = \frac{1}{c_{bg}} = \frac{b}{\sqrt{1-k_f^4}} \quad (132)$$

在(129)式中等號兩邊皆減去在 $(\eta = \lambda)$ 時極點之貢獻，此時根據圖 5，等號左邊各項均在 $\text{Re}(\lambda) < 0$ 之範圍解析，而等號右邊各項則在 $\text{Re}(\lambda) > -\varepsilon$ 之範圍解析，事實上以

上所描述之範圍正代表(129)式在  $\lambda$  平面上均到處解析，故可以令(129)式等於一解析之完全函數(Entire function)  $E^*(\lambda)$ ，如下：

$$\begin{aligned} & -\bar{c}_{44}(1-k_f^2) \times \frac{1}{F_-(\lambda)} \times s\bar{w}_-^* + \frac{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)}{(\eta-\lambda)} \left[ \frac{1}{F_-(\lambda)} - \frac{1}{F_-(\eta)} \right] \\ & = F_+(\lambda)\bar{\tau}_+^* - \frac{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)}{(\eta-\lambda)F_-(\eta)} = E^*(\lambda) \end{aligned} \quad (133)$$

根據李維定理(Liouville's theorem) 一個在複數平面上處處均解析並有界之完全函數為一個常數，因此只要決定此常數便可求出  $\bar{\tau}_+^*$  與  $\bar{w}_-^*$ 。

在(133)式中，當  $x \rightarrow 0^+$  時  $\bar{\tau}_+^*(x, s)$  的收斂行為為  $O(x^{-1/2})$ ， $\bar{w}_-^*$  則為  $O(x^{1/2})$ ，根據阿貝爾定裡(Abel theorem)， $|\lambda| \rightarrow \infty$  時  $\bar{\tau}_+^*$  與  $F_+(\lambda)$  的收斂行為為  $O(\lambda^{-1/2})$ ，而  $\bar{w}_-^*$  與完全函數  $E^*(\lambda)$  之收斂行為為  $O(\lambda^{-3/2})$ 。所以，當  $|\lambda| \rightarrow \infty$  時，此完全函數  $E^*(\lambda)$  便趨近於零，也就是  $E^*(\lambda) = 0$ 。由此可得式子如下：

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} E^*(\lambda) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left[ F_+(\lambda)\bar{\tau}_+^* - \frac{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)}{(\eta-\lambda)F_-(\eta)} \right] = 0 \quad (134)$$

因此利用(133)式可以求出  $\bar{\tau}_+^*$  與  $\bar{w}_-^*$ ，如下：

$$\bar{\tau}_+^* = \frac{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)(b_{bg}+\lambda)Q_+(\lambda)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}\sqrt{b+\lambda}} \times e^{-s\alpha y} \quad (135)$$

$$A(s, \lambda) = \bar{w}_-^* = \frac{(1-k_f^2)\sqrt{b-\lambda}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{s(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \times e^{-s\alpha y} \quad (136)$$

將(135)(136)之結果帶回(41)~(43)以及本構方程(55)~(60)，並且假設在材料上半平面， $y > 0$  之情況下，再將其作一次逆轉換，得到在一次拉普拉斯轉換域中之位移型基本解，如下：

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1-k_f^2)\sqrt{b-\lambda}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\ & \quad \times e^{-s\alpha y + s\lambda x} d\lambda \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{xz}(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-\bar{c}_{44}(1-k_f^2)s\lambda\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\alpha y+s\lambda x} d\lambda \\
&+ \frac{\bar{c}_{44}k_f^2}{2\pi i} \int \frac{s\lambda(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{yz}(x, y, s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)s\alpha(\lambda)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\alpha y+s\lambda x} d\lambda \\
&- \frac{\bar{c}_{44}k_f^2}{2\pi i} \int \frac{s\beta(\lambda)(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_x(x, y, s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_B s\lambda(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_y(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_B s\beta(\lambda)(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_x(x, y, s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_c s\lambda(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (142)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_y(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_c s\beta(\lambda)(1-k_f^2)\sqrt{b-\bar{\lambda}}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{(\eta-\lambda)\sqrt{b-\eta}(b_{bg}-\lambda)Q_-(\lambda)} \\
&\quad \times e^{-s\beta y+s\lambda x} d\lambda \quad (143)
\end{aligned}$$

接著將位移型基本解之 $\bar{\tau}_{yz}$ 、 $\bar{D}_y$ 、 $\bar{B}_y$ 代入(108)~(110)，可以分別得到位移型應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子如下：

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = \frac{-(\bar{c}_{44})\sqrt{2s}(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)}{\sqrt{b-\eta}} \quad (144)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = \frac{-\sqrt{2s}(1-k_f^2)P_B\sqrt{b-\eta}}{(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)} \quad (145)$$

$$\bar{K}_{III}^{(B)}(s) = \frac{-\sqrt{2s}(1-k_f^2)P_C\sqrt{b-\eta}}{(b_{bg}-\eta)Q_-(\eta)} \quad (146)$$

#### 第四章 有限長度裂紋之磁電彈材料受動力機械點載荷之暫態響應

首先考慮一有限長度裂紋之磁電彈材料，長度為  $l$ ，裂紋面上的點載荷與裂紋尖端  $A$  的距離為  $h$ ，幾何結構示意圖如圖 1 所示。此裂紋兩端點分別是  $A$  端和  $B$  端。兩端點皆有各自的座標系統，分別為  $(x, y)$ 、 $(x', y')$ 。假設有一入射波打向  $A$  端，會在  $A$  點產生繞射波；隨著時間的推演，繞射波也會在  $B$  端也產生繞射波，此  $B$  點產生的繞射波隨著時間的傳遞又會到了  $A$  端，並產生  $A$  點的第二個繞射波；以此類推，此問題將會產生無窮多個繞射波。本研究可探討裂紋尖端  $A$  當受到無限多個繞射波影響下之暫態解析，利用拉普拉斯轉換域疊加方法來處理此包含特徵長度的問題。

##### 4.1 第一個繞射波

此章節要探討  $A$  點的第一個繞射波的影響，而產生此繞射波的原因為一入射波傳遞到裂紋尖端產生，要得到此影響，可以利用上一章節所求得的曳引力型基本解之  $\bar{\tau}_{yz}$ 、 $\bar{D}_y$ 、 $\bar{B}_y$ 。

當一入射波通過  $A$  端時，會在  $A$  點產生繞射波，此問題之邊界條件為含有特徵長度的混合型邊界條件，可描述如下：

$$\tau_{yz}(x, 0^+, t) = -\tau_0 \delta(x + h) H(t), \quad -\infty < x < 0 \quad (147)$$

對邊界條件(147)取單邊、雙邊拉普拉斯轉換，可得

$$\bar{\tau}_{yz}^*(\lambda, y, s) = -\frac{\tau_0}{s} e^{s\lambda h} \quad (148)$$

對(148)式進行一次逆轉換，可得

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = -\frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} e^{s\lambda(x+h)} d\lambda \quad (149)$$

(149)式為入射波在  $A$  點產生的貢獻，令  $\lambda = \eta$ ，整式可改寫成

$$\bar{\tau}_{yz}^i = \frac{-\tau_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{s\eta x} e^{s\eta h} d\eta \quad (150)$$

由(150)式可發現含有 $e^{s\eta x}$ 的函數，而在前一章節已求得的基本解即為 $e^{s\eta x}$ ，因此這裡的 $e^{s\eta x}$ 可以用(101)式取代，其中令 $\eta = \eta_1$ ， $\lambda = \eta_2$ 即可以得到繞射波在A點產生的貢獻，此波為入射波通過A點所產生的第一個繞射波並且用座標 $(x, y)$ 表示，得到的式子如下：

$$\begin{aligned} \bar{w}^A(x, y, s) = & \frac{\tau_0}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{\eta_1}} \int_{\Gamma_{\eta_2}} \frac{\sqrt{b+\eta_1}\sqrt{b-\eta_2}}{\bar{c}_{44}s(1-k_f^2)(\eta_1-\eta_2)} \\ & \times \frac{e^{s\eta_1 h} e^{-s\alpha y + s\eta_2 x}}{(b_{bg}-\eta_2)(b_{bg}+\eta_1)Q_-(\eta_2)Q_+(\eta_1)} d\eta_2 d\eta_1 \quad (151) \end{aligned}$$

令上式 $y = 0$ ，在裂紋面上進行疊加，而在前一章節求得的基本解為 $e^{s\eta x}$ ，因此這裡的 $e^{s\eta x}$ 可以用曳引力型強度因子(111)~(113)式代入，進行疊加與逆轉換，即可得到A點受到入射波產生的第一個繞射波時，時域中的應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子分別如下：

$$\begin{aligned} K_A^{(\tau)}(t) = & \tau_0 \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \times \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-bh}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}h)Q_+(\frac{-\tau}{h})} \right] d\tau \\ & \times H(b_{bg}h - t) + \tau_0 \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \times H(t - b_{bg}h) \quad (152) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_A^{(D)}(t) = & \frac{\tau_0 P_B}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \times \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-bh}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}h)Q_+(\frac{-\tau}{h})} \right] d\tau \\ & \times H(b_{bg}h - t) + \frac{\tau_0 P_B}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \times H(t - b_{bg}h) \quad (153) \end{aligned}$$

$$K_A^{(B)}(t) = \frac{\tau_0 P_C}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \times \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-bh}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}h)Q_+(\frac{-\tau}{h})} \right] d\tau$$

$$\times H(b_{bg}h - t) + \frac{\tau_0 P_C}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \times H(t - b_{bg}h) \quad (154)$$

當一入射波傳到  $A$  端時，且在  $A$  點產生繞射波，同時該入射波也會傳向  $B$  端，而  $B$  端在此問題之邊界條件為含有特徵長度的混合型邊界條件，將(147)做座標轉換，令  $x = x'$  ,  $y = y'$ 。由於座標轉換成  $(x', y')$ ，其  $z$  軸方向與先前  $(x, y)$  座標時相反，為了讓打入的入射波維持在同一方向，因此需要加一負號，其式子描述如下：

$$\tau_{y'z'}(x', 0^+, t) = \tau_0 \delta(x' + (l - h))H(t), \quad -\infty < x < 0 \quad (155)$$

對邊界條件(155)取單邊、雙邊拉普拉斯轉換，可得

$$\bar{\tau}_{y'z'}^*(x', y', s) = \frac{\tau_0}{s} e^{s\lambda(l-h)} \quad (156)$$

對(156)式進行一次逆轉換，可得

$$\bar{\tau}_{y'z'}(x', y', s) = \frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} e^{s\lambda(x'+l-h)} d\lambda \quad (157)$$

(157)式為入射波傳遞到  $B$  點所產生的貢獻，令  $\lambda = \eta$ ，整式可以改寫成

$$\bar{\tau}_{y'z'}^i(x', y', s) = \frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} e^{s\eta x'} e^{s\eta(l-h)} d\lambda \quad (158)$$

此處要得到入射波傳遞到  $A$  點所產生的貢獻，但用  $B$  端座標  $(x', y')$  表示。由(158)式我們發現  $e^{s\eta x'}$ ，而在前一章節已求得的曳引力基本解，因此此部分在疊加前需要做座標轉移，將(101)式令  $x = x'$ 、 $y = y'$ ，可得到的式子如下：

$$\begin{aligned} \bar{w}'(x', y', s) = & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sqrt{b+\eta} \sqrt{b-\lambda}}{(-\bar{c}_{44})s(1-k_f^2)(\eta-\lambda)} \\ & \times \frac{e^{-s\alpha y' + s\lambda x'}}{(b_{bg}-\lambda)(b_{bg}+\eta)Q_-(\lambda)Q_+(\eta)} d\lambda \quad (159) \end{aligned}$$

(159)式為座標轉換過的基本解，此基本解變為 $e^{s\eta x'}$ ，接著就可以將(159)式代入(158)式的 $e^{s\eta x'}$ 進行疊加，其中令 $\eta = \eta_1$ ， $\lambda = \eta_2$ 即可以得到入射波傳遞到 $B$ 端且用 $B$ 端座標 $(x', y')$ 表示，所得到的貢獻如下：

$$\begin{aligned} \bar{w}^B(x', y', s) = & \frac{-\tau_0}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{\eta_1}} \int_{\Gamma_{\eta_2}} \frac{\sqrt{b+\eta_1}\sqrt{b-\eta_2}}{\bar{c}_{44}s(1-k_f^2)(\eta_1-\eta_2)} \\ & \times \frac{e^{s\eta_1(l-h)} e^{-s\alpha(\eta_2)y'+s\eta_2x'}}{(b_{bg}-\eta_2)(b_{bg}+\eta_1)Q_-(\eta_2)Q_+(\eta_1)} d\eta_2 d\eta_1 \quad (160) \end{aligned}$$

令上式 $y = 0$ ，在裂紋面上進行疊加，先前令的基本解變為 $e^{s\eta x'}$ ，此時將基本解疊加後得到的強度因子(142)~(144)式代入(160)式 $e^{s\eta_2 x'}$ 進行疊加與逆轉換，可得到 $B$ 點受到入射波產生的 $B$ 點第一個繞射波時，時域中的應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子分別如下：

$$\begin{aligned} K_B^{(\tau)}(t) = & -\tau_0 \sqrt{\frac{2}{\pi^3(l-h)}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \\ & \times \operatorname{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-b(l-h)}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}(l-h))Q_+(-\frac{\tau}{(l-h)})} \right] d\tau \times H(b_{bg}(l-h) - t) \\ & + \tau_0 \sqrt{\frac{2}{\pi(l-h)}} \times H(t - b_{bg}(l-h)) \quad (161) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_B^{(D)}(t) = & -\frac{\tau_0 P_B}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \times \sqrt{\frac{2}{\pi^3(l-h)}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \\ & \times \operatorname{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-b(l-h)}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}(l-h))Q_+(-\frac{\tau}{(l-h)})} \right] d\tau \times H(b_{bg}(l-h) - t) \\ & + \frac{\tau_0 P_B}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \times \sqrt{\frac{2}{\pi(l-h)}} \times H(t - b_{bg}(l-h)) \quad (162) \end{aligned}$$

$$K_B^{(B)}(t) = -\frac{\tau_0 P_C}{\bar{c}_{44}(1-k_f^2)} \times \sqrt{\frac{2}{\pi^3(l-h)}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$$



$$\begin{aligned} & \times \operatorname{Re} \left[ \frac{\sqrt{\tau-b(l-h)}}{\sqrt{t-\tau}(\tau-b_{bg}(l-h))Q_+(-\frac{\tau}{(l-h)})} \right] d\tau \times H(b_{bg}(l-h) - t) \\ & + \frac{\tau_0 P_C}{\bar{C}_{44}(1-k_f^2)} \times \sqrt{\frac{2}{\pi(l-h)}} \times H(t - b_{bg}(l-h)) \quad (163) \end{aligned}$$

#### 4.2 第二重繞射

當入射波觸及到  $B$  點後，又往  $A$  端移動，此來自  $B$  點的繞射波觸及到  $A$  點時又會產生一個繞射波，即為通過  $A$  點的第二個繞射波。

由(160)式得到  $B$  點所產生的第一個繞射波且用  $(x', y')$  座標描述  $\bar{w}^B(x', y', s)$ 。此式子的描述的邊界條件為  $B$  點為一半無窮長裂紋而  $A$  端為無限延伸之裂紋，所以  $A$  端右半邊在此邊界條件  $(x > 0)$  是位移不連續的。因此當此繞射波到傳遞到  $A$  端時，要讓  $A$  端右半邊  $(x > 0)$  滿足位移連續性，要先將(160)式做座標轉換，將令  $x' = -(x + l)$ ,  $y' = y$ ，接著將座標轉換過的式子在  $A$  端做反加的動作。如此一來  $A$  端的右半邊  $(x > 0)$  的無限長裂紋會被關掉，形成一個封閉區域，此時  $A$ 、 $B$  兩端就形成有限長度裂紋的問題。因此此節需要用到上個章節求得的位移型基本解進行疊加。

首先先將(160)式做座標轉換，令  $x' = -(x + l)$ ,  $y' = y$ ，因此可得如下：

$$\begin{aligned} \bar{w}^B(x, y, s) = & \frac{-\tau_0}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{\eta_1}} \int_{\Gamma_{\eta_2}} \frac{\sqrt{b+\eta_1}\sqrt{b+\eta_2}}{(\bar{C}_{44})(1-k_f^2)(\eta_1+\eta_2)s} \\ & \times \frac{e^{s\eta_1(l-h)} e^{-s\alpha(-\eta_2)y} e^{s\eta_2(x+l)}}{(b_{bg}+\eta_2)(b_{bg}+\eta_1)Q_-(-\eta_2)Q_+(\eta_1)} d\eta_2 d\eta_1 \quad (164) \end{aligned}$$

由(164)式我們得到座標轉換過的式子  $\bar{w}^B(x, y, s)$ ，接著要在  $A$  端做反加的動作，好讓  $A$  端的右半邊  $(x > 0)$  的無限長裂紋會被關掉，形成一個封閉區域，因此可得如下：

$$\bar{w}^B(x, y, s) = \frac{\tau_0}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{\eta_1}} \int_{\Gamma_{\eta_2}} \frac{\sqrt{b+\eta_1} \sqrt{b+\eta_2}}{(\bar{c}_{44})(1-k_f^2)(\eta_1+\eta_2)s} \times \frac{e^{s\eta_1(l-h)} e^{-s\alpha(-\eta_2)y} e^{s\eta_2(x+l)}}{(b_{bg}+\eta_2)(b_{bg}+\eta_1)Q_-(\eta_2)Q_+(\eta_1)} d\eta_2 d\eta_1 \quad (165)$$

經過(165)式反加後，此時A、B兩端就形成有限長度裂紋的問題，此時我們需要用到上個章節求得的位移型基本解進行疊加。

先令  $y = 0$ ，在裂紋面上進行疊加，而在前一章節已求得位移型基本解，而(144)~(146)為疊加過後得到的位移型強度因子，因此我們可以將疊加過後得到的位移型強度因子(144)~(146)式代入(165)式的  $e^{s\eta_2 x}$  進行疊加，其中令  $\eta = \eta_1$ ， $\lambda = \eta_2$ ，再經過逆轉換後，即可得到A點產生的第二個繞射波

先做位移型應力強度因子的疊加，將(144)代入(165)的  $e^{s\eta_2 x}$ ，得到的式子如下：

$$\bar{K}_{BA}^{(\tau)} = \frac{-\tau_0}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{\eta_1}} \int_{\Gamma_{\eta_2}} \frac{\sqrt{2} G(\eta_1, \eta_2) \sqrt{b+\eta_1}}{\sqrt{s} (b_{bg}+\eta_1) Q_+(\eta_1)} \times e^{s\eta_1(l-h)} e^{s\eta_2} d\eta_2 d\eta_1 \quad (170)$$

其中

$$G(\eta_1, \eta_2) = \frac{(1+k_f^2)(b_{bg}-\eta_2)Q_-(\eta_2)\sqrt{b+\eta_2}}{(\eta_1+\eta_2)(b_{bg}+\eta_2)Q_+(\eta_2)\sqrt{b-\eta_2}} \quad (171)$$

經過圍線積分和上下限代換後，先令  $t = t_1 + t_2$ ，再使用摺積定理做一次拉普拉斯逆轉換後，式子整理如下：

$$K_{BA}^{(\tau)}(t) = \frac{-\sqrt{2}\tau_0}{2\pi^{5/2}} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \times \text{Re} \left[ \frac{G(\eta_1^+, \eta_2^+) \sqrt{b+\eta_1^+} \partial \eta_1^+ \partial \eta_2^+}{(b_{bg}+\eta_1^+) Q_+(\eta_1^+) \partial t_1 \partial t_2} - \frac{G(\eta_1^-, \eta_2^+) \sqrt{b+\eta_1^-} \partial \eta_1^- \partial \eta_2^+}{(b_{bg}+\eta_1^-) Q_+(\eta_1^-) \partial t_1 \partial t_2} \right]_{t=\tau} dt_1 d\tau \quad (172)$$

其中

$$\eta_1^\pm = -\frac{t_1}{(l-h)} \pm i\varepsilon \quad (173)$$

$$\eta_2^\pm = -\frac{t_2}{l} \pm i\varepsilon \quad (174)$$

將(173)(174)式代入(172)式且將整式展開，本研究假設  $\varepsilon$  是一個很微小的值，其大小趨近於 0，同時也做變數變換  $\tau = t_1 + t_2$ ， $d\tau = dt_2$ ，因此將(174)式整理後可以得到式子如下：

$$\begin{aligned} K_{BA}^{(\tau)}(t) = & -\frac{\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2}l} \times \int_0^t \int_0^{t-t_2} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+t_2)}} \\ & \times \operatorname{Re} \left[ \frac{(1+kf^2)(t_2+b_{bg}l)\sqrt{t_2-bl}\sqrt{t_1-b(l-h)}}{(t_1+t_2\frac{(l-h)}{l})(b_{bg}l-t_2)(b_{bg}(l-h)-t_1)\sqrt{t_2+bl}} \right. \\ & \left. \times \frac{Q_-\left(-\frac{t_2}{l}\right)}{Q_+\left(-\frac{t_2}{l}\right)Q_+\left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right)} \right] dt_1 dt_2 \quad (175) \end{aligned}$$

由於  $Q_-\left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right)$  的分支切割範圍在  $-b_{bg} \leq \left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right) \leq -\varepsilon$  之間，而(175)式的積分路徑可由圖 6 表示，其中包含了  $t-t_2$  與  $b(l-h)$  兩個分支點，以及  $-\frac{t_2(l-h)}{l}$  與  $b_{bg}(l-h)$  兩個極點。由圖 6 可以發現  $b_{bg}(l-h)$  這個極點位在實軸上，而  $t-t_2$  在  $b_{bg}(l-h)$  的右邊，因此我們可以得知  $t-t_2 > b_{bg}(l-h)$ ，進而得到  $t > b_{bg}(l-h) + t_2$ 。

為了避開  $b_{bg}(l-h)$  此極點，因此在計算數值時需要將式子分成兩段來討論。將避開區域用柯西積分定理來做圍線積分，讓二重積分變成一重積分，其做法如下。

根據柯西積分定理，封閉解析區域積分等於 0，如果圍線範圍有包到極點時，則為極點的貢獻值。

由圖 6 我們可以看到  $\Gamma = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6}$ ，又因為路徑  $\textcircled{3}$  與  $\textcircled{6}$  積分方向相反，故  $\textcircled{3} + \textcircled{6} = 0$ ，且  $\textcircled{4} + \textcircled{5} = 0$ ，因為當  $|z|$  趨近於  $\infty$ ，積分會趨近於 0。所以  $\Gamma = \textcircled{1} + \textcircled{2}$ ，同時也等於圍線積分範圍包到的極點的貢獻。

另外我們只要積分線段②，所以整式要除以 2。因此我們利用柯西積分定理採取圍線積分的方式來得到應力強度因子之值如下：

$$K_{BA}^{(\tau)}(t) = \pi i \left( \frac{-\sqrt{2}\tau_0}{\pi^{5/2}\sqrt{h}} \right) \int_0^{t-b_{bg}(l-h)} \times \operatorname{Re} \left[ \frac{(1+kf^2) i\sqrt{t_2-bl}}{\sqrt{\frac{tl}{h}-t_2}(b_{bg}l-t_2)Q_+\left(-\frac{t_2}{l}\right)} \right] dt_2 \times H(t-b_{bg}l) \quad (176)$$

此時令  $t_2 = R \times e^{i\theta}$ ， $dt_2 = iRe^{i\theta}d\theta$ ，同時令  $R$  趨近於  $\infty$ ，而路徑由 0 到  $2\pi$ ，因此變數變換的式子如下：

$$K_{BA}^{(\tau)}(t) = i \left( \frac{-\sqrt{2}\tau_0(1+kf^2)}{\pi^{3/2}\sqrt{h}} \right) \times \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{t-b_{bg}(l-h)} \times \operatorname{Re} \left[ \frac{i\sqrt{Re^{i\theta}-bl} \times iRe^{i\theta}}{\sqrt{\frac{tl}{h}-Re^{i\theta}}(b_{bg}l-Re^{i\theta})Q_+\left(-\frac{Re^{i\theta}}{l}\right)} \right] d\theta \times H(t-b_{bg}l) \quad (177)$$

再由於  $Q_-\left(-\frac{Re^{i\theta}}{l}\right)$  的分支切割範圍在  $-b_{bg} \leq \left(-\frac{Re^{i\theta}}{l}\right) \leq -\varepsilon$  之間，而(176)式的積分路徑可由圖 7 表示，其中包含了  $\frac{tl}{h}$  與  $bl$  兩個分支點，以及  $b_{bg}l$  一個極點。由圖 7 可以發現  $b_{bg}l$  這個極點位在實軸上，而  $\frac{tl}{h}$  在  $b_{bg}l$  的右邊，因此我們可以得知  $\frac{tl}{h} > b_{bg}l$ ，進而得到  $t > b_{bg}h$ 。

此部分因為有  $b_{bg}h$  此極點，在計算時需要分兩段討論來避開此極點。由圖 7 可以得到  $t > b_{bg}h$ ，因此當  $t > b_{bg}h$  我們可以用柯西積分定理來做圍線積分，做法如下。

再根據柯西積分定理，圍線積分積一圈等於 0，如果圍線範圍包到極點，則此極點的貢獻為積分一圈的值。

由圖 7 我們可以看到  $\Gamma = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6}$ ，又因為路徑③與⑥積分方向相反，故  $\textcircled{3} + \textcircled{6} = 0$ 。因此積分式子變成  $\Gamma = \textcircled{1} + \textcircled{2} = -(\textcircled{4} + \textcircled{5})$ 。另外我

們只要積分線段②，所以整式要除以 2，又由於  $R$  趨近於  $\infty$ ，有些項次我們可以呼略不計，因此式子整理如下：

$$K_{BA}^{(\tau)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \tau_0 (1 + kf^2) \times H(t - b_{bg}h) \quad (178)$$

回到(176)式可以觀察到後半段為  $t > b_{bg}(l - h)$  其式子如下：

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2} l} \times Re \left[ \int_{t-b_{bg}(l-h)}^t \int_0^{t-t_2} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+t_2)}} \right. \\ & \quad \times \frac{(1+kf^2)(t_2+b_{bg}l)\sqrt{t_2-bl}\sqrt{t_1-b(l-h)}}{(t_1+t_2\frac{(l-h)}{l})(b_{bg}l-t_2)(b_{bg}(l-h)-t_1)\sqrt{t_2+bl}} \\ & \quad \left. \times \frac{Q_-(\frac{-t_2}{l})}{Q_+(\frac{-t_2}{l})Q_+(\frac{-t_1}{(l-h)})} \right] dt_1 dt_2 \quad (179) \end{aligned}$$

為了方便數值計算，將(179)式的  $b$  近似為  $b_{bg}$ ，因此式子整理如下：

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2} l} \times \int_{t-b_{bg}(l-h)}^t \times Re \left[ \int_0^{t-t_2} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+t_2)}} \right. \\ & \quad \times \frac{(1+kf^2)(t_2+b_{bg}l)\sqrt{t_1-b(l-h)}}{(t_1+t_2\frac{(l-h)}{l})\sqrt{(t_2-b_{bg}l)(t_1-b_{bg}(l-h))}\sqrt{t_2+bl}} \\ & \quad \left. \times \frac{Q_-(\frac{-t_2}{l})}{Q_+(\frac{-t_2}{l})Q_+(\frac{-t_1}{(l-h)})} dt_1 \right] dt_2 \quad (180) \end{aligned}$$

由(180)式可以發現分母在  $b_{bg}l$  會出現一個分支點，因此將該式分成兩個部份討論。在分開計算後發現前半部為純虛數，因此取實部為 0；而後半部我們要避開分母的分支點，因此做變數變換

$$\text{令 } \mu = \sqrt{(t_2 - b_{bg}l)} \text{，而 } \mu^2 = (t_2 - b_{bg}l) \text{，} t_2 = \mu^2 + b_{bg}l \text{，}$$

$$dt_2 = 2\mu d\mu$$

則將(180)式改寫如下式：

$$\begin{aligned} K_{BA}^{(\tau)}(t) = & -\frac{2\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2} l} \times \int_0^{\sqrt{t-b_{bg}l}} \int_0^{t-(\mu^2+b_{bg}l)} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+\mu^2+b_{bg}l)}} \\ & \times \frac{(1+kf^2)[(\mu^2+b_{bg}l)+b_{bg}l]\sqrt{t_1-b(l-h)}}{[t_1+(\mu^2+b_{bg}l)\frac{(l-h)}{l}][t_1-b_{bg}(l-h)]\sqrt{(\mu^2+b_{bg}l)+bl}} \end{aligned}$$

$$\times \frac{Q_-\left(-\frac{\mu^2+b_{bg}l}{l}\right)}{\left(-\frac{(\mu^2+b_{bg}l)}{l}\right)Q_+\left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right)} dt_1 d\mu \quad (181)$$

最後應力強度因子之靜力解如下：

$$K_{BA}^{(\tau)}(t) = \tau_0 \sqrt{\frac{1}{h} - \frac{1}{l}} \quad (182)$$

根據以上結果，我們可以將應力強度因子的值分成四個階段個別計算。第一個在範圍  $t < b_{bg}(l-h)$  則用(175)式兩重積分去計算。第二、三個階段是當  $b_{bg}(l-h) < t$  則將(175)式分成兩段去積分，如果  $t < b_{bg}(l-h)$  則用(176)式一重積分去計算，在經過圍線積分得到(178)式；如果  $b_{bg}(l-h) < t$  則將再分兩個部分討論，如果當  $b_{bg}l < t$  則是使用(178)式；如果  $b_{bg}l < t$  則則是使用(180)式；因此我們可以將上述結果用一個式子表示如下：

$$\begin{aligned} K_{BA}^{(\tau)}(t) = & -\frac{\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2}l} \times \operatorname{Re}\left\{\int_0^t \int_0^{t-t_2} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+t_2)}} \right. \\ & \times \frac{(1+kf^2)(t_2+b_{bg}l)\sqrt{t_2-bl}\sqrt{t_1-b(l-h)}}{\left(t_1+t_2\frac{(l-h)}{l}\right)(b_{bg}l-t_2)(b_{bg}(l-h)-t_1)\sqrt{t_2+bl}} \\ & \times \frac{Q_-\left(-\frac{t_2}{l}\right)}{Q_+\left(-\frac{t_2}{l}\right)Q_+\left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right)} dt_1 dt_2\} \times H(b_{bg}(l-h) - t) \\ & + \frac{-\sqrt{2}\tau_0(1+kf^2)}{\pi^{5/2}\sqrt{h}} \times \operatorname{Re} \int_0^{t-b_{bg}(l-h)} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{tl}{h}-t_2}} \\ & \times \frac{\sqrt{t_2-bl}}{(t_2-b_{bg}l)Q_+\left(-\frac{t_2}{l}\right)} dt_2 \times H(t - b_{bg}l) \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \tau_0(1+kf^2) \times H(t - b_{bg}h) \\ & - \frac{2\sqrt{2}\tau_0\sqrt{l-h}}{\pi^{5/2}l} \times \int_0^{\sqrt{t-b_{bg}l}} \left[ \int_0^{t-(\mu^2+b_{bg}l)} \frac{1}{\sqrt{t-(t_1+\mu^2+b_{bg}l)}} \right. \\ & \times \frac{(1+kf^2)[(\mu^2+b_{bg}l)+b_{bg}l]\sqrt{t_1-b(l-h)}}{\left[t_1+(\mu^2+b_{bg}l)\frac{(l-h)}{l}\right][t_1-b_{bg}(l-h)]\sqrt{(\mu^2+b_{bg}l)+bl}} \end{aligned}$$

$$\times \frac{Q_{-}\left(-\frac{\mu^2+b_{bg}l}{l}\right)}{\left(-\frac{\mu^2+b_{bg}l}{l}\right)Q_{+}\left(-\frac{t_1}{(l-h)}\right)} dt_1 d\mu \times H(b_{bg}h - t) \quad (183)$$

接著我們可以將(167)(168)代入(165)的 $e^{s\eta_2 x}$ ，利用上述方法分別求出電位移強度因子疊加及磁感應強度因子疊加。

以上得到的結果即 A 點產生的第二個繞射波時，時域中的應力強度因子、電位移強度因子與磁感應強度因子。

隨後對(183)式進行電腦的數值計算，計算時所採用的材料及材料常數如表 1，計算結果我們假設  $h/l$  分別是 0.1、0.25、0.5，請見圖 8、圖 9、圖 10。

## 第五章 結論

### 5.1 目前成果

根據本文研究的成果，可歸納為以下幾類

1. 推導得到曳引力、位移型基本解在一次拉普拉斯轉換域中之應力場、電位移場以及磁感應場。
2. 得到曳引力、位移型基本解於一次轉換域中之應力強度因子。並對其疊加後逆轉換，並進行數值計算。
3. 將目前研究成果與應宜雄(1996)比對，除去 $f_{15}$ 壓磁常數， $g_{11}$ 磁電常數， $\mu_{11}$ 磁性常數，退化回壓電材料後，推導結果相同。

### 5.2 尚待研究方向

1. 針對本文中逆轉換結果，針對方程式以及數值計算的電腦程式，予以改進，處理積分時奇異性、不準確之問題。
2. 對逆轉換結果進行數值計，分析其結果並與國內外期刊論文做比較與討論。
3. 求曳引力、電位移、磁感應型三種情況下之應力、電位移、磁位移全場解析解。



## 參考文獻

Aboudi, J. (2017). Multiscale analysis for the prediction of the full field in electromagnetoelastic composites with semi-infinite cracks. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 28(13), 1734-1750.

Bagheri, R. (2017). Several horizontal cracks in a piezoelectric half-plane under transient loading. *Archive of Applied Mechanics*, 87(12), 1979-1992.

Bleustein, J. L. (1968). A new surface wave in piezoelectric materials. *Applied Physics Letters*, 13(12), 412-413.

Chen, X. (2009). Dynamic crack propagation in a magneto-electro-elastic solid subjected to mixed loads: Transient mode-III problem. *International Journal of Solids and Structures*, 46(22-23), 4025-4037.

Chen, X., Mai, Y. W. (2012). Fracture mechanics of electromagnetic materials: Nonlinear field theory and applications. *Fracture mechanics of electromagnetic materials: Nonlinear field theory and applications* (pp. 1-305) Imperial College Press.

Chen, X. (2009). Dynamic crack propagation in a magneto-electro-elastic solid subjected to mixed loads: Transient mode-III problem. *International Journal of Solids and Structures* 46(22-23), 4025-4037

Collet, B., Destrade, M., Maugin, G. A. (2006). Bleustein-gulyaev waves in some functionally graded materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25(5), 695-706.

De Hoop, A. T. (1960). A modification of cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Applied Scientific Research, Section B*, 8(1), 349-356.

Deeg, W. F. J. (1980). The analysis of dislocation, crack, and inclusion problems in piezoelectric solids. (Ph.D., Stanford University). *ProQuest Dissertations and Theses*.

Feng, W. J., Pan, E. (2008). Dynamic fracture behavior of an internal interfacial crack between two dissimilar magneto-electro-elastic plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(6), 1468-1487.

Gao, C., Kessler, H., Balke, H. (2003a). Crack problems in magneto-electro-elastic solids. part I: Exact solution of a crack. *International Journal of Engineering Science* 40(1), 1-21.

Gao, C., Kessler, H., Balke, H. (2003b). Crack problems in magneto-electro-elastic solids. part II: General solution of collinear cracks. *International Journal of Engineering Science* 41(9) 969-981

Gherrous, M., Ferdjani, H. (2016). Analysis of a griffith crack at the interface of two piezoelectric materials under anti-plane loading. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28(6), 1683-1704.

Ing, Y. S., Wang, M. J. (2004a). Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14), 3849-3864.

Ing, Y. S., Wang, M. J. (2004b). Transient analysis of a mode-III crack propagating in a piezoelectric medium. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22-23), 6197-6214.

Li, X. F. (2005). Dynamic analysis of a cracked magneto-electro-elastic medium under antiplane mechanical and inplane electric and magnetic impacts. *International Journal of Solids and Structures*, 42(11-12), 3185-3205.

Ma, C. C., Ing, Y. S. (1995). Transient analysis of dynamic crack propagation with boundary effect. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 62(4), 1029-1038.

Ma, C. C., Ing, Y. S. (1996). Transient response of a finite crack subjected to dynamic anti-plane loading. *International Journal of Fracture*, 82 : , 345-362.

Ma, C. C., Ing, Y. S. (1997). Dynamic crack propagation in a layered medium under antiplane shear. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 64(1), 66-72.

Melkumyan, A., Mai, Y. W. (2008). Influence of imperfect bonding on interface waves guided by piezoelectric/piezomagnetic composites. *Philosophical Magazine*, 88(23), 2965-2977.

Ouyang, J. (2017). Enhanced piezoelectric performance of printed PZT films on low temperature substrates. (Ph.D., Rochester Institute of Technology). *ProQuest Dissertations and Theses*.

Pak, Y. E. (1990). Crack extension force in a piezoelectric material. *Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME)*, 57(3), 647-653.

Parton, V. Z. (1976). Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica*, 3(9-10), 671-683.

Ryvkin, M., Hadar, O. (2015). Employing of the discrete fourier transform for evaluation of crack-tip field in periodic materials. *International Journal of Engineering Science*, 86, 10-19.

Sih, G. C., Chen, E. P. (2003). Dilatational and distortional behavior of cracks in magneto-electroelastic materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 40(1), 1-21.

Sih, G. C., Jones, R., Song, Z. F. (2003). Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magneto-electroelastic materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 40(2), 161-186.

Tsai, C. H., Ma, C. C. (1992). Transient analysis of a semi-infinite crack subjected to dynamic concentrated forces. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 59(4), 804-811.

Van Den Boomgaard, J., Terrell, D. R., Born, R. A. J., Giller, H. F. J. I. (1974). An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material - part I composition and unidirectional solidification. *Journal of Materials Science*, 9(10), 1705-1709.

Van Run, A. M. J. G., Terrell, D. R., Scholing, J. H. (1974). An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material - part 2 physical properties. *Journal of Materials Science*, 9(10), 1710-1714.

Van Suchtelen, J. (1972) Product Properties: A New Application of Composite Materials. Philips Research Reports, 27, 28-37.

Wang, B. L., Mai, Y.W., Niraula, O. P. (2007). A horizontal shear surface wave in magneto-electroelastic materials. *Philosophical Magazine Letters*, 87(1), 53-58.

Yu, J., Guo, J., Xing, Y. (2014). Analytical solutions of mode-III lip-shape crack in piezoelectric composites. *Fuhe Cailiao Xuebao (Acta Materiae Compositae Sinica)*, 31(5), 1357-1363.

洪國彬. (2003) 含預裂縫之壓電材料的力學行為，國立臺灣大學應用力學研究所，碩士論文

林世皓. (2004) 含真空邊界壓電材料之擴展裂紋動力破壞解析，淡江大學航空太空工程學系碩士論文

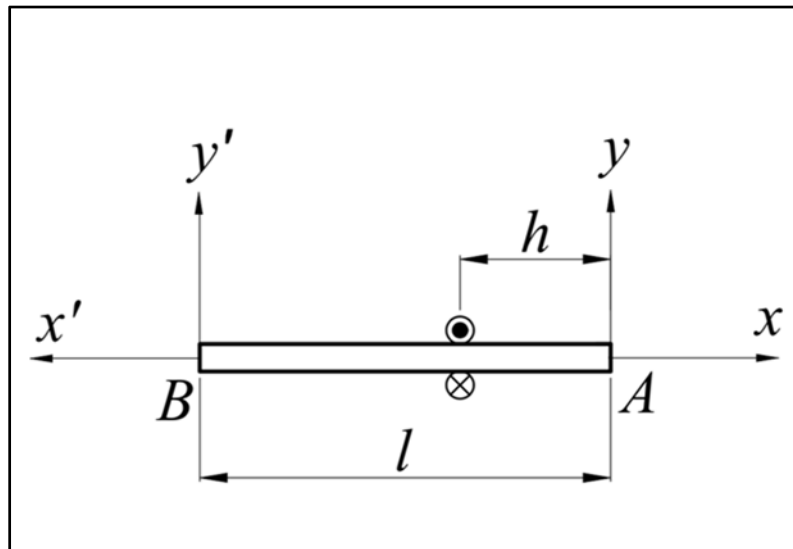


圖 1 有限長裂紋之無窮域磁電彈材料受點載荷和入射波之幾何結構示意圖

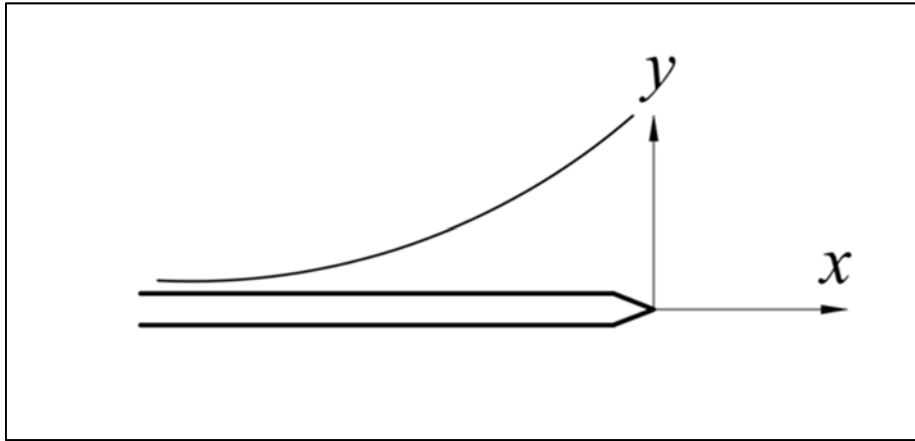


圖 2 含半無限長裂紋之無窮域磁電彈材料受指數型負載之幾何結構示意圖

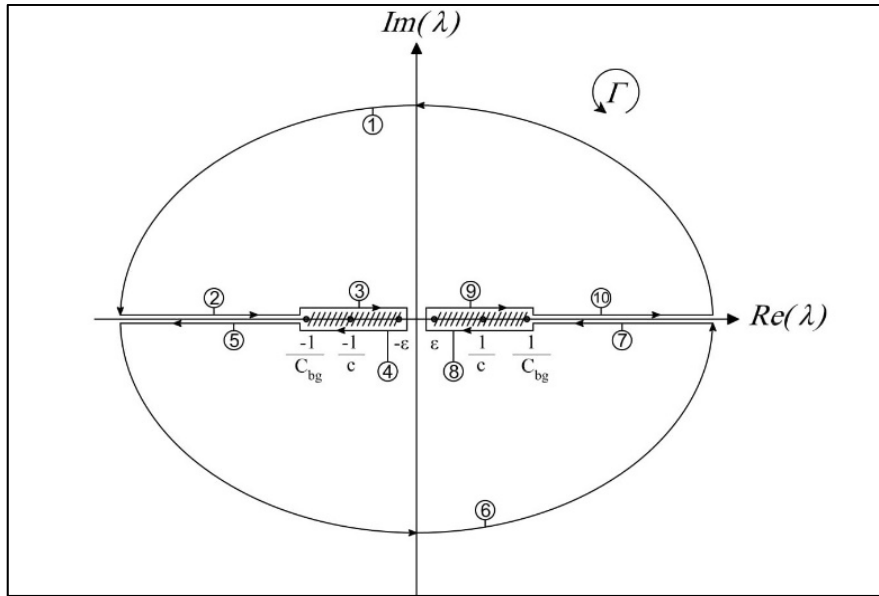


圖 3 (82)式的積分路徑

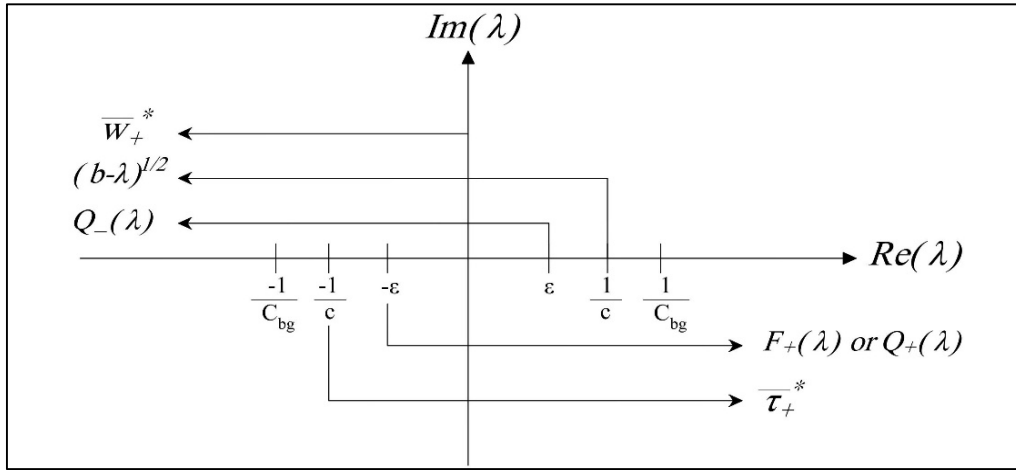


圖 4 (97)式中各項解析域示意圖



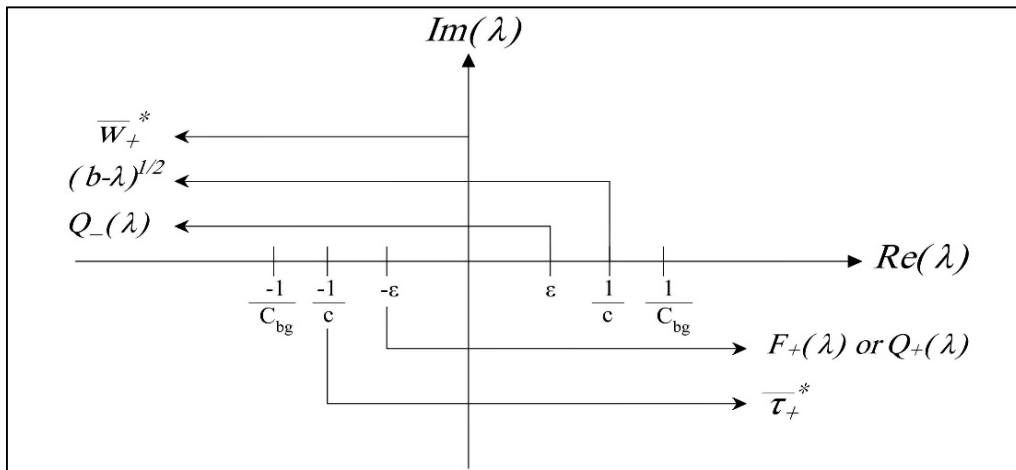


圖 5 (133)式中各項解析域示意圖

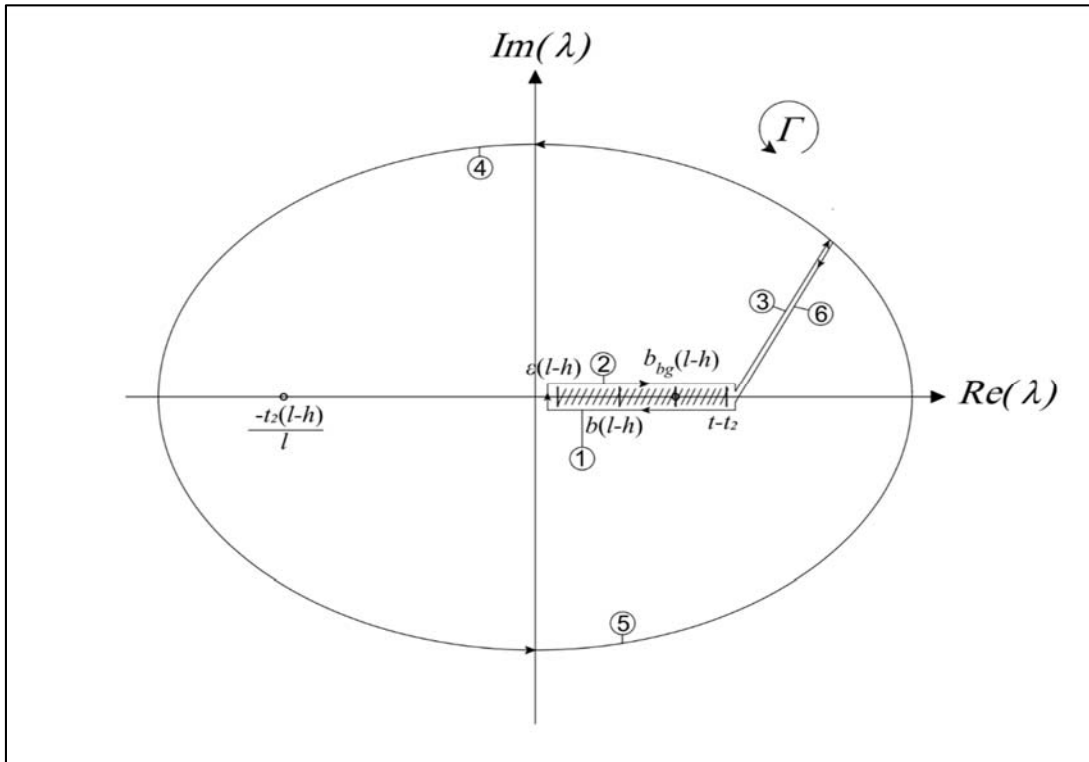


圖 6 (175)式的積分路徑

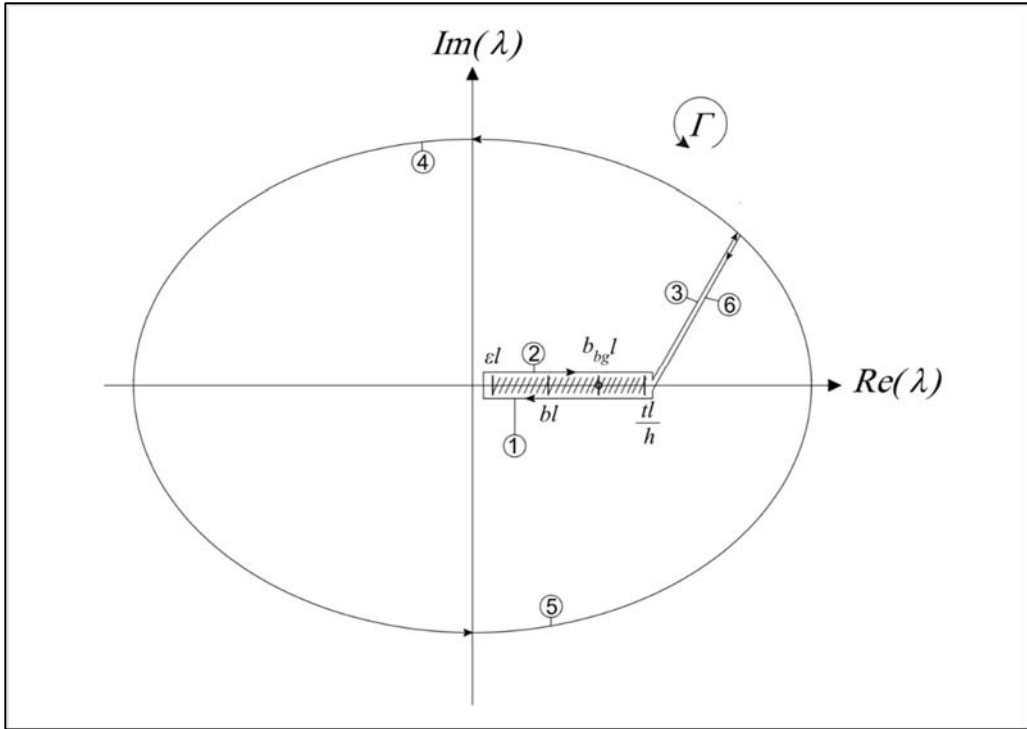


圖 7 (176)式的積分路徑

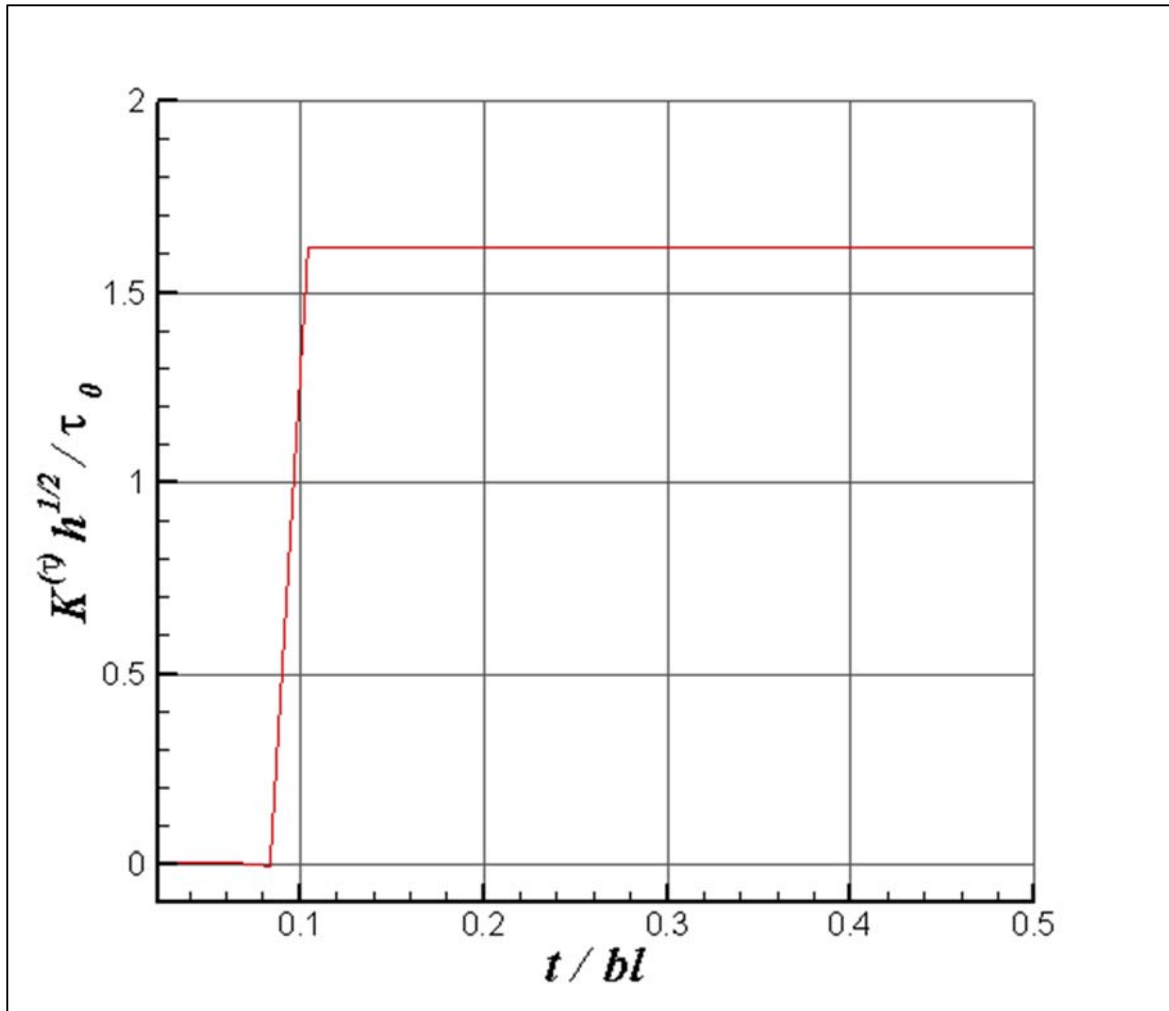


圖 8 施加應力負載在  $h/l = 0.1$  時之強度因子

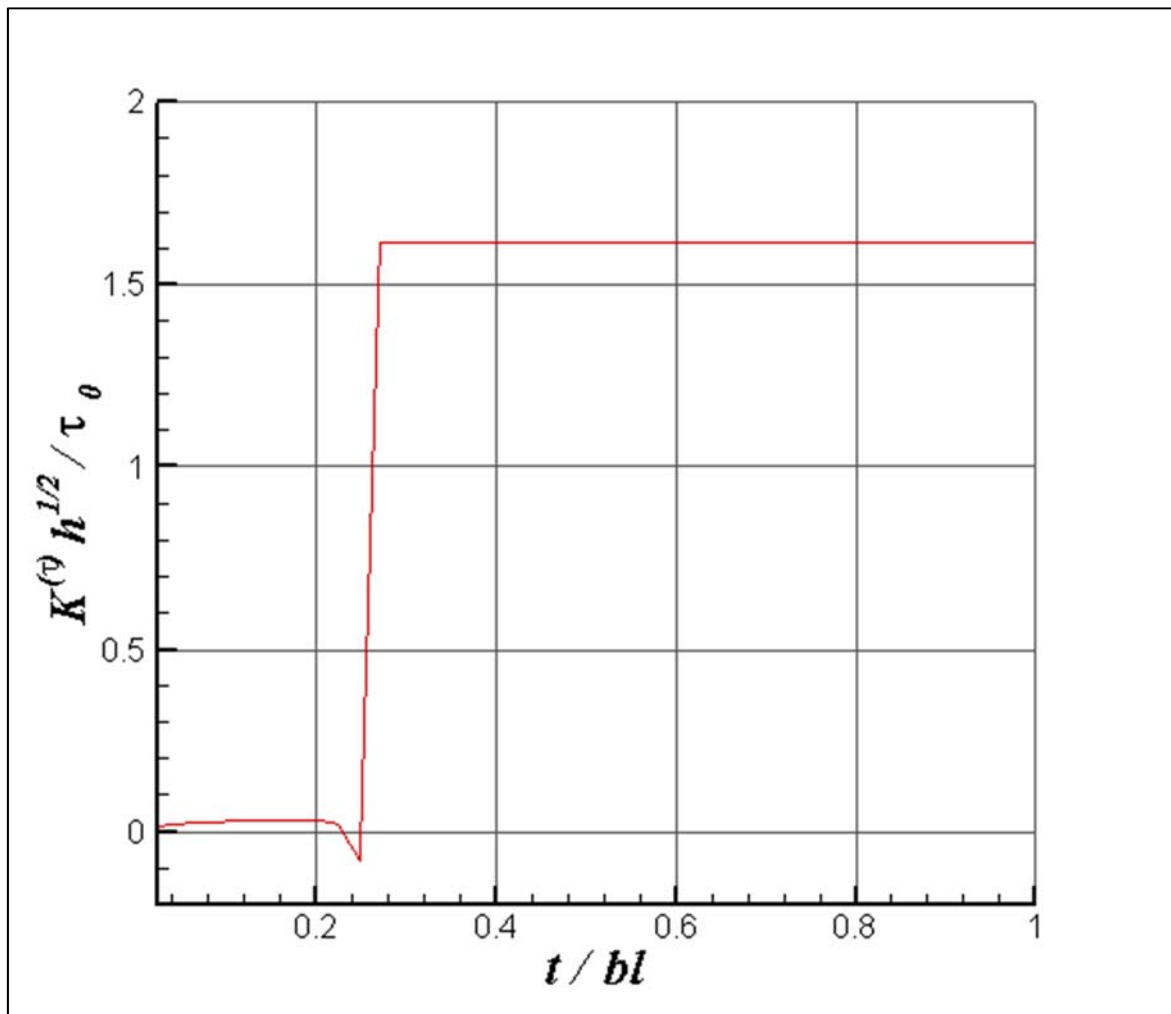


圖 9 施加應力負載在  $h/l = 0.25$  時之強度因子

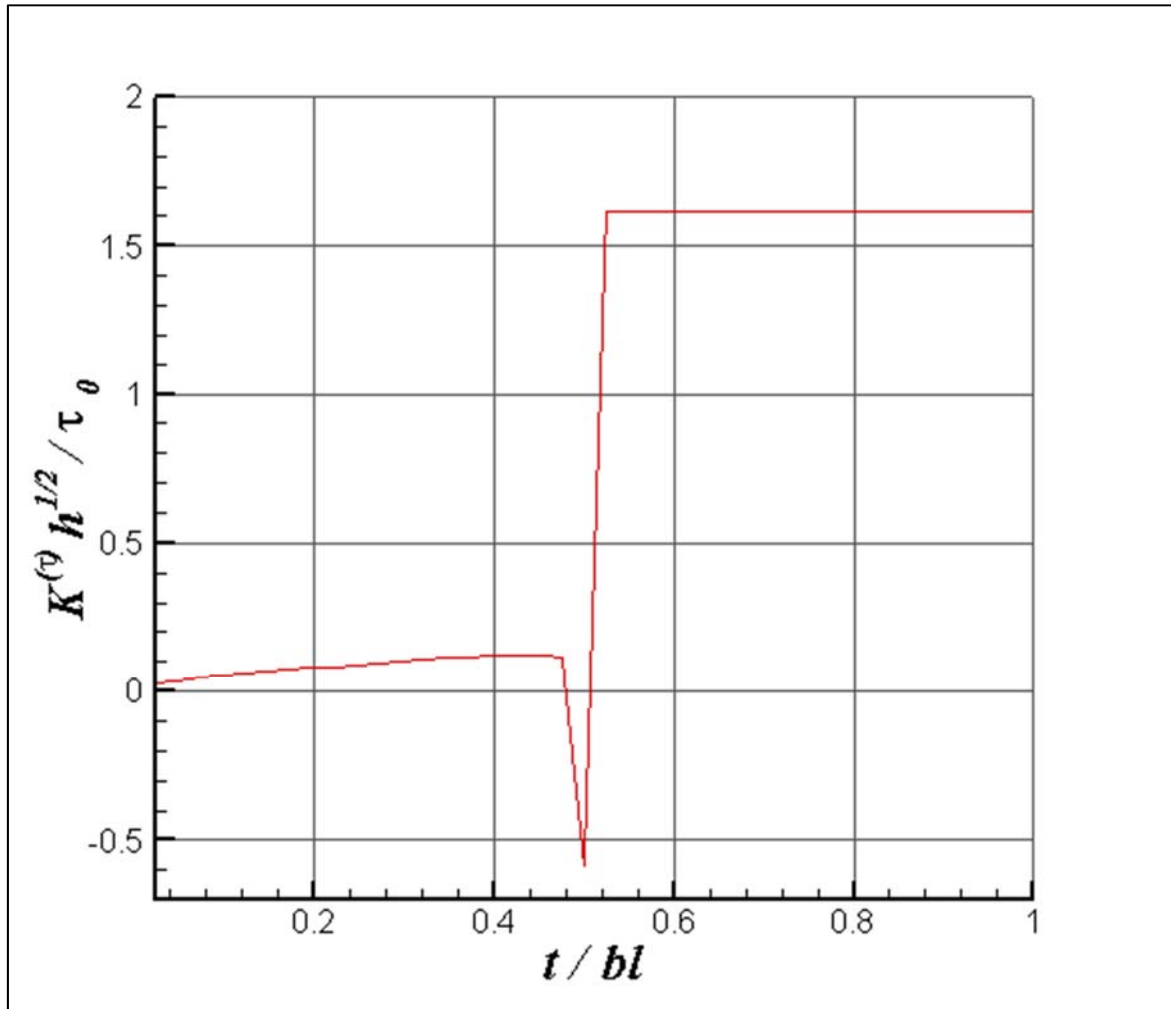


圖 10 施加應力負載在  $h/l = 0.5$  時之強度因子

表 1 CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>之材料常數

材料常數	CoFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>
$C_{44}$ , (10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup> )	22.6
$e_{15}$ , (C/m <sup>2</sup> )	5.8
$\epsilon_{11}$ , (10 <sup>-9</sup> C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup> )	5.64
$f_{15}$ , (N/Am)	275
$g_{11}$ , (10 <sup>-12</sup> Ns/VC)	5.367
$\mu_{11}$ , (10 <sup>-6</sup> Ns <sup>2</sup> /C <sup>2</sup> )	297
$\rho$ , (10 <sup>2</sup> kg/m <sup>3</sup> )	55

108年度專題研究計畫成果彙整表

計畫主持人：應宜雄		計畫編號：108-2221-E-032-019-				
計畫名稱：含有限長度裂紋之磁電彈材料之動力破壞分析						
成果項目		量化	單位	質化 (說明：各成果項目請附佐證資料或細項說明，如期刊名稱、年份、卷期、起訖頁數、證號...等)		
國內	學術性論文	期刊論文	0	篇	1.Yi-Shyong Ing, Si-Yao Mao (2019年11月)。Transient Intensity Factors of Magnetoelastic Materials Subjected to Dynamic Anti-plane Concentrated Loading。2019 AASRC Conference。 2.Yi-Shyong Ing, Chia-Yun Lo, Hsin-Yu Fan (2019年4月)。Transient Analysis of a Two-layered Piezoelectric Medium Subjected to In-plane Electromechanical Concentrated Loading。第十一屆海峽兩岸航空太空航天學術研討會。	
		研討會論文	2			
		專書	0			本
		專書論文	0			章
		技術報告	0			篇
		其他	0			篇
		其他	0			篇
國外	學術性論文	期刊論文	0	篇		
		研討會論文	0			
		專書	0			本
		專書論文	0			章
		技術報告	0			篇
		其他	0			篇
參與計畫人力	本國籍	大專生	5	人次	其中陳炳憲與謝采倫同學已甄試上國立台灣大學應用力學研究所碩士班，繼續從事研究。	
		碩士生	0			
		博士生	0			
		博士級研究人員	0			
	專任人員	0				
	非本國籍	大專生	0			
		碩士生	0			
		博士生	0			
博士級研究人員		0				



	專任人員	0	
其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)			