科技部補助專題研究計畫成果報告
期末報告

線性減振器與非線性能量槽於非線性樑之減振及穩定性研究

計 畫 類 別 ： 個別型計畫
計 畫 編 號 ： MOST 106-2221-E-032-037-
執 行 期 間 ： 106年08月01日至107年07月31日
執 行 單 位 ： 淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人： 王怡仁

計畫參與人員： 碩士班研究生-兼任助理：林奕廷
碩士班研究生-兼任助理：魏佑軒
碩士班研究生-兼任助理：翁銘壎
碩士班研究生-兼任助理：曾嫆婷
碩士班研究生-兼任助理：溫語昂

中 華 民 國 107 年 08 月 29 日

中 文 摘 要 ： 本研究考慮一歐拉-伯努力樑(Euler-Bernoulli Beam)在兩端絞接(hinged - hinged)之邊界條件下，同時受到拉伸效應(Stretching Effect)及空氣動力(Aerodynamic)影響之振動情形。而文中也將提到樑因為拉伸效應所導致的非線性振動現象，即討論非線性簡支樑(nonlinear hinged-hinged beam)之振動行為，並在非線性簡支樑下方掛載一可調質量減振器(Tuned Mass Damper (TMD))或具非線性彈性係數之非線性可調質量減振器(nonlinear Tuned Mass Damper)，以分析該TMD對樑之減振效果。本研究使用多尺度法(Method of multiple scales (MOMS))分析系統於穩態固定點(Fixed Points)時各模態之頻率響應(Frequency response)，之後吾人將以數值方法求得一閉迴路(closed loop)耦合數值解，並全面分析非線性簡支樑附加線性TMD或非線性TMD時各項參數(如TMD之質量比、掛載位置、阻尼係數、彈性係數、非線性彈性係數)對樑之影響，同時吾人將繪製3D MAP(3D maximum amplitude plots)與3D MACP(3D maximum amplitude contour plots)以利相互對照及分析。而文中除了以時間響應(Time Response)圖驗證3D MACP之正確性外，也使用因次分析法解得非線性TMD運動方程之解析解， 並將該解所求得之開迴路(open loop)解析解與先前提的閉迴路數值解相互比較，以獲得進一步的驗證，同時吾人也將給出非線性TMD振動率之明確關係式。最後吾人將以RK4(Fourth-Order Runge-Kutta)求出系統之Floquet Transition Matrix並搭配F.M.(Floquet Multipliers)判定法繪製BOA(Basin of Attraction)圖以探討系統在空氣動力作用下之穩定性。此外，吾人也使用Poincaré Map驗證BOA圖之正確性。本研究將提供最佳TMD的質量比、掛載位置、彈性係數、非線性彈性係數，並分析在系統受到空氣動力作用時須注意之項，以做為產學界未來研究之參考。

中 文 關 鍵 詞 ： 非線性振動、歐拉-伯努力樑、可調質量減振器、多尺度法.

英 文 摘 要 ： This study analyzes the vibration reduction of a tuned mass damper (TMD) applied to a hinged-hinged nonlinear Euler-Bernoulli beam. We compare the effects of linear and nonlinear tuned mass dampers (LTMD/NLTMD) and obtain results undiscovered in previous studies. We analyze the frequency responses (fixed points) of the system using the method of multiple scales (MOMS) and obtain analytical solutions for the NLTMD in the frequency and time domains using Dimensional Analysis and the Perturbation Method. The present study shows that when the damping coefficient (Lm), TMD mass (mD), TMD initial displacement (A) and nonlinear spring constant (Bt) of the NLTMD fulfill a function relationship,Lm=sqrt(3mD Bt) A , the damping and nonlinear elastic effects cancel each other out, and the nonlinear damping frequency coincides with the linear natural frequency. With a fixed damping coefficient and an LTMD or NLTMD at a fixed position, optimal damping is achieved when the product of the TMD mass and spring constant are at fixed values. Finally, we use the Floquet

transition matrix of the system and Floquet multipliers (F.M.) to create the basin of attraction (BOA) and analyze the stability of the system under aerodynamic forces.

英文關鍵詞：Nonlinear vibration, Euler-Bernoulli Beam, Tuned mass damper (TMD), Method of multiple scales (MOMS).

線性減振器與非線性能量槽於非線性樑之減振及穩定性研究

計畫編號: MOST 106-2221-E-032-037

計畫主持人: 王怡仁　淡江大學 航太系

摘要

本研究考慮一伯努力-歐拉樑 (Bernoulli-Euler beam) 在兩端絞接 (hinged - hinged) 之邊界條件下，同時受到拉伸效應 (Stretching Effect) 及空氣動力 (Aerodynamic) 影響之振動情形。本研究並在非線性簡支樑下方掛載一可調質量減振器 (Tuned Mass Damper (TMD)) 或具非線性彈性係數之非線性可調質量減振器 (nonlinear Tuned Mass Damper)，以分析該 TMD 對樑之減振效果。本研究使用多尺度法 (Method of multiple scales (MOMS)) 分析系統於穩態固定點 (Fixed Points) 時各模態之頻率響應 (Frequency response)，之後吾人將以數值方法求得一閉迴路 (closed loop) 耦合數值解，並全面分析非線性簡支樑附加線性 TMD 或非線性 TMD 時各項參數(如 TMD 之質量比、掛載位置、阻尼係數、彈性係數、非線性彈性係數)對樑之影響，同時吾人將繪製 3D MAP(3D maximum amplitude plots) 與 3D MACP(3D maximum amplitude contour plots)以利相互對照及分析。而文中除了以時間響應 (Time Response) 圖驗證 3D MACP 之正確性外，也使用因次分析法解得非線性 TMD 運動方程之解析解， 並將該解所求得之開迴路 (open loop) 解析解與先前提的閉迴路數值解相互比較，以獲得進一步的驗證，同時吾人也將給出非線性 TMD 振動率之明確關係式。最後吾人將以 RK4 (Fourth-Order Runge-Kutta) 求出系統之 Floquet Transition Matrix 並搭配 F.M. (Floquet Multipliers) 判定法繪製 BOA (Basin of Attraction) 圖以探討系統在空氣動力作用下之穩定性。此外，吾人也使用 Poincaré Map 驗證 BOA 圖之正確性。本研究將提供最佳 TMD 的質量比、掛載位置、彈性係數、非線性彈性係數，並分析在系統受到空氣動力作用時須注意之項，以做為產學界未來研究之參考。

1. 緒論

1.1 研究動機

減振器已被廣為應用於振動主體的減振，且已證實其效果顯著。時下的工程問題大部分皆以線性模式分析振動體及其後續的振動問題，而一般減振器的模擬皆以線性彈簧及阻尼模擬之，原因乃是線性減振器的理論足以含蓋大部份的工程問題。然而隨著精密製造及微奈米工程日益受到重視，微結構體的振動問題被放大後，線性分析已經無法準確預估此類問題。此外，即使是大型結構體，其受力的大小、材料的特性及大形變的振動問題，也會讓非線性的現象更為顯著。此時，即使工程問題以非線性模式模擬之，但是其減振器如果仍以線性理論分析，仍然無法完整探討所有工程結構的振動現象，此為本研究考慮非線性減振器的動機之一。以目前非線性理論的發展及其必要性，非線性能量吸引槽 (Nonlinear Energy Sink (NES)) 的觀念被提出後，許多非線性減振器的分析及應用也被廣為研究。因此，本文也與國際研究接軌，將以非線性減振器的觀念應用於非線性的振動體，不僅探討其減振效益、穩定性、同時與線性減振器的效果比較之，一併呈現兩者的利弊，期望給予學界及業界一個完整的答案。

1.2 文獻回顧

在工程上，振動所帶來的影響，小至機械元件大至飛機機翼與橋樑工程等，都可能造成疲勞、零件鬆脫、破壞，這些是工程師必需要考慮到的問題。此外，振動可分為線性與非線性兩種類型，其中又屬非線性振動之內共振現象最為複雜且不易分析。有關內共振現象之描述，可從 Nayfeh 和 Mook [1]中窺知：若系統各個自由度之自然振動頻率彼此存在倍數關係時，激擾高頻率卻會使低頻率產生較高的振幅。Nayfeh 和 Balachandran[2]在書中進一步說明了非線性系統各種穩定情況的定義，及各種系統穩定性的判斷方法，對於系統穩定性分析有極大之參考價值。另外，Nayfeh 和 Pai[3]，分析 nonlinear Bernoulli-Euler beam 的振動問題，利用 Newton's Laws, Euler's angle transformation, and Karman-Type strain-displacement 關係，推導出 3D and 2D nonlinear beam equations. 這些理論模式對於相關之研究有極大之助益。此外, 在 Nayfeh 和 Mook [1] 的書中，針對非線性系統的解析提出多種方法，例如 Poincaré 法、Lindstedt 法、Average 法及多尺度法(Method of Multiple Scales (MOMS)) 等。其中由於多尺度法利於分析具阻尼的振動系統，因此也廣為使用。例如 Ji 和 Zu [4]探討 Timoshenko beam 的轉軸系統，利用 MOMS，分析非線性系統的自然頻率響應。 Nayfeh and Nayfeh [5] 利用 MOMS 找出非線性模態及非線性頻率，並使用 Galerkin 法分析此 nonlinear beam 之 dynamic response。

就彈性樑的振動分析而言，影響系統振動的因素很多，例如 Van Horssen 和 Boertjens [6]的研究中，以 Bernoulli-Euler beam 為理論模型，並以線性彈簧模擬一吊橋之振動，並考慮此吊橋受一非線性空氣動力影響。他們發現能量在第一及第三個模態之間轉移，這可被視為典型非線性的內共振，對於理論模型的分析極具啟發性。而類似這樣並將樑置放於一彈性基座的理論已廣泛的被應用在土木、機械、航太工程中，像是 Mundrey [7]將其應用在軌道上。Fu et al. [8]提出的內嵌式奈米碳管之非線性振動，是利用非線性 2D Bernoulli-Euler beam 模擬 carbon nano tube (CNT)置於 elastic matrix 上之振動行為。另外，Shen [9]也以非線性 2D Bernoulli-Euler beam 為基本模式，分析一 Postbuckling Beam 置於雙層之 elastic foundation 的振動問題，並且在他的研究中證實 elastic foundation 的 stiffness 對於非線性樑之振動行為有極大的影響。

至於不改變減振器外型，僅改變其擺放的位置而達到減振效果，已有 Wang 和 Chen [10] 提出將一個 mass-spring-damper vibration absorber 掛載於旋轉機制 (光碟機或是旋轉翼和 swash plate 的耦合系統) 的最佳減振位置，以達到最佳減振效果。Wang and Chang [11]研究一剛體平板的非線性振動問題，於平板的四個角落各以一三次方彈簧模擬其支撐點；並將兩個單質量減振器懸掛於平板下方，調整兩減振器位置以達到最佳減振位置。Wang 和 Lin [12] 則利用 internal resonance contour plot (IRCP) 及 flutter speed contour plot (FSCP) 分析 nonlinear dynamic stability。他們同時證明改變減振器的位置，可同時避開內共振，並有效抑制主體的振動。不過在[10~12]的研究中都是考慮剛體為主體模型，至於彈性樑的減振研究，在 Wang 和 Chang[13]中則是以非線性彈簧與線性阻尼做為支撐或懸掛整體線性 Bernoulli-Euler beam 的介質，此彈性樑的一端為鉸接 (Hinge)支撐，另一端則是掛載時變之動態減振器 (Time-Dependent Boundary Dynamic Vibration Absorber，DVA)以分析 DVA 對於樑之減振效果。Wang 和 Lu [14]之論文中提到，一非線性彈性樑，其兩端以鉸接支撐，並以非線性彈簧支撐或懸掛之系統，當支撐或懸吊彈簧之線性彈性係數與彈性樑之彈性係數的比值為 $9\pi^4$ 時，其第一個模態與第三個模態有 1:3 的內共振。Wang and Kuo [15] 考慮一置放於非線性彈性基底上的 hinged-free 非線性樑之振動。發現彈性基底在某彈性係數的情況下，系統中之 1st mode 及 2nd mode 存在 1：3 的內共振之現象。他們在彈性樑上掛載

Tuned Mass Damper (TMD)，利用 TMD 達到避開內共振及減振之效果。他們發現將 TMD 放置於距離樑固定端的 0.25*l*~0.5*l* 之間，通常能夠給予最有效之減振效益。相對的，若放置於 beam 長的 0.7*l*~0.8*l* 之間，則減振效益不彰。Wang and Liang [16] 則是尋求一種 lumped-mass vibration absorber (LMVA) 對於置放在非線性彈性基底上的 hinged-hinged 非線性樑的最佳減振效果。他們以 3D maximum amplitude contour plot (3D MACP)的方法，歸納此 LMVA 的最佳組合，以達到最佳減振效果。由此可見，更換 TMD 或 DVA 的位置及其質量、彈性與阻尼係數，對於避開 I.R. 及有效減振是可行的。

近十幾年來，非線性能量吸引槽 (Nonlinear Energy Sink (NES)) 的觀念被提出後，許多非線性減振器的分析及應用也被廣為研究。Starosvetsky and Gendelman [17] 將 NES 的觀念應用於非線性減振器 (nonlinear dynamic vibration absorber (NDVA)) 上， 他們將一個具有高非線性且微小質量之減振器，安裝於一受週期外力的線性振動主體上。 他們發現即使在較小的吸振範圍情況下，非線性減振器對於主體振動能量的吸收也比線性減振器來的好。 Starosvetsky and Gendelman [18] 同時也針對具備 NES 觀念的非線性減振器，其之於線性振動體的吸振情形，做一解析的研究。 他們以頻率響應的結果，呈現此非線性減振器對於減振的效益。 Vakakis and Gendelman [19] 以能量法分析一個受到脈衝激擾的 2-DOF 之非線性減振器的吸振情況。他們提出兩種解析方法並討論此 NES 與外力之間，其非線性能量的轉換關係。Viguié and Kerschen [20] 也以 NES 的觀念分析非線性減振器對於線性振動主體之減振效果。他們以數值法分析此非線性減振器，對於各種外力的吸振效益。Hsu et al. [21] 則將一非線性減振器置放於一懸臂樑上，此非線性減振器以一硬式彈簧之 Duffing 振動器模擬之。他們同時以實驗，數值及解析法分析比較之，發現非線性減振器比線性減振器有較多的有效頻寬，並有利減振。Samani and Pellicano [22]將 simple beam 配合一個 dynamic vibration absorber (DVA)，在承受 regularly spaced concentrated moving loads 情況下，尋找此 DVA 的最佳減振位置；他們發現非線性的 DVA 減振效益大於線性的 DVA。然而針對 NES 與 nonlinear vibration absorber 的觀念應用在非線性系統的研究，依吾人所知，尚無人研究之，而這也是本研究嘗試討論的重點。

1.3 研究方法

本研究將考慮 nonlinear hinged-hinged Bernoulli-Euler beam 之多個模態的耦合並分別安裝一線性及非線性的減振器，其目的除了分析線性及非線性減振器對於非線性橫樑之減振效應，並探討其穩定性。此研究可用以模擬任何端點支撐之土木或機械振動系統，例如: 橋樑、捷運或高鐵之軌道等振動問題。本研究考慮橫樑主體受到一簡諧外力影響，並考慮 stretching effect；吾人並於其任意位置放置一線性或非線性之可調質量減振器 (Tuned Mass Damper (TMD))，以達減振效益。有關減振器效益的探討將依以下步驟分析之。 (一) 首先利用牛頓第二運動定律 (Newton's 2nd law)、三維尤拉角 (Euler's angle) 之座標轉換以及泰勒展開式 (Taylor series)，得到非線性彈性樑之運動方程式。吾人將利用時間多尺度法 (method of multiple scales (MOMS)) 並繪製 Fixed points plots 分析此橫樑非線性的振動現象。(二) 吾人將分別以線性及非線性的減振器附加於此非線性橫樑上，除了個別列出其運動方程式，並先分析線性減振器對於非線性橫樑的各種減振效果，包含線性減振器的質量、彈性係數，阻尼係數及位置等參數的影響。(三) 此時吾人將以相似法及小擾動的解析法，直接求出非線性減振器頻率域振幅的解析函數。其目的為利用此解析函數做為之後求解非線性減振器之於非線性橫樑效益時的數值驗證與分析之函數。(四) 最後則為將此非線性減振器與非線性橫樑耦合後，利用 MOMS 法分析此減振器的各項參數 (包含非線性減振器

的質量、彈性係數，阻尼係數及位置等) 對於主體振幅的影響，以求達到最佳減振效果。吾人將利用 3D maximum amplitude contour plot (3DMACP)全面性的求出此非線性系統之最佳 TMD 的減振組合，並以數值計算驗證本結果之正確性。最後，將與線性減振器之於主體的減振效果做一比較，以求得一完整的振動系統的答案。

2. 系統理論模式建立

本研究考慮主體為一非線性彈性樑，模擬任何土木或機械之端點支撐的振動系統。其相關座標系統詳見圖 1，其中 ρ 為彈性樑之單位長度之密度， A 為彈性樑之截面積，E 為彈性樑之楊氏係數， I_A 為彈性樑之慣性矩，$\overline{\mu}$ 為阻尼係數，$\overline{k}$ 與 $\overline{\lambda}$ 分別為 TMD 的彈性係數與阻尼係數，$\overline{\beta}$ 為非線性 TMD 的彈性係數。

2.1 非線性運動方程之推導與無因次化

圖 1 為本研究中兩端鉸接(Hinged-Hinged)之非線性彈性樑。吾人利用 Nayfeh 與 Pai [3] 所提出的非線性彈性樑理論並用牛頓定理來架構出一個完整的彈性樑理論。首先吾人考慮彈性樑之初始狀態是筆直的，並假設每個橫截面是遵守應力-應變定律的平面。用牛頓定律、歐拉角轉換、泰勒級數展開，吾人獲得了非線性彈性樑的運動方程。吾人排除彈性樑的任何轉動，將其限制在一平面上運動。因此，2D 之運動方程如下：

$$m\ddot{\overline{u}} - EA\overline{u}'' = EA(\frac{1}{2}\overline{W}'^2 - \overline{u}'\overline{W}'^2)' + EI_A\left[\overline{W}'\left(\overline{W}''' - \overline{u}'''\overline{W}' - 2\overline{u}''\overline{W}'' - 3\overline{u}'\overline{W}'''\right)\right]' \tag{1}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\overline{W}} - EI_A\overline{W}^{iv} &= EA(\overline{u}'\overline{W}' - \overline{u}'^2\overline{W}' + \tfrac{1}{2}\overline{W}'^3)' \\ &+ EI_A[\overline{u}'\overline{W}''' + (\overline{u}'\overline{W}')'' - \left(\overline{u}'^2 - \overline{W}'^2\right)\overline{W}''' - \overline{u}'(\overline{u}'\overline{W}')'' - (\overline{u}'^2\overline{W}' - \tfrac{1}{3}\overline{W}'^3)'']' \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $()'$ 代表 $d/d\overline{x}$ ，$(\dot{\ })$ 代表 $d/d\overline{t}$ ，m 為單位長度之質量由於吾人考慮之系統為一細長之彈性樑，故式(1)中之縱向慣性力 $m\ddot{\overline{u}}$ 可忽略不考慮。在本研究中，吾人考慮此樑兩端為鉸接，且無縱向外力之作用，因此必須考慮 Stretching Effect，而邊界條件如下：

$$\overline{W}(0,\overline{t}) = 0 \text{ ，} \overline{W}(\overline{l},\overline{t}) = 0 \text{ ，} \overline{W}''(0,\overline{t}) = 0 \text{ ，} \overline{W}''(\overline{l},\overline{t}) = 0 \tag{3}$$

從式(1)中，吾人可得到以下關係式：

$$\overline{u}'' = -(\frac{1}{2}\overline{W}'^2 - \overline{u}'\overline{W}'^2)' - \frac{EI_A}{EA}\left[\overline{W}'\left(\overline{W}''' - \overline{u}'''\overline{W}' - 2\overline{u}''\overline{W}'' - 3\overline{u}'\overline{W}'''\right)\right]' + \frac{m\ddot{\overline{u}}}{EA} \tag{4}$$

而吾人將式(4)積分後，其結果表示如下：

$$\overline{u}' = -\tfrac{1}{2}\overline{W}'^2 + c_1(\overline{t}) \text{ ，} \overline{u} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\overline{l}}\overline{W}'^2 d\overline{x} + c_1(\overline{t})\overline{x} + c_2(\overline{t}) \tag{5}$$

將邊界條件式(3)代入式(5)中，可得到：

$$c_2(\overline{t}) = 0 \text{ ，} c_1(\overline{t}) = \tfrac{1}{2\overline{l}}\int_0^{\overline{l}}\overline{W}'^2 d\overline{x} \tag{6}$$

將式(5, 6)代入式(2)中，則本彈性樑之運動方程可再簡化為 $\overline{W}$ 方向振動之運動方程式，此時，吾人增加 elastic beam 之 structural damping term $\overline{\mu}\dot{\overline{W}}$ 及 uniform distributed load $\overline{F} = \overline{F}e^{i\overline{\Omega}\overline{t}}$ ，而懸掛之TMD則視為外力，如果以線性TMD 而言，其作用在非線性彈性樑之力為: $\{\overline{k}[\overline{W}(x,t) - \overline{W}_D] + \overline{\lambda}[\dot{\overline{W}}(x,t) - \dot{\overline{W}}_D)]\}\ \ \delta[\overline{x} - \overline{l}_D]$。此外，吾人也考慮空氣動力激擾之影響，以模擬一般橋樑結構受到一側向風之運動狀況，吾人參考 van Horssen [6] 的非穩態空氣動力的形式，表示如下式：

$$\overline{F}_D = \frac{\rho_a \overline{U}_W{}^2 \overline{d}}{2}(a_{D0U} + \frac{a_{D1U}}{\overline{U}_W}\frac{\partial \overline{W}(\overline{x},\overline{t})}{\partial \overline{t}} + \frac{a_{D2U}}{\overline{U}_W{}^2}\frac{\partial^2 \overline{W}(\overline{x},\overline{t})}{\partial \overline{t}^2} + ...) \tag{7}$$

其中 a_{D0U} 為空氣動力之係數，a_{D1U} 為空氣動力一次微分項(空氣阻尼)之修正係數。接著將式(7)無因次化得式(8)，其中各項係數之無因次化定義如附錄 1 所示。

$$F_D = \hat{a}_{D0U} a_{D0U} + \hat{a}_{D1U} a_{D1U} \dot{W} + \hat{a}_{D2U} a_{D2U} \dot{W}^2 + ... \tag{8}$$

利用牛頓定律推導運動方程，再加入空氣動力之影響(a_{D0U} 與 a_{D1U})。最後，吾人將方程式無因次化後，可得附加一 TMD 之非線性樑運動方程：

$$\overset{**}{W} + W^{iv} + (\mu - \hat{a}_{D1U} a_{D1U})\overset{*}{W} = \frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1 (W')^2 dx\, W'' + \hat{a}_{D0U} a_{D0U}$$

$$-\{k(W(x,\tau) - W_D(\tau)) + \lambda(\overset{*}{W}(x,\tau) - \overset{*}{W}_D(\tau))\}\delta(x - l_D) \tag{9}$$

此處於等號左邊加入一空氣動力項($\hat{a}_{D1U} a_{D1U} \overset{*}{W}$)即表示空氣動力之影響將使整體結構不穩定，倘若空氣動力項之影響大於結構阻尼項極可能導致該系統發散。若為非線性 TMD，其作用在此彈性樑之彈性力力可表為：$\{\overline{k}[\overline{W}(x,t) - \overline{W}_D] + \overline{\beta}[\overline{W}(x,t) - \overline{W}_D]^3 + \overline{\lambda}[\dot{\overline{W}}(x,t) - \dot{\overline{W}}_D)]\}\,\delta[x - \overline{l}_D]$。同理，無因次化後可得下列運動方程：

$$\overset{**}{W} + W^{iv} + (\mu - \hat{a}_{D1U} a_{D1U})\overset{*}{W} = \frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1 (W')^2 dx\, W'' + \hat{a}_{D0U} a_{D0U}$$

$$-\{k(W(x,\tau) - W_D(\tau)) + \beta(W(x,\tau) - W_D(\tau))^3 + \lambda(\overset{*}{W}(x,\tau) - \overset{*}{W}_D(\tau))\}\delta(x - l_D) \tag{10}$$

由式(3)之 B.C.整理後可得：

$$W(0,\tau) = 0 \text{，} W''(0,\tau) = 0 \text{，} W(l,\tau) = 0 \text{，} W''(l,\tau) = 0 \tag{11}$$

線性 TMD 之運動方程為：$m_D W_D = k(W - W_D) + \lambda(\dot{W} - \dot{W}_D)$

非線性 TMD 之運動方程為：$m_D W_D = k(W - W_D) + \lambda(\dot{W} - \dot{W}_D) + \beta(W - W_D)^3$

式(9、10)為無因次化主體架構之運動方程式，其中 $()'$ 代表 d/dx，$()^*$ 代表 $d/d\tau$，μ 為無因次化之彈性樑阻尼係數，k 與 λ 為無因次化之 TMD 的線性彈性係數和阻尼係數，此外，β 是 TMD 之非線性彈性係數。其他各項係數之無因次化定義如附錄一所示。

2.2 MOMS 法

為了進一步分析此非線性方程式，吾人採用 MOMS，將時間分為時間劇烈變化以及時間緩慢變化兩種尺度假設 T_0 為劇烈變化項，$T_1, T_2, \ldots$ 為緩慢變化項，且 $W(x,\tau,\varepsilon) = \varepsilon W_0(x,T_0,T_1....) + \varepsilon^2 W_1(x,T_0,T_1....)$，$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_1}$，其中 ε 為干擾時間尺度的一個極小值，吾人也考慮了阻尼和非線性項以及外力小擾動項並設定尺度在 ε^3 以便分析。吾人將這些條件代入方程式(9)忽略高次方項在系統的影響。其中，非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^1 的項如下：

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial T_0{}^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} = 0 \tag{12}$$

非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^3 的如下：

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}W_1+W_1^{iv}=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}W_0-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}W_0$$
$$+\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1(W_0{}')^2dx\ W_0{}''+\hat{a}_{D0U}a_{D0U}$$
$$-\{k(W_0-W_D)+\lambda(\frac{\partial}{\partial T_0}W_0-\frac{\partial}{\partial T_0}W_D)\}\delta(x-l_D) \tag{13}$$

非線性簡支樑附加非線性 TMD 之ε^3的項如下：

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}W_1+W_1^{iv}=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}W_0-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}W_0$$
$$+\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1(W_0{}')^2dx\ W_0{}''+\hat{a}_{D0U}a_{D0U}$$
$$-\{k(W_0-W_D)+\lambda(\frac{\partial}{\partial T_0}W_0-\frac{\partial}{\partial T_0}W_D)+\beta(W_0-W_D)^3\}\delta(x-l_D) \tag{14}$$

相對於ε^1與ε^3之邊界條件如下：

$W(0,\tau)=0$，$W''(0,\tau)=0$，$W(l,\tau)=0$，$W''(l,\tau)=0$

3. 內共振條件分析

3.1 無 TMD 之非線性橫樑運動方程式

為了分析附加TMD之後，對於樑之振動的影響，吾人先討論在未加vibration absorber時，主體架構的基本非線性振動現象。如此一來，才能徹底了解無減振器的非線性樑的特性及本減振器之減振目標。無TMD組合之系統與第二章系統理論模式之建立過程相同，因此以下內容將簡要描述之。

從第二章之運動方程(9)去掉TMD之後我們可以得到下列運動方程：

$$\overset{**}{W}+W^{iv}+(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\overset{*}{W}=\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1(W')^2dx\ W''+\hat{a}_{D0U}a_{D0U} \tag{15}$$

在此模式下，兩端依然是鉸接，因此邊界條件如下列所示：

$$W(0,\tau)=0\text{，}W''(0,\tau)=0\text{，}W(l,\tau)=0\text{，}W''(l,\tau)=0 \tag{16}$$

注意，以上為無因次化後的結果，$l=1$

3.2 無 TMD 系統之內共振條件

吾人應用 MOMS 法得到ε^1的項如下：

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial T_0{}^2}+\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4}=0 \tag{17}$$

ε^3的項如下：

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}W_1+W_1^{iv}=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}W_0-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}W_0$$
$$+\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1(W_0{}')^2dx\ W_0{}''+\hat{a}_{D0U}a_{D0U} \tag{18}$$

並利用 separation of variable 假設$W_0(x,\tau)$為：

$$W_0(x,\tau)=X(x)Y(T_0) \tag{19}$$

將上式代入(17)得：

$$\frac{1}{Y(T_0)}\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}Y(T_0)=-\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^4}{\partial x^4}X(x)=-\ \omega^2 \tag{20}$$

其中ω為振盪頻率，接著透過邊界條件式(16)解得$W_0(x,T_0)$為：

$$W_0(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}(A(T_1)_{0n}e^{-i\varsigma_n}e^{i\omega_n T_0}+\overline{A}(T_1)_{0n}e^{i\varsigma_n}e^{-i\omega_n T_0})\sin(\gamma_n x) \tag{21}$$

其中ς_n為相位角，γ_n為特徵值，將式(21)代入邊界條件後可以得到特徵值$\gamma_n=n\pi/l$，$n=1,2,3...$，其中吾人針對前三個模態進行探討，而模態(Mode Shape)$\phi_n(x)$可被表達為$\phi_n(x)=\sin(\gamma_n x)$；而時間項之通解為$\xi_{0n}(\tau)=(A(T_1)_{0n}e^{-i\varsigma_n}e^{i\omega_n T_0}+\overline{A}(T_1)_{0n}e^{i\varsigma_n}e^{-i\omega_n T_0})$，最後$W_0(x,\tau)$可被表示成：

$$W_0(x,\tau)=\sum_{n=1}^{3}(A(T_1)_{0n}e^{-i\varsigma_n}e^{i\omega_n T_0}+\overline{A}(T_1)_{0n}e^{i\varsigma_n}e^{-i\omega_n T_0})\sin(\gamma_n x)=\sum_{n=1}^{3}\xi_{0n}(\tau)\phi_n(x) \tag{22}$$

此外，吾人也假設

$$W_1(x,\tau)=\sum_{n=1}^{3}\xi_{1n}(\tau)\phi_n(x) \tag{23}$$

將式(23)帶入式(18)並透過正交法(Orthogonal Method)將式(17)及(18)乘上$\phi_m(x)$積分，積分範圍從$x=0$到$x=l$(其中因無因次化結果$l=1$)而依不同模態m得到正交化後之動態方程(Dynamic Equation)。

彈性樑ε^1正交化結果：

$$\overset{**}{\xi}_{0m}(\tau)+\gamma_m^4\xi_{0m}(\tau)=0 \tag{24}$$

彈性樑ε^3正交化結果：

$$\overset{**}{\xi}_{1m}(\tau)+\gamma_m^4\xi_{1m}(\tau)=-\frac{1}{4}\hat{A}(\sum_{n=1}^{3}\xi_{0n}\gamma_n)^2(\gamma_m^2\xi_{0m})-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}\xi_{0m}$$
$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{0m}+\hat{a}_{D0U}a_{D0U}\frac{\int_0^1\phi_m dx}{\int_0^1\phi_m^2 dx} \tag{25}$$

並設定在不同模態中各自的固有頻率$\omega_m=\gamma_m^2$為了確定系統裡是否有內共振現象(Internal Resonance)，吾人挑出$\omega_m=\pi^2,4\pi^2,9\pi^2$之模態，因為當不同模態間頻率為整數倍時能量就可能互相傳遞導致內共振現象產生。

3.3 無 TMD 系統之頻率響應

吾人使用 Fixed Points Plots 以分析此系統第一模態($m=1$)與第三模態($m=3$)之頻率響應，並假設此系統受一外力：$\hat{f}_m e^{i\Gamma T_0}=\hat{f}_m e^{i(\omega_m+\varepsilon\sigma)T_0}=\hat{f}_m e^{i\omega_m T_0}e^{i\sigma T_1}$而第一模態吾人需要挑出與$e^{i\omega_1 T_0}$有關的長期項(Secular Terms)。因此吾人從式(25)將m代入 1 並從中挑出以下係數：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_1}+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_1}+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_1}\}$$
$$-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}A_{01}e^{-i\varsigma_1}-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{01}e^{-i\varsigma_1}-\hat{f}_1e^{i\sigma T_1} \tag{26}$$

第二模態中則須挑出$e^{i\omega_2 T_0}$與$e^{4i\omega_1 T_0}$的長期項如下：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_2^4(3A_{02}{}^2\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_2}+\gamma_2^2\gamma_1^2(2A_{02}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_2}+\gamma_2^2\gamma_3^2(2A_{02}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_2}\}$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}A_{02}e^{-i\varsigma_2}-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{02}e^{-i\varsigma_2} \tag{27}$$

第三模態中則須挑出 $e^{i\omega_3 T_0}$ 與 $e^{9i\omega_1 T_0}$ 的長期項如下：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_3^4(3A_{03}{}^2\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_3}+\gamma_3^2\gamma_1^2(2A_{03}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_3}+\gamma_3^2\gamma_2^2(2A_{03}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_3}\}$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}A_{03}e^{-i\varsigma_3}-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{03}e^{-i\varsigma_3} \tag{28}$$

令以上長期項式(26、27、28)為 0 即可導出一組條件解(Solvability Condition)。以下，吾人將討論對於第一模態之激擾條件，吾人將第一模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_1}$ 並令 $\hat{f}_1 e^{i\Gamma_A T_0}=\hat{f}_1 e^{i\omega_1 T_0}e^{i\sigma T_1}$；$\Gamma_A=\sigma T_1+\varsigma_1$；$\frac{\partial\Gamma_A}{\partial T_1}=\sigma+\frac{\partial\varsigma_1}{\partial T_1}=0$；$\dot{\varsigma}_1=-\sigma$；$\frac{\partial A_{01}}{\partial T_1}=\frac{\partial A_{02}}{\partial T_1}=\frac{\partial A_{03}}{\partial T_1}=0$

因此，式(26)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_1 A_{01}\sigma$$

$$=\hat{f}_1\cos(\Gamma_A) \tag{29}$$

式(26)之虛部為：

$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1 A_{01}=\hat{f}_1\sin(\Gamma_A) \tag{30}$$

將上兩式(29)，(30)平方和後消除與時間有關的項得到下式：

$$[-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_1 A_{01}\sigma]^2$$

$$+[-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1 A_{01}]^2=\hat{f}_1{}^2 \tag{31}$$

吾人將第二模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_2}$ 而式(27)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_2^4(3A_{02}{}^2\overline{A}_{02})+\gamma_2^2\gamma_1^2(2A_{02}A_{01}\overline{A}_{01})+\gamma_2^2\gamma_3^2(2A_{02}A_{03}\overline{A}_{03})\}-2\omega_2 A_{02}\dot{\varsigma}_2=0 \tag{32}$$

式(27)之虛部為：

$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_2 A_{02}=0 \tag{33}$$

吾人將第三模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_3}$ 而式(28)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_3^4(3A_{03}{}^2\overline{A}_{03})+\gamma_3^2\gamma_1^2(2A_{03}A_{01}\overline{A}_{01})+\gamma_3^2\gamma_2^2(2A_{03}A_{02}\overline{A}_{02})\}-2\omega_3 A_{03}\dot{\varsigma}_3=0 \tag{34}$$

式(28)之虛部為：

$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_3 A_{03}=0 \tag{35}$$

吾人透過數值方法解方程式(31~35)繪製振幅 A_{01}、A_{02}、A_{03} 與微調頻率 σ 在此系統中之 Fixed Points Plots 以觀察內共振現象。因本文篇幅限制，將不詳細討論激擾第二模及第三模態，因其與激擾第一模態之結果類似。

3.4 內共振之驗證

就數學上來講，吾人依照前一節之結果發現第一模態與第三模態之間雖然有耦合現象(Couple)如式(31)，若考慮 $(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\neq 0$ 之狀況，則可由式(35)得到 $A_{03}=0$，故此系統第一模態與第三模態之間並無內共振現象產生。同理，因為式(33)得到 $A_{02}=0$，故第一模態

與第二模態之間也沒有內共振現象。而以數值分析方面也有相同結果，舉例而言：如圖 2 為激擾第一模態之第一模態 Fixed Points Plots，圖中可看到較高的峰值約為 0.50863，而激擾第一模態之第二模態及第三模態 Fixed Points Plots(圖 3、圖 4)雖然也有峰值但仍然遠小於圖 2 之峰值。吾人亦觀察激擾第二模態時各模態之 Fixed Points Plots(圖 5、圖 6、圖 7)也可以發現除了受激擾的第二模態有一峰值約為 0.12665 之外其餘模態振幅皆逼近零。而在激擾第三模態時(圖 8、圖 9、圖 10)也可以發現除了被激擾的第三模態有一較大之峰值 0.05629 外，其餘第一模態及第二模態振幅皆為及小值。綜合以上分析，可說明不論以數學的觀點討論或是數值分析的結果皆可說明此簡支樑系統在各模態間並無內共振現象。

4. 附加線性 TMD 之減振分析

本章主要延續第二章與第三章的結果，分析一兩端鉸接樑，附加一減振器的減振效果。本章將討論 TMD 固定於不同位置時之效應，並以整個系統的頻率響應分析之，其最終結果將於本章節末呈現之。

4.1 非線性簡支樑附加線性 TMD 方程式之分析

吾人假設 TMD 為一質點運動(W_D 為 TMD 在 W 方向之位移量;l_D 為 TMD 懸掛在彈性樑上之位置)，此 TMD 可視同一集中力(concentrated force)作用於非線性簡支樑之某處(l_D)，則非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^1 的運動方程式可寫成如下：

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial T_0{}^2}+\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4}=0 \tag{36}$$

非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^3 的項如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}W_1+W_1^{iv}&=-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}W_0-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}W_0\\&\quad+\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1(W_0{}')^2dx\ W_0{}''+\hat{a}_{D0U}a_{D0U}\\&\quad-\{k(W_0-W_{D0})+\lambda(\frac{\partial}{\partial T_0}W_0-\frac{\partial}{\partial T_0}W_{D0})\}\delta(x-l_D)\end{aligned} \tag{37}$$

而線性 TMD 方程式則為：

$$m_D\frac{\partial^2 W_{D0}}{\partial T_0{}^2}=k(W-W_{D0})+\lambda(\frac{\partial W}{\partial T_0}-\frac{\partial W_{D0}}{\partial T_0}) \tag{38}$$

並將上式(38)以第二章所述之 MOMS 法展開再取出 ε^1 項係數如下式：

$$m_D\frac{\partial^2 W_{D0}}{\partial T_0{}^2}=k(W_0-W_{D0})+\lambda(\frac{\partial W_0}{\partial T_0}-\frac{\partial W_{D0}}{\partial T_0}) \tag{39}$$

吾人從第三章的研究中，分析出此主體架構並無內共振現象，但是各模態間卻存在著相互耦合的情形。因此吾人將針對此系統的前三個模態加入線性減振器的效果分析之。在此，吾人假設此線性TMD的外力係來自彈性樑各個位置及各個模態與此TMD的相對位移造成之彈性力，因此 TMD 之位移與彈性樑各個模態之 mode shape 有關。吾人假設 W_{D0} 可分解成 3 個相對應於彈性樑的各個 mode shape 之相對位移(亦即 W_{D0n} ，n =1，2，3)其中，

$$W_{D0n}=(A_{D0n}e^{-i\varsigma_{D0n}}e^{i\omega_n T_0}+\overline{A}_{D0n}e^{i\varsigma_{D0n}}e^{-i\omega_n T_0})\sin\gamma_n x=\xi_{D0n}\phi_n \tag{40}$$

故線性 TMD 在各模態上之運動方程如下：

$$m_D \frac{\partial^2}{\partial T_0^{\,2}} \xi_{D0n}\phi_n = k(\xi_{0n}\phi_n - \xi_{D0n}\phi_n) + \lambda(\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{0n}\phi_n - \frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{D0n}\phi_n) \tag{41}$$

4.2 非線性簡支樑附加線性 TMD 之頻率響應

如先前假設，吾人假設外力形式為一均勻分布力 $\hat{f}_m e^{i\Gamma_A T_0} = \hat{f}_m e^{i(\omega_m+\varepsilon\sigma)T_0} = \hat{f}_m e^{i\omega_m T_0} e^{i\sigma T_1}$ 而第一模態吾人需要挑出與 ω_1 有關的長期項。因此吾人將式(22)、(23)、(40)帶入式(36)及式(37)並同第三章所述方式正交化，可得一非線性簡支樑附加線性 TMD 之動態方程

非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^1 的方程式為：

$$\overset{**}{\xi}_{0m}(\tau) + \gamma_m^4 \xi_{0m}(\tau) = 0 \tag{42}$$

非線性簡支樑附加線性 TMD 之 ε^3 的方程式為：

$$\begin{aligned}
\overset{**}{\xi}_{1m}(\tau) + \gamma_m^4 \xi_{1m}(\tau) = & -\frac{1}{4}\hat{A}(\sum_{n=1}^{3}\xi_{0n}\gamma_n)^2(\gamma_m^2\xi_{0m}) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}\xi_{0m} \\
& -(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{0m} + \hat{a}_{D0U}a_{D0U}\frac{\int_0^1 \phi_m dx}{\int_0^1 \phi_m^2 dx} \\
& -(k\xi_{0m} - k\xi_{D0m} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{0m} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{D0m})\frac{\phi_m^{\,2}(l_D)}{\int_0^1 \phi_m^2 dx}
\end{aligned} \tag{43}$$

再從第一模態中挑出 $e^{i\omega_1 T_0}$ 之長期項：

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\hat{A}\{\gamma_1^4(3A_{01}^{\,2}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_1} + \gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_1} + \gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_1}\} \\
& -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - (\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - \hat{f}_1 e^{i\sigma T_1} \\
& -\{kA_{01}e^{-i\varsigma_1} - kA_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}}\}(2\phi_1^2(l_D))
\end{aligned} \tag{44}$$

針對第二模態中則須挑出 $e^{i\omega_2 T_0}$ 與 $e^{4i\omega_1 T_0}$ 的長期項如下：

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_2^4(3A_{02}^{\,2}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_3} + \gamma_2^2\gamma_1^2(2A_{02}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_2} + \gamma_2^2\gamma_3^2(2A_{02}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_2}\} \\
& -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}A_{02}e^{-i\varsigma_2} - (\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{02}e^{-i\varsigma_2} \\
& -\{kA_{02}e^{-i\varsigma_2} - kA_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{02}e^{-i\varsigma_2} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}}\}(2\phi_2^2(l_D))
\end{aligned} \tag{45}$$

針對第三模態中則須挑出 $e^{i\omega_3 T_0}$ 與 $e^{9i\omega_1 T_0}$ 的長期項如下：

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_3^4(3A_{03}^{\,2}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_3} + \gamma_3^2\gamma_1^2(2A_{03}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_3} + \gamma_3^2\gamma_2^2(2A_{03}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_3}\} \\
& -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}A_{03}e^{-i\varsigma_3} - (\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{03}e^{-i\varsigma_3} \\
& -\{kA_{03}e^{-i\varsigma_3} - kA_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{03}e^{-i\varsigma_3} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}}\}(2\phi_3^2(l_D))
\end{aligned} \tag{46}$$

令以上長期向為 0 即可導出一條件解。以下，吾人將討論對於第一模態之激擾條件，吾人

將第一模態之長期項同乘$e^{i\varsigma_1}$並令$\hat{f}_1 e^{i\Gamma T_0} = \hat{f}_1 e^{i\omega_1 T_0} e^{i\sigma T_1}$；$\Gamma_A = \sigma T_1 + \varsigma_1$；$\dot{\Gamma}_A = \sigma + \dot{\varsigma}_1 = 0$；$\dot{\varsigma}_1 = -\sigma$；$\frac{\partial A_{01}}{\partial T_1} = \frac{\partial A_{03}}{\partial T_1} = 0$；$\Gamma_1 = -\varsigma_{D01} + \varsigma_1$；$\Gamma_2 = -\varsigma_{D02} + \varsigma_2$；$\Gamma_3 = -\varsigma_{D03} + \varsigma_3$

因此，式(44)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01}) + \gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02}) + \gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\} + 2\omega_1 A_{01}\sigma$$
$$-\{kA_{01} - kA_{D01}\cos(\Gamma_1) + \lambda\omega_1 A_{D01}\sin(\Gamma_1)\}(2\phi_1^2(l_D)) = \hat{f}_1\cos(\Gamma_A) \tag{47}$$

式(44)之虛部為：

$$-(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1 A_{01}$$
$$-\{-kA_{D01}\sin(\Gamma_1) + \lambda A_{01}\omega_1 - \lambda\omega_1 A_{D01}\cos(\Gamma_1)\}(2\phi_1^2(l_D)) = \hat{f}_1\sin(\Gamma_A) \tag{48}$$

將上兩式(47)，(48)平方和後消除與時間有關的項得到下式：

$$[-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01}) + \gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02}) + \gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\} + 2\omega_1 A_{01}\sigma$$
$$-\{kA_{01} - kA_{D01}\cos(\Gamma_1) + \lambda\omega_1 A_{D01}\sin(\Gamma_1)\}(2\phi_1^2(l_D))]^2$$
$$+[-(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1 A_{01} - \{-kA_{D01}\sin(\Gamma_1) + \lambda A_{01}\omega_1$$
$$-\lambda\omega_1 A_{D01}\cos(\Gamma_1)\}(2\phi_1^2(l_D))]^2 = \hat{f}_1^2 \tag{49}$$

吾人將第二模態之長期項同乘$e^{i\varsigma_3}$而式(45)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_2^4(3A_{02}{}^2\overline{A}_{02}) + \gamma_2^2\gamma_1^2(2A_{02}A_{01}\overline{A}_{01}) + \gamma_2^2\gamma_3^2(2A_{02}A_{03}\overline{A}_{03})\} - 2\omega_2 A_{02}\dot{\varsigma}_2$$
$$-\{kA_{02} - kA_{D02}\cos(\Gamma_2) + \lambda\omega_2 A_{D02}\sin(\Gamma_2)\}(2\phi_2^2(l_D)) = 0 \tag{50}$$

式(45)之虛部為：

$$-(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_3 A_{03}$$
$$-\{-kA_{D02}\sin(\Gamma_2) + \lambda A_{02}\omega_2 - \lambda\omega_2 A_{D02}\cos(\Gamma_2)\}(2\phi_2^2(l_D)) = 0 \tag{51}$$

同理將第三模態之長期項同乘$e^{i\varsigma_3}$而式(46)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_3^4(3A_{03}{}^2\overline{A}_{03}) + \gamma_3^2\gamma_1^2(2A_{03}A_{01}\overline{A}_{01}) + \gamma_3^2\gamma_2^2(2A_{03}A_{02}\overline{A}_{02})\} - 2\omega_3 A_{03}\dot{\varsigma}_3$$
$$-\{kA_{03} - kA_{D03}\cos(\Gamma_3) + \lambda\omega_3 A_{D03}\sin(\Gamma_3)\}(2\phi_3^2(l_D)) = 0 \tag{52}$$

式(46)之虛部為：

$$-(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_3 A_{03}$$
$$-\{-kA_{D03}\sin(\Gamma_3) + \lambda A_{03}\omega_3 - \lambda\omega_3 A_{D03}\cos(\Gamma_3)\}(2\phi_3^2(l_D)) = 0 \tag{53}$$

接著將式(40)帶入式(41)中並依照取得式(44)之方式，挑選各模態之長期向後再乘上該模態之$e^{i\varsigma_m}$，可得線性 TMD 各模態之實虛部，其中線性 TMD 第一模態之實部為：

$$m_D\omega_1{}^2 A_{D01}\cos(\Gamma_1) - (kA_{01} - kA_{D01}\cos(\Gamma_1) + \lambda\omega_1 A_{D01}\sin(\Gamma_1)) = 0 \tag{54}$$

線性 TMD 第一模態之虛部為：

$$m_D\omega_1{}^2 A_{D01}\sin(\Gamma_1) - (-kA_{D01}\sin(\Gamma_1) + \lambda A_{01}\omega_1 - \lambda\omega_1 A_{D01}\cos(\Gamma_1)) = 0 \tag{55}$$

線性 TMD 第二模態之實部為：

$$m_D\omega_2{}^2 A_{D02}\cos(\Gamma_2) - (kA_{02} - kA_{D02}\cos(\Gamma_2) + \lambda\omega_2 A_{D02}\sin(\Gamma_2)) = 0 \tag{56}$$

線性 TMD 第二模態之虛部為：

$$m_D\omega_2{}^2 A_{D02}\sin(\Gamma_2) - (-kA_{D02}\sin(\Gamma_2) + \lambda A_{02}\omega_2 - \lambda\omega_2 A_{D02}\cos(\Gamma_2)) = 0 \tag{57}$$

線性 TMD 第三模態之實部為：

$$m_D\omega_3{}^2 A_{D03}\cos(\Gamma_3) - (kA_{03} - kA_{D03}\cos(\Gamma_3) + \lambda\omega_3 A_{D03}\sin(\Gamma_3)) = 0 \tag{58}$$

線性 TMD 第三模態之虛部為：

$$m_D\omega_3^{\ 2}A_{D03}\sin(\Gamma_3)-(-kA_{D03}\sin(\Gamma_3)+\lambda A_{03}\omega_3-\lambda\omega_3 A_{D03}\cos(\Gamma_3))=0 \tag{59}$$

最後，吾人透過數值方法解聯立方程式(49~59)繪製振幅 A_{01}，A_{02}，A_{03}，A_{D01}，A_{D02}，A_{D03} 與微調頻率 σ 在此系統中之 Fixed Points Plots 以觀察系統振動現象，並全面分析 TMD 各種參數，再利用 3D maximum amplitude plots (3D MAP)歸納 TMD 之最佳組合。而關於激擾第二模態與第三模態的部分，吾人透過式(43)可發現雖然模態不同，但其數學形式是一樣的，其分析結果亦相似，故不多做贅述。

4.3 非線性簡支樑附加線性 TMD 之 3D MAP

透過前一節所述之系統，吾人分別列出 $m_D=0.004\sim m_D=0.02$；$\lambda=0.05\sim\lambda=0.15$；$k=1.1\sim k=1.9$；$l_D=0.0001\sim l_D=0.666$ 之 3D MAP，如圖 11~圖 15。其中以圖 11 為例，該圖是代表第一模態 $\lambda=0.05$ 時的 3D MAP，其中顯示彈性樑振幅， TMD 位置與 TMD 質量比的關係。吾人分別表示出 TMD 彈性係數 (k) 在 1.9, 1.7, 1.5, 1.3 與 1.1 時，非線性彈性樑的最大振幅，圖 11 是以彈性樑之最大振幅為垂直軸的 3D MAP。該圖在 $l_D=0.5$ 各平面皆有一谷值，故吾人取圖 13-(a) 當 $l_D=0.5$ 時之一截面圖(圖 16-(a))，如圖 16-(a) 所示當 $k=0.9$ 時在 $m_D=0.025$ 有一極小值約為 0.26102，同時吾人亦觀察到圖 16-(b)(當 $l_D=0.33$)與圖 16-(c) (當 $l_D=0.16$)當 $k=1.9$ 時在 $m_D=0.025$ 皆有一極小值，其 m_Dk 值為 0.0475；這意味著不同的 l_D，其最佳的減振組合皆為 $m_Dk=0.0475$ 而顯然 m_Dk 將是一個具有代表性的變數。同理，圖 12~15 是代表 λ =0.075, 0.1, 0.125 與 0.15 時的 3D MAP，其中各圖是以彈性樑的最大振幅為縱軸的 3D 圖。由此，吾人得到一結論，非線性簡支樑附加線性 TMD 之系統中減振效果最為顯著的位置是在 $l_D=0.5$，但減振效果並非由單一參數主導，由 3DMAP 圖不難發現，除了滿足 $l_D=0.5$ 以外，較大的阻尼係數 λ 相對的也可以得到一個較好的結果。若在線性 TMD 位置 l_D 與阻尼係數 λ 皆無法更動的狀況下，如果選擇線性 TMD 的某固定彈性系數，其最佳減振效果的質量也不同。由圖 11~15 可發現，減振效果可能與線性 TMD 質量及彈性係數之比例有關。就以目前 3DMAP 圖所示線性 TMD 之減振效果可能存在一關係式 $A_{\max}=f(l_D,\lambda,m_Dk)$，並可由 m_Dk 項得到一最大振幅之極小值，即最佳減振效果。但其深入的關係將於本文後續研究之，就初步結果而言，仍然只能以 3D MAP 判斷其結果。

5. 非線性 TMD 之減振分析

5.1 非線性簡支樑附加非線性 TMD 之方程式分析

同第四章所述，吾人假設非線性 TMD 運動為一質點運動(W_D 為 TMD 位移)，則非線性簡支樑附加線性 TMD 運動方程式 ε^1 的項可寫成如下：

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial T_0^{\ 2}}+\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4}=0 \tag{60}$$

非線性簡支樑附加非線性 TMD 之 ε^3 的項如下：

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0{}^2}W_1 + W_1{}^{iv} = -2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}W_0 - (\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}W_0$$

$$+\frac{1}{2}\hat{A}\int_0^1 (W_0{}')^2 dx\ W_0{}'' + \hat{a}_{D0U}a_{D0U}$$

$$-\{k(W_0 - W_{D0}) + \lambda(\frac{\partial}{\partial T_0}W_0 - \frac{\partial}{\partial T_0}W_{D0})$$

$$+\beta(W_0 - W_{D0})^3\}\delta(x - l_D) \tag{61}$$

而非線性 TMD 方程式則為：

$$m_D\frac{\partial^2 W_{D0}}{\partial T_0{}^2} = k(W_0 - W_{D0}) + \lambda(\frac{\partial W_0}{\partial T_0} - \frac{\partial W_{D0}}{\partial T_0}) + \beta(W_0 - W_{D0})^3 \tag{62}$$

吾人從第三章的研究中，分析出此主體架構並無內共振現象，但是各模態間卻存在著相互耦合的情形。因此吾人將針對此系統的前三個模態加入非線性減振器的效果分析之。而此處非線性 TMD 位移函數之形式則如第四章中線性 TMD 之假設。令非線性 TMD 之振動位移如下，並以激擾第一模態的情況下：

$$W_{D0m} = (A_{D0m}e^{-i\varsigma_{D0m}}e^{i\omega_m T_0} + \overline{A}_{D0m}e^{i\varsigma_{D0m}}e^{-i\omega_m T_0})\sin\gamma_m x = \overline{\xi}_{D0m}\phi_1 \tag{63}$$

如此，吾人可將式(63)代回式(61)W_{D0}中找出其長期項，並分析其頻率響應，並同先前假設吾人假設外力形式為一均勻分布力 $\hat{f}_m e^{i\Gamma T_0} = \hat{f}_m e^{i(\omega_m + \varepsilon\sigma)T_0} = \hat{f}_m e^{i\omega_m T_0}e^{i\sigma T_1}$ 而第一模態吾人需要挑出與有關ω_1的長期項。因此吾人將式(22)、(23)、(63)帶入式(60)及式(61)並正交化。

非線性簡支樑附加非線性 TMD ε^1 正交化結果：

$$\overset{**}{\xi}_{0m}(\tau) + \gamma_m^4\xi_{0m}(\tau) = 0 \tag{64}$$

非線性簡支樑附加非線性 TMD ε^3 正交化結果：

$$\overset{**}{\xi}_{1m}(\tau) + \gamma_m^4\xi_{1m}(\tau) = -\frac{1}{4}\hat{A}(\sum_{n=1}^{3}\xi_{0n}\gamma_n)^2(\gamma_m^2\xi_{0m}) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}\xi_{0m}$$

$$-(\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{0m} + \hat{a}_{D0U}a_{D0U}\frac{\int_0^1 \phi_m dx}{\int_0^1 \phi_m^2 dx}$$

$$-\{k\xi_{0m} - k\overline{\xi}_{D01} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}\xi_{01} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}\overline{\xi}_{D01} + \beta(\xi_{0m} - \overline{\xi}_{D01})^3\}\frac{\phi_m{}^2(l_D)}{\int_0^1 \phi_m^2 dx} \tag{65}$$

後再從第一模態中挑出 $e^{i\omega_1 T_0}$ 之係數：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_1} + \gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_1} + \gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_1}\}$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - (\mu - \hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - \hat{f}_1 e^{i\sigma T_1}$$

$$-\{kA_{01}e^{-i\varsigma_1} - kA_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}} + \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{01}e^{-i\varsigma_1} - \lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}}$$

$$+\beta e^{-i\varsigma_1}[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}}e^{i\varsigma_1} + 6A_{01}A_{D01}\overline{A}_{D01} - 3A_{01}^2\overline{A}_{D01}e^{i\varsigma_{D01}}e^{-i\varsigma_1}$$

$$+3A_{01}^2\overline{A}_{01} - 6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}e^{-i\varsigma_{D01}}e^{i\varsigma_1} + 3\overline{A}_{01}A_{D01}^2e^{-2i\varsigma_{D01}}e^{2i\varsigma_1}](\phi_1^2(l_D)\}(2\phi_1^2(l_D)) \tag{66}$$

在此，吾人假設因應外力激擾，非線性 TMD 也僅於外力作用之模態產生減振，其餘未被

激擾之模態則不考慮 TMD 之影響；則針對第二模態須挑出 $e^{i\omega_2 T_0}$ 與 $e^{4i\omega_2 T_0}$ 的長期項如下：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_2^4(3A_{02}{}^2\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_2}+\gamma_2^2\gamma_1^2(2A_{02}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_2}+\gamma_2^2\gamma_3^2(2A_{02}A_{03}\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_2}\}\\
&-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}A_{02}e^{-i\varsigma_2}-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{02}e^{-i\varsigma_2}\\
&-\{kA_{02}e^{-i\varsigma_2}-kA_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}}+\lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{02}e^{-i\varsigma_2}-\lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}}\\
&+\beta e^{-i\varsigma_2}[-3A_{D02}^2\overline{A}_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}}e^{i\varsigma_2}+6A_{02}A_{D02}\overline{A}_{D02}-3A_{02}^2\overline{A}_{D02}e^{i\varsigma_{D02}}e^{-i\varsigma_2}\\
&+3A_{02}^2\overline{A}_{02}-6A_{02}\overline{A}_{02}A_{D02}e^{-i\varsigma_{D02}}e^{i\varsigma_2}+3\overline{A}_{02}A_{D02}^2e^{-2i\varsigma_{D02}}e^{2i\varsigma_2}](\phi_2^2(l_D)\}(2\phi_2^2(l_D))
\end{aligned}
\tag{67}
$$

針對第三模態中則須挑出 $e^{i\omega_3 T_0}$ 與 $e^{9i\omega_1 T_0}$ 的長期項如下：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_3^4(3A_{03}{}^2\overline{A}_{03})e^{-i\varsigma_3}+\gamma_3^2\gamma_1^2(2A_{03}A_{01}\overline{A}_{01})e^{-i\varsigma_3}+\gamma_3^2\gamma_2^2(2A_{03}A_{02}\overline{A}_{02})e^{-i\varsigma_3}\}\\
&-2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}A_{03}e^{-i\varsigma_3}-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\frac{\partial}{\partial T_0}A_{03}e^{-i\varsigma_3}\\
&-\{kA_{03}e^{-i\varsigma_3}-kA_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}}+\lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{03}e^{-i\varsigma_3}-\lambda\frac{\partial}{\partial T_0}A_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}}\\
&+\beta e^{-i\varsigma_3}[-3A_{D03}^2\overline{A}_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}}e^{i\varsigma_3}+6A_{03}A_{D03}\overline{A}_{D03}-3A_{03}^2\overline{A}_{D03}e^{i\varsigma_{D03}}e^{-i\varsigma_3}\\
&+3A_{03}^2\overline{A}_{03}-6A_{03}\overline{A}_{03}A_{D03}e^{-i\varsigma_{D03}}e^{i\varsigma_3}+3\overline{A}_{03}A_{D03}^2e^{-2i\varsigma_{D03}}e^{2i\varsigma_3}](\phi_3^2(l_D)\}(2\phi_3^2(l_D))
\end{aligned}
\tag{68}
$$

令以上長期項為 0 即可導出一條件解。以下，吾人將討論對於第一模態之激擾條件，吾人將第一模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_1}$ 並令 $\hat{f}_1 e^{i\Gamma T_0}=\hat{f}_1 e^{i\omega_1 T_0}e^{i\sigma T_1}$；$\Gamma_A=\sigma T_1+\varsigma_1$；$\dot{\Gamma}_A=\sigma+\dot{\varsigma}_1=0$；$\dot{\varsigma}_1=-\sigma$；$\frac{\partial A_{01}}{\partial T_1}=\frac{\partial A_{03}}{\partial T_1}=0$

；$\Gamma_1=-\varsigma_{D01}+\varsigma_1$；$\Gamma_2=-\varsigma_{D02}+\varsigma_2$；$\Gamma_3=-\varsigma_{D03}+\varsigma_3$

因此，式(66)之實部為：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_1A_{01}\sigma\\
&-\{kA_{01}-kA_{D01}\cos(\Gamma_1)+\lambda\omega_1A_{D01}\sin(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+6A_{01}A_{D01}\overline{A}_{D01}\\
&-3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{01}-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\cos\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\cos 2\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}\\
&\times(2\phi_1^2(l_D))=\hat{f}_1\cos(\Gamma_A)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

式(66)之虛部為：

$$
\begin{aligned}
&-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1A_{01}\\
&-\{-kA_{D01}\sin(\Gamma_1)+\lambda A_{01}\omega_1-\lambda\omega_1A_{D01}\cos(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1\\
&-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\sin\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\sin\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}(2\phi_1^2(l_D))=\hat{f}_1\sin(\Gamma_A)
\end{aligned}
\tag{70}
$$

將上兩式(69)，(70)平方和後消除與時間有關的項得到下式：

$$[-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_1A_{01}\sigma$$
$$-\{kA_{01}-kA_{D01}\cos(\Gamma_1)+\lambda\omega_1A_{D01}\sin(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+6A_{01}A_{D01}\overline{A}_{D01}$$
$$-3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{01}-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\cos\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\cos 2\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}$$
$$\times(2\phi_1^2(l_D))]^2+$$
$$[-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_1A_{01}$$
$$-\{-kA_{D01}\sin(\Gamma_1)+\lambda A_{01}\omega_1-\lambda\omega_1A_{D01}\cos(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1$$
$$-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\sin\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\sin\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}(2\phi_1^2(l_D))]^2=\hat{f}_1^2 \tag{71}$$

吾人將第二模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_2}$ 而式(67)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_2A_{02}\dot{\varsigma}_2$$
$$-\{kA_{02}-kA_{D02}\cos(\Gamma_2)+\lambda\omega_2A_{D02}\sin(\Gamma_2)+\beta[-3A_{D02}^2\overline{A}_{D02}\cos\Gamma_2+6A_{02}A_{D02}\overline{A}_{D02}$$
$$-3A_{02}^2\overline{A}_{D02}\cos\Gamma_2+3A_{02}^2\overline{A}_{02}-6A_{02}\overline{A}_{02}A_{D02}\cos\Gamma_2+3\overline{A}_{02}A_{D02}^2\cos 2\Gamma_2]\phi_2^2(l_D)\}$$
$$\times(2\phi_2^2(l_D))=0 \tag{72}$$

式(67)之虛部為：

$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_2A_{02}$$
$$-\{-kA_{D02}\sin(\Gamma_2)+\lambda A_{02}\omega_2-\lambda\omega_2A_{D02}\cos(\Gamma_2)+\beta[-3A_{D02}^2\overline{A}_{D02}\sin\Gamma_2+3A_{02}^2\overline{A}_{D02}\sin\Gamma_2$$
$$-6A_{02}\overline{A}_{02}A_{D02}\sin\Gamma_2+3\overline{A}_{02}A_{D02}^2\sin\Gamma_2]\phi_2^2(l_D)\}(2\phi_2^2(l_D))=0 \tag{73}$$

吾人將第三模態之長期項同乘 $e^{i\varsigma_3}$ 而式(68)之實部為：

$$-\frac{1}{4}\hat{A}\{(\gamma_1^4(3A_{01}{}^2\overline{A}_{01})+\gamma_1^2\gamma_2^2(2A_{01}A_{02}\overline{A}_{02})+\gamma_1^2\gamma_3^2(2A_{01}A_{03}\overline{A}_{03})\}+2\omega_3A_{03}\dot{\varsigma}_3$$
$$-\{kA_{03}-kA_{D03}\cos(\Gamma_3)+\lambda\omega_3A_{D03}\sin(\Gamma_3)+\beta[-3A_{D03}^2\overline{A}_{D03}\cos\Gamma_3+6A_{03}A_{D03}\overline{A}_{D03}$$
$$-3A_{03}^2\overline{A}_{D03}\cos\Gamma_3+3A_{03}^2\overline{A}_{03}-6A_{03}\overline{A}_{03}A_{D03}\cos\Gamma_3+3\overline{A}_{03}A_{D03}^2\cos 2\Gamma_3]\phi_3^2(l_D)\}$$
$$\times(2\phi_3^2(l_D))=0 \tag{74}$$

式(68)之虛部為：

$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\omega_3A_{03}$$
$$-\{-kA_{D03}\sin(\Gamma_3)+\lambda A_{03}\omega_3-\lambda\omega_3A_{D03}\cos(\Gamma_3)+\beta[-3A_{D03}^2\overline{A}_{D03}\sin\Gamma_3+3A_{03}^2\overline{A}_{D03}\sin\Gamma_3$$
$$-6A_{03}\overline{A}_{03}A_{D03}\sin\Gamma_3+3\overline{A}_{03}A_{D03}^2\sin\Gamma_3]\phi_3^2(l_D)\}(2\phi_3^2(l_D))=0 \tag{75}$$

同第四章式(54~59)之步驟在本章中吾人亦可得非線性 TMD 各模態實虛部運動方程，其中線性 TMD 第一模態之實部為：

$$m_D\omega_1{}^2A_{D01}\cos(\Gamma_1)$$
$$-\{kA_{01}-kA_{D01}\cos(\Gamma_1)+\lambda\omega_1A_{D01}\sin(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+6A_{01}A_{D01}\overline{A}_{D01}$$
$$-3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\cos\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{01}-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\cos\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\cos 2\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}=0 \tag{76}$$

非線性 TMD 第一模態之虛部為：

$$m_D\omega_1{}^2A_{D01}\sin(\Gamma_1)$$
$$-\{-kA_{D01}\sin(\Gamma_1)+\lambda A_{01}\omega_1-\lambda\omega_1A_{D01}\cos(\Gamma_1)+\beta[-3A_{D01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1+3A_{01}^2\overline{A}_{D01}\sin\Gamma_1$$
$$-6A_{01}\overline{A}_{01}A_{D01}\sin\Gamma_1+3\overline{A}_{01}A_{D01}^2\sin\Gamma_1]\phi_1^2(l_D)\}=0 \tag{77}$$

非線性 TMD 第二模態之實部為：

$$m_D\omega_2^{\,2}A_{D02}\cos(\Gamma_2)$$
$$-\{kA_{02}-kA_{D02}\cos(\Gamma_2)+\lambda\omega_2A_{D02}\sin(\Gamma_2)+\beta[-3A_{D02}^2\overline{A}_{D02}\cos\Gamma_2+6A_{02}A_{D02}\overline{A}_{D02}$$
$$-3A_{02}^2\overline{A}_{D02}\cos\Gamma_2+3A_{02}^2\overline{A}_{02}-6A_{02}\overline{A}_{02}A_{D02}\cos\Gamma_2+3\overline{A}_{02}A_{D02}^2\cos 2\Gamma_2]\phi_2^2(l_D)\}=0 \qquad (78)$$

非線性 TMD 第二模態之虛部為：

$$m_D\omega_2^{\,2}A_{D02}\sin(\Gamma_2)$$
$$-\{-kA_{D02}\sin(\Gamma_2)+\lambda A_{02}\omega_2-\lambda\omega_2A_{D02}\cos(\Gamma_2)+\beta[-3A_{D02}^2\overline{A}_{D02}\sin\Gamma_2+3A_{02}^2\overline{A}_{D02}\sin\Gamma_2$$
$$-6A_{02}\overline{A}_{02}A_{D02}\sin\Gamma_2+3\overline{A}_{02}A_{D02}^2\sin\Gamma_2]\phi_2^2(l_D)\}=0 \qquad (79)$$

非線性 TMD 第三模態之實部為：

$$m_D\omega_3^{\,2}A_{D03}\cos(\Gamma_3)$$
$$-\{kA_{03}-kA_{D03}\cos(\Gamma_3)+\lambda\omega_3A_{D03}\sin(\Gamma_3)+\beta[-3A_{D03}^2\overline{A}_{D03}\cos\Gamma_3+6A_{03}A_{D03}\overline{A}_{D03}$$
$$-3A_{03}^2\overline{A}_{D03}\cos\Gamma_3+3A_{03}^2\overline{A}_{03}-6A_{03}\overline{A}_{03}A_{D03}\cos\Gamma_3+3\overline{A}_{03}A_{D03}^2\cos 2\Gamma_3]\phi_3^2(l_D)\}=0 \qquad (80)$$

非線性 TMD 第三模態之虛部為：

$$m_D\omega_3^{\,2}A_{D03}\sin(\Gamma_3)$$
$$-\{-kA_{D03}\sin(\Gamma_3)+\lambda A_{03}\omega_3-\lambda\omega_3A_{D03}\cos(\Gamma_3)+\beta[-3A_{D03}^2\overline{A}_{D03}\sin\Gamma_3+3A_{03}^2\overline{A}_{D03}\sin\Gamma_3$$
$$-6A_{03}\overline{A}_{03}A_{D03}\sin\Gamma_3+3\overline{A}_{03}A_{D03}^2\sin\Gamma_3]\phi_3^2(l_D)\}=0 \qquad (81)$$

透過數值方法解聯立方程(71~81)繪製非線性 TMD 在各種參數下的 3D MAP，為了可與第四章做比較，吾人令 $\beta=0.01$ 後列出 $m_D=0.004\sim m_D=0.02$；$\lambda=0.05\sim\lambda=0.15$；$k=1.1\sim k=1.9$；$l_D=0.0001\sim l_D=0.666$ 之 3D MAP 如圖 21~圖 25。其中可透過比較圖 21 與圖 11($\lambda=0.05$之 3D MAP)可發現圖 21 最佳減振值比圖 11 的最佳減振值還要小，這同時也表示非線性簡支樑附加非線性TMD之最佳減振效果優於非線性簡支樑附加線性TMD之最佳減振效果，在圖 21~25 與圖 11~15 的比較中都可看到此現象。而無論是非線性簡支樑附加非線性 TMD 或線性 TMD 在 $l_D=0.5$ 各平面皆有一谷值，為了進一步做比較，吾人亦取圖 23 當 $l_D=0.5$ 時之截面圖 26-(a)(圖 26-(a)中 open loop 的點將於後續章節說明)與圖 16-(a)進行比較，可更清楚的觀察到兩者之差異，值得注意的是在第四章所提到，若在線性 TMD 位置 l_D 與阻尼係數 λ 皆無法更動的狀況下，如果選擇線性 TMD 的某固定彈性系數，其最佳減振效果的質量也不同。而在非線性簡支樑附加非線性 TMD 時雖然在 $k=1.9$ 與 $m_D=0.03$ 也有一最小值 0.18594，但其 m_Dk 值明顯與非線性簡支樑附加線性 TMD 時不同，故取圖 23($\lambda=0.1$)當 $l_D=0.33$ 時之截面圖(圖 26-(b))與當 $l_D=0.16$ 時之截面圖(圖 26-(c))，發現在 m_Dk 值為 0.057 時皆有極小值，此結果說明非線性項 β 在此系統中所影響的不只是最佳減振效果，非線性項 β 也可以影響非線性 TMD 達最佳減振效益時各項參數之比例。最後，在圖 26-(a、b、c)中當 $l_D=0$ 或 $m_D=0$ 時其值等於圖 16-(a、b、c) 當 $l_D=0$ 或 $m_D=0$ 時之值，這也說明雖然非線性項 β 可以影響整個系統，但是在特定條件($l_D=0$ 或 $m_D=0$)下其結果將與非線性簡支樑附加線性 TMD 相符。此外，β 為彈性限度內，虎克定律之三階修正項。

5.2 非線性 TMD 之解析解

吾人分析此非線性 TMD (NES) 之振動情況，將以因次分析法分別討論其頻率之響應及時間域之解，茲略述於後。

A. 非線性 TMD 之頻率響應

在本節中吾人獨立探討只有非線性 TMD 時之振動狀況，但其中所提到非線性 TMD 之各項係數($\overline{m}_D$、$\overline{\lambda}$、$\overline{k}$、$\overline{\beta}$)與前章節中所述之係數($\overline{m}_D$、$\overline{\lambda}$、$\overline{k}$、$\overline{\beta}$)意義相同。吾人列舉具阻尼之非線性 TMD 方程式如下：

$$\overline{m}_D\ddot{\overline{W}}_D+\overline{\lambda}\dot{\overline{W}}_D+\overline{k}\overline{W}_D+\overline{\beta}\overline{W}_D{}^3=0 \tag{82}$$

初始條件$\overline{W}_D(0)=\overline{A}$，$\dot{\overline{W}}_D(0)=0$而本問題振動頻率$\omega$與下列參數有關

$\omega=f(\overline{m}_D,\overline{\lambda},\overline{k},\overline{\beta},\overline{A})$，各係數之因次如下

$\overline{m}_D=[M]$，$\overline{\lambda}=[\frac{M}{T}]$，$\overline{k}=[\frac{M}{T^2}]$，$\overline{A}=[L]$，$\overline{\beta}=[\frac{M}{L^2T^2}]$，$\omega=[\frac{1}{T}]$

此處 A 為質點起始位置，接著再利用因次分析，訂定各因次分析關係如下：

$$\pi_1=f(\pi_2,\pi_3)\text{；}\pi_1=\omega\overline{m}_D{}^{\alpha_1}\overline{k}^{\beta_1}\overline{A}^{\gamma_1}$$
$$\pi_2=\overline{\lambda}\overline{m}_D{}^{\alpha_2}\overline{k}^{\beta_2}\overline{A}^{\gamma_2}\text{；}\pi_3=\overline{\beta}\overline{m}_D{}^{\alpha_3}\overline{k}^{\beta_3}\overline{A}^{\gamma_3} \tag{83}$$

π_1 之因次分析：

$$\pi_1=\omega\overline{m}_D{}^{\alpha_2}\overline{k}^{\beta_2}\overline{A}^{\gamma_2}=\overline{m}_D{}^{-\frac{1}{2}}\overline{k}^{-\frac{1}{2}}\overline{m}_D{}^{\alpha_1}\overline{k}^{\beta_1}\overline{A}^{\gamma_1} \tag{84}$$

並由式(84)可得 $\alpha_1=\frac{1}{2}$；$\beta_1=-\frac{1}{2}$

π_2 之因次分析：

$$\pi_2=\overline{\lambda}\overline{m}_D{}^{\alpha_2}\overline{k}^{\beta_2}\overline{A}^{\gamma_2}=[M^0T^0L^0]=[M^1T^{-1}][M^1]^{\alpha_2}[M^1T^{-2}]^{\beta_2}[L^1]^{\gamma_2} \tag{85}$$

並由式(85)得下列聯立式

$1+\alpha_2+\beta_2=0$；$-1-2\beta_2=0$；$-2+\gamma_2=0$

吾人可得

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}\text{；}\beta_2=-\frac{1}{2}\text{；}\gamma_2=0 \tag{86}$$

π_3 之因次分析：

$$\pi_3=\overline{\beta}\overline{m}_D{}^{\alpha_3}\overline{k}^{\beta_3}\overline{A}^{\gamma_3}=[M^0T^0L^0]=[M^1T^{-2}L^{-2}][M^1]^{\alpha_3}[M^1T^{-2}]^{\beta_3}[L^1]^{\gamma_3} \tag{87}$$

並由式(87)得下列聯立式

$1+\alpha_3+\beta_3=0$；$-2-2\beta_3=0$；$-2+\gamma_3=0$

吾人可得

$$\alpha_3=0\text{；}\beta_3=-1\text{；}\gamma_3=2 \tag{88}$$

綜合以上 π_1；π_2；π_3 之因次分析可得下列關係：

$$\pi_1=f(\frac{\overline{\lambda}}{\sqrt{\overline{m}_D\overline{k}}},\frac{\overline{A}^2}{\overline{k}}\overline{\beta})=\omega\overline{m}_D{}^{\frac{1}{2}}\overline{k}^{-\frac{1}{2}} \tag{89}$$

接著再將式(89)無因次化後即可得下列無因次化之關係式：

$$\pi_1=f(\frac{\lambda}{\sqrt{m_Dk}},\frac{A^2}{k}\beta)=\omega m_D{}^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}} \tag{90}$$

並令 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_D}}$，則吾人可得 ω 為下列函數：

$$\frac{\omega}{\omega_0}=f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{m_Dk}},\frac{A^2}{k}\beta\right) \tag{91}$$

以下，本研究將分析 TMD 有無阻尼之振動的頻率域解。

(1) 不考慮阻尼之非線性振動

當阻尼係數$\lambda = 0$則非線性振動問題之頻率可表成函數形式為

$\frac{\omega}{\omega_0} = f\left(\frac{A^2}{k}\beta\right)$，而此 TMD 運動方程式為：

$$m_D \frac{\partial^2 W_D}{\partial T_0^{\,2}} + kW_D + \beta W_D^{\,3} = 0 \tag{92}$$

式(92)乃一標準 Duffing's 方程，吾人將式(92)同乘$\dot{W}_D$後並透過$(\frac{\partial^2 W_D}{\partial T_0^{\,2}})(\frac{\partial W_D}{\partial T_0}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_0}(\frac{\partial W_D}{\partial T_0})^2$

之關係得到下式：

$$m_D \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_0}(\frac{\partial W_D}{\partial T_0})^2 + k\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_0}W_D^2 + \beta\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial T_0}W_D^4 = 0 \tag{93}$$

同時吾人假設 $\varepsilon_\beta = \frac{\beta}{m_D}$

$$\frac{\partial}{\partial T_0}\left(\frac{1}{2}(\frac{\partial W_D}{\partial T_0})^2 + \frac{1}{2}\omega_0^{\,2}\mathrm{W}_D^{\,2} + \frac{\varepsilon_\beta}{4}\mathrm{W}_D^{\,4}\right) = 0 \tag{94}$$

將式(94)積分之後並令

$u = W_D$, $v = \frac{\partial u}{\partial T_0} = \frac{\partial W_D}{\partial T_0}$, $E = E(u,v)$ $\quad E_0 = E(\mathrm{u}(0),\ \mathrm{v}(0)) = E_0(A,0)$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\omega_0^{\,2}}{2}u^2 + \frac{\varepsilon_\beta}{4}u^4 = E(u,v) \tag{95}$$

代入初始條件後可得：

$$E(u(0),v(0)) = E(A,0) = \frac{\omega_0^{\,2}}{2}A^2 + \frac{\varepsilon_\beta}{4}A^4 \tag{96}$$

將(95)代入(96)後：

$$v = \frac{\partial u}{\partial T_0} = \pm\sqrt{\omega_0^{\,2}\left(A^2 - u^2\right) + \left(\frac{A^4}{2} - \frac{u^4}{2}\right)\varepsilon_\beta} \tag{97}$$

吾人將式(97)移項後並積分(令振動周期$\Gamma = \int_0^\Gamma dT_0$)：

$$\Gamma = \int_0^\Gamma dT_0 = 4\int_0^A \frac{du}{v} = 8\int_0^A \frac{du}{\sqrt{4\omega_0^{\,2}\left(A^2 - u^2\right) + 2\left(A^4 - u^4\right)\varepsilon_\beta}}$$

$$= 8\int_0^A \frac{1}{\sqrt{4\omega_0^{\,2}\left(A^2 - u^2\right)}}\frac{du}{\sqrt{1 + \frac{\left(A^4 - u^4\right)}{2\omega_0^{\,2}\left(A^2 - u^2\right)}\varepsilon_\beta}} \tag{98}$$

式(98)透過泰勒級數展開後可以得到下式

$$8\int_0^A \frac{1}{\sqrt{4\omega_0{}^2\left(A^2-u^2\right)}}\left(1-\frac{1}{4\omega_0{}^2}\frac{\left(A^4-u^4\right)}{\left(A^2-u^2\right)}\varepsilon_\beta+\ldots\right)du$$

$$=\frac{4}{\omega_0}\left[\int_0^A \frac{du}{\sqrt{\left(A^2-u^2\right)}}-\frac{\varepsilon_\beta A^4}{4\omega_0{}^2}\int_0^A \frac{du}{\left(A^2-u^2\right)^{3/2}}+\frac{\varepsilon_\beta}{4\omega_0{}^2}\int_0^A \frac{u^4du}{\left(A^2-u^2\right)^{3/2}}+\ldots\right]$$

$$=\frac{4}{\omega_0}\left[\sin^{-1}\frac{u}{A}\bigg|_0^A-\frac{\varepsilon_\beta A^4}{4\omega_0{}^2}\left(\frac{1}{A^2}\frac{u}{\sqrt{A^2-u^2}}\bigg|_0^A\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_\beta}{4\omega_0{}^2}\left(\frac{u}{2}\left(A^2-u^2\right)+\frac{A^2u}{\sqrt{A^2-u^2}}-\frac{3}{2}A^2\sin^{-1}\frac{u}{A}+\ldots\right)_0^A\right]$$

$$=\frac{4}{\omega_0}\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon_\beta\frac{3}{8\omega_0{}^2}\frac{\pi}{2}+O\left(\varepsilon_\beta{}^2\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_0}\left[1-\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right] \tag{99}$$

最後，振動週期"Γ"之精確解如下：

$$\Gamma=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega_0}\left[1-\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right]$$

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\left[1-\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right]^{-1}=\left[1+\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right] \tag{100}$$

此時，可得出非線性振動頻率之一階近似解：

$$\frac{\omega}{\omega_0}=f\left(\frac{A^2}{k}\beta\right)=\left[1+\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right] \tag{101}$$

且將式(100)平方後並以泰勒級數展開可得下式：

$$\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}=\left[1-\frac{3}{8}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right]^{-2}=\left[1+\frac{3}{4}\frac{A^2\varepsilon_\beta}{\omega_0{}^2}+O(\varepsilon_\beta{}^2)+\ldots\right]$$

$$\omega^2=\omega_0{}^2+\frac{3}{4}\mathrm{A}^2\frac{\beta}{m_D}+O\left(\beta^2\right)+\ldots \tag{102}$$

此乃不具阻尼之 TMD 的振動頻率解析解。而其二階修正解可得到如下：

$$\frac{\omega}{\omega_0}=1+\frac{3}{8}\frac{A^2}{k}\beta-\frac{21}{256}\frac{A^4}{k^2}\beta^2+O\left(\beta^3\right)+\ldots \tag{103}$$

(2) 具阻尼之非線性振動

為簡化問題，吾人令 $\mu=\frac{\lambda}{m_D}$，$\omega_0{}^2=\frac{k}{m_D}$，$\varepsilon_\beta=\frac{\beta}{m_D}<1$， 則具阻尼之 TMD 的運動方程式為：

$$\frac{\partial^2 W_D}{\partial T_0{}^2}+\mu\frac{\partial W_D}{\partial T_0}+\omega_0{}^2W_D+\varepsilon_\beta W_D{}^3=0 \tag{104}$$

吾人令初始條件為 $W_D(0)=A$，$\frac{\partial W_D}{\partial T_0}(0)=0$，當 $\varepsilon_\beta=\frac{\beta}{m_D}<1$，由前述非線性振動，將式(102)

代入式(104)得

$$\frac{\partial^2 W_D}{\partial T_0{}^2}+\mu\frac{\partial W_D}{\partial T_0}+(\omega^2-\frac{3}{4}A^2\varepsilon_\beta)W_D+\varepsilon W_D{}^3=0 \tag{105}$$

利用小擾動 Poincaré 之漸進展開式

$$W_D(T_0;\varepsilon_\beta)=W_{D0}(T_0)+\varepsilon_\beta W_{D1}(T_0)+... \tag{106}$$

將(106)代入(105)可得出

$$(\frac{\partial^2 W_{D0}}{\partial T_0{}^2}+\varepsilon_\beta\frac{\partial^2 W_{D1}}{\partial T_0{}^2}+...)+\mu(\frac{\partial W_{D0}}{\partial T_0}+\varepsilon_\beta\frac{\partial W_{D1}}{\partial T_0}+...)$$

$$+(\omega^2-\frac{3}{4}A^2\varepsilon_\beta)(W_{D0}+\varepsilon_\beta W_{D1}+...)+\varepsilon_\beta(W_{D0}+\varepsilon_\beta W_{D1}+...)^3=0 \tag{107}$$

$\varepsilon_\beta{}^0$ 的項如下：

$$\frac{\partial^2 W_{D0}}{\partial T_0{}^2}+\mu\frac{\partial W_{D0}}{\partial T_0}+\omega^2 W_{D0}=0 \tag{108}$$

$\varepsilon_\beta{}^1$ 的項如下：

$$\frac{\partial^2 W_{D1}}{\partial T_0{}^2}+\mu\frac{\partial W_{D1}}{\partial T_0}+\omega^2 W_{D1}=\frac{3}{4}A^2 W_{D0}-W_{D0}{}^3 \tag{109}$$

由式(108)可得具阻尼之非線性振動之零階解具備下列三種情況：

(i) $\mu^2=4\omega^2$ (Critical Damping) 則 $\lambda=\sqrt{2m_D k+\frac{3}{4}m_D A^2\beta}$ ，其解為：

$$W_{D0}=c_1 e^{\frac{-\mu}{2}T_0}+c_2 \tag{110}$$

(ii) $\mu^2>4\omega^2$ (Overdamping) 其解為：

$$W_{D0}=c_1 e^{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}T_0}+c_2 e^{\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}T_0} \tag{111}$$

(iii) $\mu^2<4\omega^2$ (Underdamping) 其解為：

$$W_{D0}=e^{\frac{-\mu}{2}T_0}(c_1\cos\sqrt{\omega^2-\frac{\mu^2}{4}}T_0+c_2\sin\sqrt{\omega^2-\frac{\mu^2}{4}}T_0)$$

$$=e^{\frac{-\mu}{2}T_0}(c_1\cos\omega^* T_0+c_2\sin\omega^* T_0) \tag{112}$$

其中 ω^* 代表具阻尼之振動系統頻率，之後將式(102)帶入式(112)後可得 $\omega^*=\sqrt{\omega_0{}^2-(\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{m_D}-\frac{3}{4}A^2\frac{\beta}{m_D})}$ 。並可求出明確關係式：

$$\frac{\omega^*}{\omega_0}=f(\frac{\lambda}{\sqrt{m_D k}},\frac{A^2}{k}\beta)=\sqrt{1-(\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{m_D k}-\frac{3}{4}\frac{A^2}{k}\beta)} \tag{113}$$

值得注意的特例為：當 $\lambda^2=3m_D\beta A^2$ 吾人可得 $\lambda=\sqrt{3m_D\beta}A$ ，此時 $\frac{\omega^*}{\omega_0}\to 1$ ，亦即 $\omega^*=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 則可推得 $x_0(t)=e^{-\frac{\mu}{2}t}(c_1\cos\omega_0 T_0+c_2\sin\omega_0 T_0)$ ，亦即此 $\varepsilon_\beta=\frac{\beta}{m_D}<1$ 時，阻尼係數 λ 與非線性系數 β 效應抵銷，則具阻尼之非線性振動系統之頻率 ω^* 恰為自然振動頻率

ω_0。最後，吾人透過數值方式繪出頻率響應圖，如圖 18 所示，可發現在 $\beta = 0.5$ 時最大振幅皆比 $\beta = 0$ 時線性振動之最大振幅還小。而圖 19 與圖 20 分別是 $\lambda = \sqrt{3m_D\beta}A$ 與 $\lambda \neq \sqrt{3m_D\beta}A$ 之時間響應圖，如圖 19 所示在 $\lambda = \sqrt{3m_D\beta}A$ 的情況下，具阻尼之非線性 TMD 之自然振動頻率與線性 TMD 之自然振動頻率一致，此現象亦證實之前的解析解的推論無誤。

最後，同吾人在第四章所討論的，當在線性 TMD 位置 l_D 與阻尼係數 λ 皆無法更動的狀況下，減振效果可能由線性 TMD 質量及彈性係數之乘積有關，在此處式(113)當 $\beta = 0$ 時可得 $\frac{\omega^*}{\omega_0} = f(\frac{\lambda}{\sqrt{m_D k}})$ 表示極有可能得到一系統最大振幅與各參數之關係式為 $A_{\max} = f(l_D, \lambda, \sqrt{m_D k})$，而此結果與先前預估也相吻合。

B. 非線性 TMD 之時間域分析

由式(108)解得 W_{D0} 如下

$$W_{D0} = c_1 e^{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}T_0} + c_2 e^{\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}T_0} \tag{114}$$

再將式(114)代入式(109)後令 $\alpha_+ = \frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}$；$\alpha_- = \frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4\omega^2}}{2}$ 得：

$$\ddot{W}_{D1} + \mu\dot{W}_{D1} + \omega^2 W_{D1} = \frac{3}{4}A^2(c_1 e^{\alpha_+ T_0} + c_2 e^{\alpha_- T_0})$$
$$-(c_1^{\ 3} e^{3\alpha_+ T_0} + 3c_1^{\ 2} e^{2\alpha_+ T_0} c_2 e^{\alpha_- T_0} + 3c_1 e^{\alpha_+ T_0} c_2^{\ 2} e^{2\alpha_- T_0} + c_2^{\ 3} e^{3\alpha_- T_0}) \tag{115}$$

解得 W_{D1}：

$$W_{D1} = \frac{\frac{3}{4}A^2 c_1}{\alpha_+^{\ 2} + \mu\alpha_+ + \omega^2} e^{\alpha_+ T_0} + \frac{\frac{3}{4}A^2 c_2}{\alpha_-^{\ 2} + \mu\alpha_- + \omega^2} e^{\alpha_- T_0}$$
$$-\frac{c_1^{\ 3}}{(3\alpha_+)^2 + 3\alpha_+\mu + \omega^2} e^{3\alpha_+ T_0} - \frac{c_2^{\ 3}}{(3\alpha_-)^2 + 3\alpha_-\mu + \omega^2} e^{3\alpha_- T_0}$$
$$-\frac{3c_1^{\ 2} c_2}{(2\alpha_+ + \alpha_-)^2 + (2\alpha_+ + \alpha_-)\mu + \omega^2} e^{(2\alpha_+ + \alpha_-)T_0}$$
$$-\frac{3c_1 c_2^{\ 2}}{(\alpha_+ + 2\alpha_-)^2 + (\alpha_+ + 2\alpha_-)\mu + \omega^2} e^{(\alpha_+ + 2\alpha_-)T_0} \tag{116}$$

之後由式(116)中吾人挑出 $e^{\alpha_+ T_0}$ 與 $e^{\alpha_- T_0}$ 相關的項，並帶入由初始條件 $W_D(0) = A$，$\frac{\partial W_D(0)}{\partial T_0} = 0$ 所解得之 c_1 及 c_2，可得非線性 TMD 時間域解析解之長期項為：

$$W_{D1} = \frac{\frac{3}{4}A^2}{\alpha_+^{\ 2} + \mu\alpha_+ + \omega^2}(\frac{\alpha_- A}{(\alpha_- - \alpha_+)})e^{\alpha_+ T_0} + \frac{\frac{3}{4}A^2}{\alpha_-^{\ 2} + \mu\alpha_- + \omega^2}(\frac{-\alpha_+ A}{(\alpha_- - \alpha_+)})e^{\alpha_- T_0} \tag{117}$$

5. 3 D MACP 分析

吾人利用在第四章第三節中所提到的 3D MAP(圖 11~圖 15)中取一較佳之 3D 圖曲面($\lambda = 0.1$；$k = 1.9$)繪製 3D MACP (maximum amplitude contour plot)如圖 17-(a)所示，透過 3D MACP 可看清楚在不同位置與質量時非線性簡支樑附加線性 TMD 之減振效果，為了明

確看出差異，吾人將這些 3D MACP 圖之不同振幅範圍以不同顏色表示之，而圖中呈現黑色的，其具有較好之減振效果；則白色的部分，減振效果較差。由圖 17-(a)所示約在質量為 0.025 位置為 0.5 時會有一最佳效果，而在質量與位置皆為 0 時則會得到較差的減振效果，其值與第三章所提到不具減震器之非線性支樑結果相同。此外，吾人選取圖 17-(a)中較具代表性的位置與質量，並列出其 Fixed Point Plots、Time Response 如圖 17-(b)、圖 17-(c)、圖 17-(d)、圖 17-(e)，其中圖 17-(b)為該 3D MACP($\lambda = 0.1$；$k = 0.9$)中 $m_D = 0$；$l_D = 0$ 之 Fixed Point Plots 其中最大振幅為約 0.506514，圖 17-(c)為該 3D MACP 中 $m_D = 0$；$l_D = 0$ 之 Time Response 當時間達 100 秒時振幅約為 0.506321，圖 17-(d)為該 3D MACP 中 $m_D = 0.025$；$l_D = 0.5$ 之 Fixed Point Plots 其最大振幅為 0.261018，圖 17-(e)為該 3D MACP 中 $m_D = 0.025$；$l_D = 0.5$ 之 Time Response 當時間達 100 秒時振幅約為 0.261011，在 3D MACP 中當 $m_D = 0$；$l_D = 0$ 時之 MaxAmp.為 0.506514，當 $m_D = 0.025$；$l_D = 0.5$ 時 MaxAmp.為 0.261018，透過三者交叉比對，而其結果彼此吻合，有此可驗證吾人所提出非線性簡支樑附加線性 TMD 之 3D MACP 圖的準確性，而非線性簡支樑附加線性 TMD 之 3D MACP 圖(圖 27-(a))也同上，可由圖 27-(b)、圖 27-(c)、圖 27-(d)、圖 27-(e)驗證及準確性。

透過比較圖 17-(a)與附圖 27-(a)可發現無論是附加線性或非線性 TMD 之非線性樑在 $m_D = 0$ 或 $l_D = 0$ 時其 MaxAmp.皆與無 TMD 之非線性樑相同，藉此驗證吾人對於 TMD 之假設在特定條件下($m_D = 0$ 或 $l_D = 0$)之正確性。在線性 TMD 的分析(圖 17-(a))顯示當 $m_D k$ 值為 0.0475 時會具有最佳減振效果，而在非線性 TMD 的分析(圖 27-(a))中雖然減振效果比線性 TMD 好(MaxAmp.之最小值為 0.18594)，但隨著非線性項 β 之影響($\beta = 0.01$)，最佳 $m_D k$ 值變為 0.057，為了進一步驗證其準確性吾人採用與圖 16 之方法取出該 3D MAP($\lambda = 0.1$；$\beta = 0.01$)之截面，如圖 26-(a)(當 $l_D = 0.5$)、圖 26-(b) (當 $l_D = 0.33$) 、圖 26-(c) (當 $l_D = 0.16$)，發現各截面間皆存在當 $m_D k$ 為 0.057 時有一最小值，由此可知非線性項 β 影響的不只是系統達穩態時之振幅，同時也會影響非線性簡支樑附加非線性 TMD 達最佳減振效果之係數組合。然而一個固定的 $m_D k$ 值已造成最佳減振效果仍存在著。

為了進一步驗證上述 3D MAP、3D MACP、Fixed Point Plots 與接下來將會討論到的 Basin of Attraction(BOA)之正確性，吾人透過五、3 中所提到的開回路解析解，針對在原本閉迴路下具最佳減振效果之非線性 TMD 參數組合進行驗證，如圖 26-(a)所示在 $k = 1.9$；$m_D = 0.03$ 時 open loop 解得 0.19142 與 closed loop 解得 0.18594 之誤差約為 2.9%，說明 closed loop 之數值解雖然與解析解有誤差存在，但其誤差值仍在可接受範圍，而在其它不同 k 值時之誤差分別為：4.7%(當 $k = 1.7$ 時)、 4.5%(當 $k = 1.5$ 時)、4.9%(當 $k = 1.3$ 時)與 5.6%(當 $k = 1.1$ 時)，由此驗證非線性簡支樑附加非線性 TMD 數值解之準確率。

6. 系統之穩定性分析

為了分析本 TMD 減振器在穩定性的應用，吾人刻意在本彈性樑系統中考慮一簡易的空氣動力之影響。首先，考慮無TMD之beam的穩定性分析由式(15)，吾人改變空氣動力項 $F_D = \hat{a}_{D0U} a_{D0U} + \hat{a}_{D1U} a_{D1U} \dot{W} + ...$ 其中之風速大小，並利用Floquet Theory 來分析此系統。吾人將利用Fourth-Order Runge-Kutta 法求出系統之Floquet Transition Matrix ，並得到此矩陣的特徵值，藉以求出Floquet Multipliers (F.M.) ，由此判定系統穩定與否。若所有F.M. <1，則系統為穩定狀態，而此穩定狀態又可分為兩種：一種為Asymptotically Stable，表示系統最後將會收斂至一點；而另一種Stable Limit Cycle，則是系統最後收斂至一穩定週期範圍，並做週期性運動。當F.M. >1時，即系統為不穩定狀態，其中若是有些F.M. >1，有些F.M. <1

時，表示此系統具有鞍點(Saddle Point) ，但仍為不穩定狀態，便可稱為Unstable Limit Cycle of the Saddle Point。上述各種系統穩定情況的定義，皆可參考Nayfeh 和Balachandran [2] 之文獻。首先，吾人以小擾動法假設：

$$W=\sum_{n=1}^{3}(\varepsilon_p\xi_n+\varepsilon_p^3\tilde{\xi}_n)\phi_n \tag{118}$$

其中ξ_1、ξ_2、ξ_3為平衡或具固定周期的項，而$\tilde{\xi}_1$、$\tilde{\xi}_2$、$\tilde{\xi}_3$為擾動項，再將式(118)代入式(15)後正交化並挑出$O(\varepsilon_p{}^3)$之各項係數即可得：

$$\ddot{\tilde{\xi}}_m+\gamma_m^4(\tilde{\xi}_m)=-\frac{1}{4}\hat{A}(\gamma_1^2\gamma_m^2(\xi_1{}^2\xi_m)+\gamma_2^2\gamma_m^2(\xi_2{}^2\xi_m)+\gamma_3^2\gamma_m^2(\xi_3{}^2\xi_m))$$
$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\dot{\tilde{\xi}}_m \tag{119}$$

接著將第一模態加入一激擾外力$F\sin(\omega_1 T)$再利用Fourth Order Runge-Kutta法求出具減振器系統之Floquet Transition Matrix，藉由此矩陣便可求得特徵值。吾人將代入不同的初始速度與初始位置，搭配F.M.判定法則，若為穩定狀況，就以一黑點表示之，若為不穩定狀況，則不做任何標記，以繪製出系統各個情況下的Basin of Attraction(BOA)圖形如圖28-(a)，藉此觀察系統之穩定性。

至於具 TMD 之穩定性分析，吾人參照式(119)之步驟可由式(9)與式(10)可得到式(121)與式(123)，而各模態減振器之W_{Dn}如式(120)所示，其中ξ_{D1}、ξ_{D2}、ξ_{D3}為具固定周期的項，而$\tilde{\xi}_{D1}$、$\tilde{\xi}_{D2}$、$\tilde{\xi}_{3D}$為擾動項。

$$W_{Dn}=(\varepsilon_p\xi_{Dn}+\varepsilon_p^3\tilde{\xi}_{Dn})\phi_n \quad (n=1,2,3) \tag{120}$$

非線性簡支樑附加線性 TMD 之小擾動方程為：

$$\ddot{\tilde{\xi}}_m+\gamma_m^4(\tilde{\xi}_m)=-\frac{1}{4}\hat{A}(\gamma_1^2\gamma_m^2(\xi_1{}^2\xi_m)+\gamma_2^2\gamma_m^2(\xi_2{}^2\xi_m)+\gamma_3^2\gamma_m^2(\xi_3{}^2\xi_m))$$
$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\dot{\tilde{\xi}}_m-\{k(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})+\lambda(\dot{\tilde{\xi}}_m-\dot{\tilde{\xi}}_{Dm})\}(2\sin^2(\gamma_m l_D)) \tag{121}$$

線性 TMD 之小擾動方程為：

$$m_D\ddot{\tilde{\xi}}_{Dm}=k(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})+\lambda(\dot{\tilde{\xi}}_m-\dot{\tilde{\xi}}_{Dm}) \tag{122}$$

非線性簡支樑附加非線性 TMD 之小擾動方程為：

$$\ddot{\tilde{\xi}}_m+\gamma_m^4(\tilde{\xi}_m)=-\frac{1}{4}\hat{A}(\gamma_1^2\gamma_m^2(\xi_1{}^2\xi_m)+\gamma_2^2\gamma_m^2(\xi_2{}^2\xi_m)+\gamma_3^2\gamma_m^2(\xi_3{}^2\xi_m))$$
$$-(\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U})\dot{\tilde{\xi}}_m-\{k(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})+\lambda(\dot{\tilde{\xi}}_m-\dot{\tilde{\xi}}_{Dm})$$
$$+\beta(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})^3\sin^2(\gamma_m l_D)\}(2\sin^2(\gamma_m l_D)) \tag{123}$$

非線性 TMD 之小擾動方程為：

$$m_D\ddot{\tilde{\xi}}_{Dm}=k(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})+\lambda(\dot{\tilde{\xi}}_m-\dot{\tilde{\xi}}_{Dm})+\beta(\tilde{\xi}_m-\tilde{\xi}_{Dm})^3\sin^2(\gamma_m l_D) \tag{124}$$

圖 28-(a)為不具任何 TMD 時之 3D BOA 圖，吾人發現$\overline{U}_W=30$時$\mu-\hat{a}_{D1U}a_{D1U}=0$，而此時恰為系統之臨界振動之情況，若是$\overline{U}_W$再增加擇系統將會主動發散。如圖 28-(a)吾人可觀察$\overline{U}_W=30$已幾乎無收斂的範圍了。吾人任選一$\overline{U}_W=25$的截面(圖 28-(b))驗證其穩定狀態。如圖 28-(c)為 Initial Vel.= -1.0；Initial Displ.= -2.0 之 Poincaré Map 證明其為穩定，圖

28-(d)為 Initial Vel.= -1.5；Initial Displ.= -2.0 之 Poincaré Map 可知系統為發散，此與 BOA 之預測吻合。

之後吾人也用相同方法進行非線性簡支樑附加線性 TMD 與非線性簡支樑附加非線性 TMD 之 3D BOA 圖繪製，如圖 29-(a)、圖 30-(a)，由圖 29-(c、d)確認圖 29-(a)之正確性，同理，圖 30-(c、d)亦證明圖 29-(a)之正確性。在上述三張圖中(圖 28-(a)、圖 29-(a)、圖 30-(a))可以發現當非線性簡支樑附加上 TMD 後，其穩定範圍都有明顯增加，尤其當非線性簡支樑附加非線性 TMD 時最為明顯，這表示除了第五章所述非線性項β除了可以降低振幅外，非線性項β也可以影響系統整體之穩定性。但仍須注意的是，雖然非線性簡支樑附加非線性 TMD(或線性 TMD)後穩定範圍較大，但是當非線性簡支樑所受之側向風大於臨界速度$\overline{U}_W = 30.12364$ ($\mu - \hat{a}_{DlU} a_{DlU} = 2.93253\times10^{-6} \approx 0$)，即空氣動力影響與結構阻尼抵銷時，則無論是否附加 TMD 系統都將發散。最後，為了確認非線性簡支樑附加非線性 TMD 之非線性項β的影響，在$\overline{U}_W = 20$與$\overline{U}_W = 30$時針對$\beta = -0.02 \sim 0.02$進行比較如圖 31 與圖 32，在圖 31(當$\overline{U}_W = 20$時)中系統較為穩定，因此沒有辦法很明顯的比較出在不同β下之影響，但是在圖 32(當$\overline{U}_W = 30$時)可以發現只有當$\beta = 0.01$會有一較大的穩定範圍，這也表示非線性項β並非其值越大系統就會越穩定，而是在β約為 0.01 時可以得到一最佳值。

7. 結論

本研究以一兩端絞接(hinged-hinged)之伯努力-歐拉樑(Bernoulli-Euler beam)受到空氣動力影響時之振動情形，並在樑上方加入可調質量減振器(Tuned Mass Damper (TMD))或具非線性彈性係數之非線性TMD。本文嘗試改變TMD之質量m_D、掛載位置l_D、阻尼係數λ、線性彈性係數k、非線性彈性係數β，探討TMD對非線性彈性樑之影響。吾人藉由MOMS法、Fixed Point Plots、3D MAP、3D MACP、Time Response相互比較進行分析在不同TMD參數組合下之減振效益，並以相似法(similarity solution)求得非線性TMD解析解以驗證本文數值法之正確性，之後再以Floquet Theory法、Basin of Attraction、Poincaré Map分析系統在空氣動力作用下之穩定性。最後，吾人對本研究提出以下重要結論：

1. 研究發現 Bernoulli-Euler beam 受兩端絞接之邊界條件與 Stretching Effect 之影響，使其成為非線性簡支樑(nonlinear hinged-hinged beam)，但卻沒有內共振現象，雖然第一、第二、第三模態之自然振動頻率存在 1：4：9 之整數比，但透過逐一激擾各模態後所繪之 Fixed Point Plots 可證實各模態間並無內共振現象。
2. 吾人發現非線性簡支樑附加線性 TMD 後可降低非線性簡支樑振動之振幅，且當掛載位置l_D為 0.5 時效果普遍較佳。同時也發現在固定其它參數(阻尼係數λ，掛載位置l_D)時若想達到最佳減振效益，則與 TMD 質量、彈性係數有關，即$m_D k$為一定值($m_D k$值為 0.0475)時可得到最佳減振效益，而當更改 TMD 掛載位置(l_D)時，此特性仍然存在。此外，在非線性簡支樑附加非線性 TMD 時也會有此現象，但是受到非線性彈性係數β影響，其$m_D k$值為 0.057 具最佳減振效益。同時，吾人也繪製其 3D MACP 並以 Time Response 進一步確認其正確性。
3. 吾人以因次分析法求得非線性 TMD 之解析解，並確立非線性 TMD 之自然振動頻率關係式為$\frac{\omega^*}{\omega_0} = f(\frac{\lambda}{\sqrt{m_D k}}, \frac{A^2}{k}\beta) = \sqrt{1-(\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{m_D k} - \frac{3}{4}\frac{A^2}{k}\beta)}$。最後，以此解建立一開迴路(open loop)解析解，其結果與原本的閉迴路(closed loop)數值解所得結果相符。
4. 吾人以 Floquet Theory 法繪製 Basin of Attraction(BOA)，發現具 TMD 之非線性簡支樑

其穩定範圍有明顯增加，尤其當非線性簡支樑附加非線性 TMD 時特別明顯，但這並不表示持續增加非線性彈性係數β系統將會更穩定，吾人發現在非線性彈性係數β約為 0.01 時才具最佳穩定範圍，同時，無論非線性彈性樑是否附加 TMD，當系統所受之空氣動力影響超過臨界風速時，系統都將發散。

參考文獻

[1] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience, New York, 1979.

[2] A. H. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 1995, pp.158-172.

[3] A. H. Nayfeh and P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, New York, 2004.

[4] Z. Ji and J. W. Zu, Method of multiple scales for vibration analysis of rotor-shaft systems with non-linear bearing pedestal model", *Journal of Sound and Vibration*,Vol. 218 ,1998, pp.293-305.

[5] A. H. Nayfeh, and S. A. Nayfeh, "On nonlinear modes of continuous systems," *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, 1994,pp.129-136.

[6] W.T. Van Horssen, and G.J. Boertjens, "On Mode Interactions for a Weakly Nonlinear Beam Equation," *Nonlinear Dynamics*, Vol.17, No.4, 1998, pp.23-40.

[7] J. S. Mundrey, *Railway Track Engineering*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 2000.

[8] Y. M. Fu, J. W. Hong and X. Q. Wang, "Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, 2006, pp.746-756.

[9] H. S. Shen, "A novel Technique For Nonlinear Analysis of Beams on Two-parameter Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.11, No.6, 2011, pp.999-1014.

[10] Y. R. Wang, and T. H. Chen, "The vibration reduction analysis of a nonlinear rotating mechanism deck system," *Journal of Mechanics*, Vol. 24, No. 3, 2008, pp. 253-266.

[11] Y. R. Wang, and M. H. Chang, "On The Vibration Reduction of a Nonlinear Support Base with Dual-shock-absorbers," *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation,* Series A, Vol.42, No.3, 2010, pp.179-190.

[12] Y. R. Wang, and H. S. Lin, "Stability analysis and vibration reduction for a two -dimensional nonlinear system," *International Journal of Structural Stability and Dynamics* (IJSSD), Vol.13, No.5, 2013. pp.1350031-1~1350031-30.

[13] Y. R. Wang, and C. M. Chang, "Elastic beam with nonlinear suspension and a dynamic vibration absorber at the free end," *Transaction of the Canadian Society for Mechanical Engineering (TCSME)*, Vol.38, No.1, 2014, pp.107-137.

[14] Y. R. Wang, and H. C. Lu, "Damping performance of dynamic vibration absorber in nonlinear simple beam with 1:3 internal resonance," submitted to the *International Journal of Acoustics and Vibration* ,Vol.22,No2,2017

[15] Y. R. Wang, and T. H. Kuo, "Effects of a dynamic vibration absorber on nonlinear hinged-free beam," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.142, Issue 4, April, 2016.

[16] Y. R. Wang, and T. W. Liang, "Application of lumped-mass vibration absorber on the vibration reduction of a nonlinear beam-spring-mass system with internal resonances," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 350, 2015, pp. 140-170.

[17] Y. Starosvetsky and O. V. Gendelman, "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. II: Optimization of a nonlinear vibration absorber," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 51, Issue 1, 2008, pp. 47-57.

[18]“Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: Nonlinear damping," *Journal of Sound and Vibration*, Volume 324, Issues 3–5, 2009, pp. 916-939.
[19] A.F. Vakakis and O. Gendelman, “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II - resonance capture,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol.68, Issue 1, 2000, pp. 42-48.
[20] R. Viguié, and G. Kerschen, “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system : a tuning methodology, ” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, Issue 3-5, 2009, pp. 780-793.
[21] Yung-Sheng Hsu , Neil S. Ferguson, and Michael J. Brennan, “The experi-mental performance of a nonlinear dynamic vibration absorber,” *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1*, Volume 35 of the series Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, April, 2013, pp 247-257
[22] F. S. Samani, and F. Pellicano, “Vibration reduction of beams under successive traveling loads by means of linear and nonlinear dynamic absorbers,” *Journal of Sound and Vibration*, 331, Issue 10, 2012, pp. 2272–2290.

附錄一

$W=\frac{\overline{W}}{\overline{l}}$ ， $x=\frac{\overline{x}}{\overline{l}}$ ， $l=\frac{\overline{l}}{\overline{l}}=1$ ， $\omega=(\frac{EI_A}{\overline{m}\overline{l}^4})^{1/2}$ ， $\tau=(\frac{EI_A}{\overline{m}\overline{l}^4})^{1/2}\overline{t}$ ， $\hat{A}=\frac{A\overline{l}^2}{I_A}$ ， $\mu=\frac{\overline{l}^4}{\overline{m}EI_A}\overline{\mu}$ ，

$m_D=\frac{\overline{m}_D}{\overline{m}}$ ， $k=\frac{\overline{l}^4\overline{k}}{EI_A}$ ， $\lambda=\frac{\overline{l}^4\overline{\lambda}}{EI_A}(\frac{EI_A}{\overline{m}\overline{l}^4})^{1/2}$ ， $\beta=\frac{\overline{l}^6\overline{\beta}}{EI_A}$ ， $\hat{a}_{D0I}=\frac{\rho_a\overline{U}_W{}^2\overline{d}}{2\overline{m}\omega^2}$ ， $\hat{a}_{D1I}=\frac{\rho_a\overline{U}_W\overline{d}}{2\overline{m}\omega^2}$ ，

$\hat{a}_{D2I}=\frac{\rho_a\overline{d}}{2\overline{m}\omega^2}$ 。

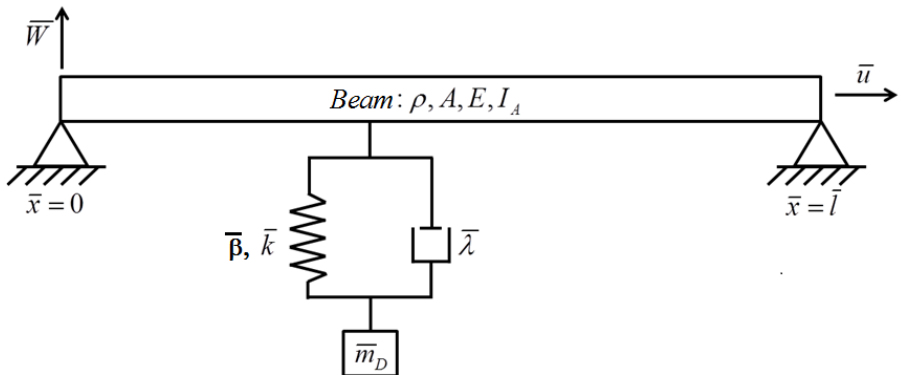


圖 1 具減振器之主體架構與邊界條件

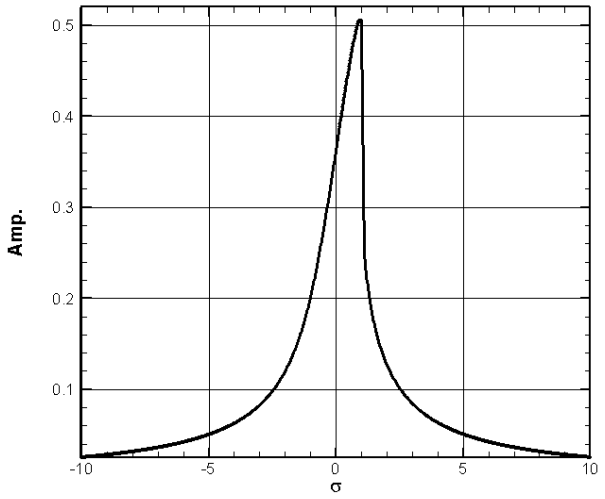


圖 2 激擾第一模態之第一模態 Fixed Point Plot

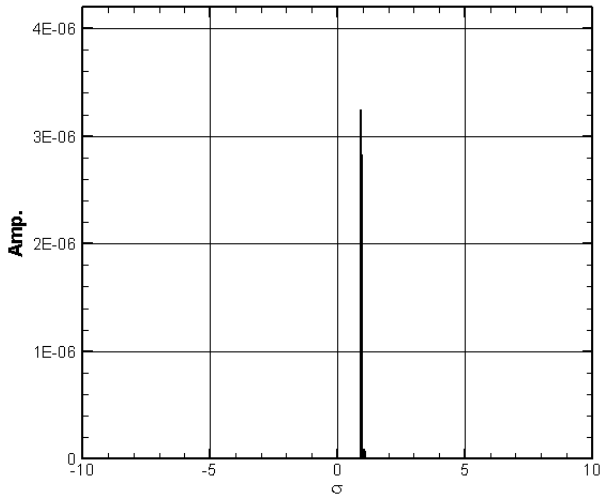


圖 3 激擾第一模態之第二模態 Fixed Point Plot

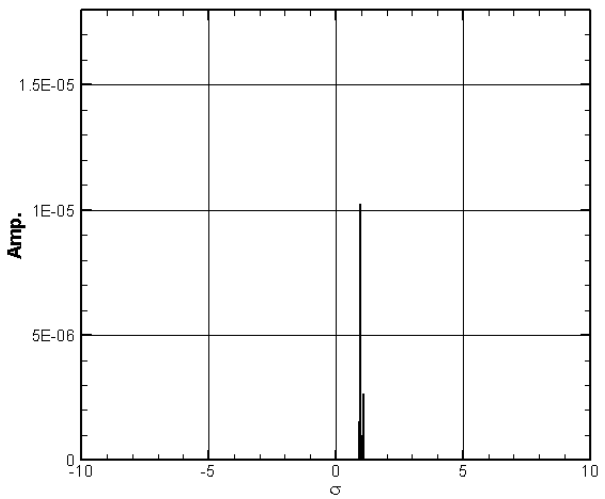


圖 4 激擾第一模態之第三模態 Fixed Point Plot

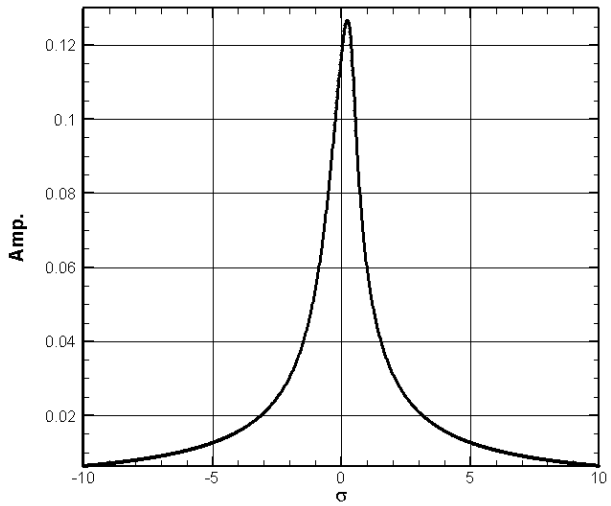


圖 5 激擾第二模態之第二模態 Fixed Point Plot

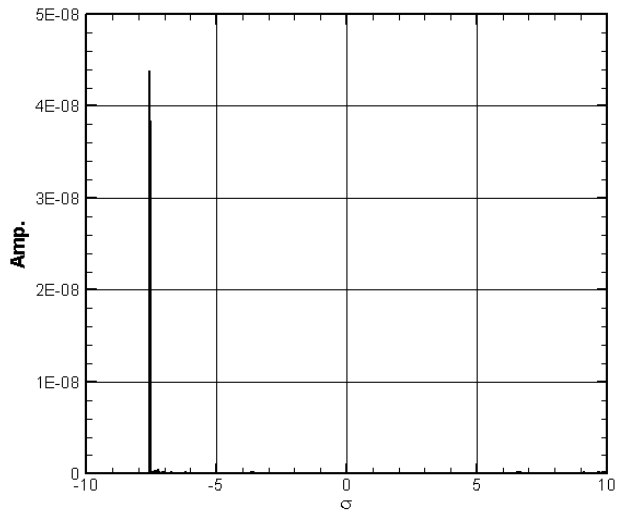


圖 6 激擾第二模態之第一模態 Fixed Point Plot

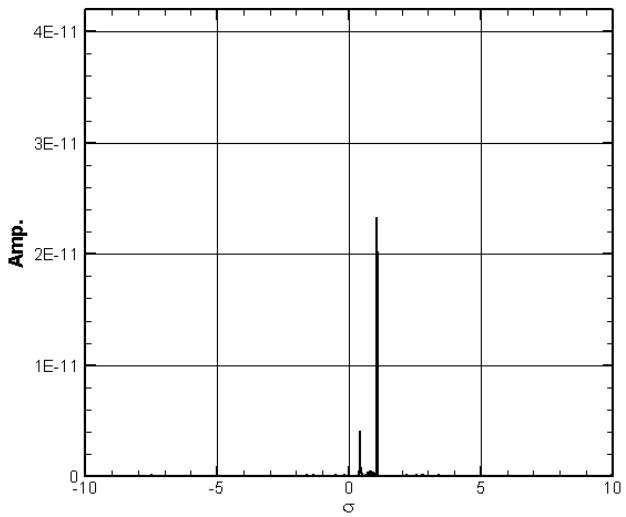


圖 7 激擾第二模態之第三模態 Fixed Point Plot

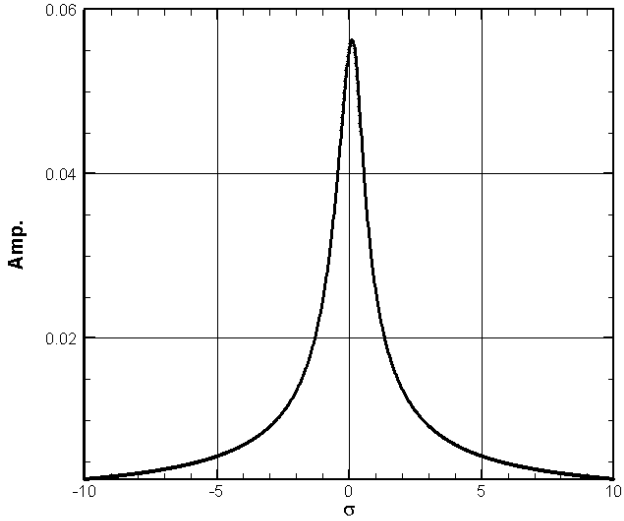


圖 8 激擾第三模態之第三模態 Fixed Point Plot

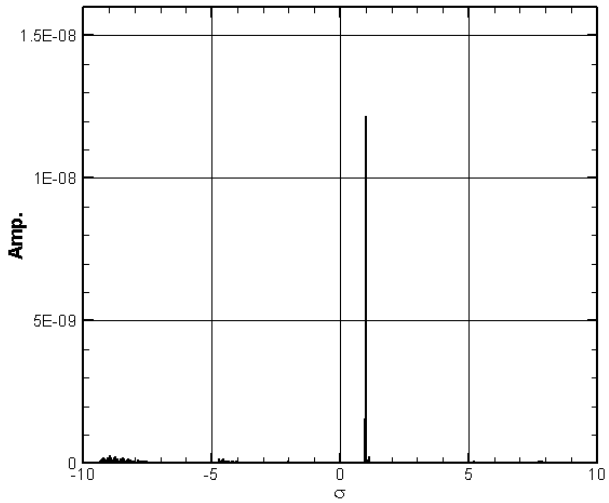


圖 9 激擾第三模態之第一模態 Fixed Point Plot

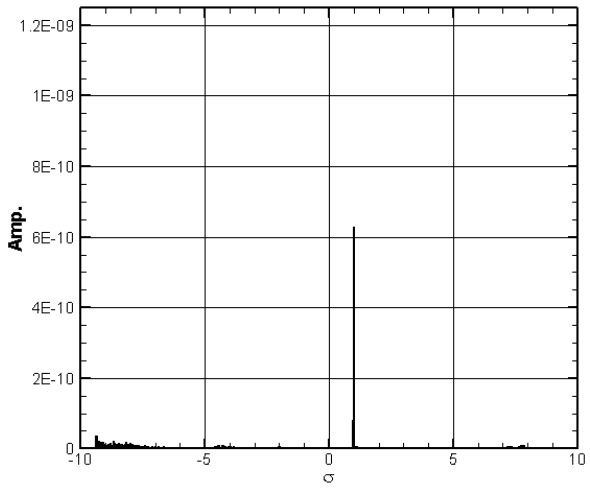


圖 10 激擾第三模態之第二模態 Fixed Point Plot

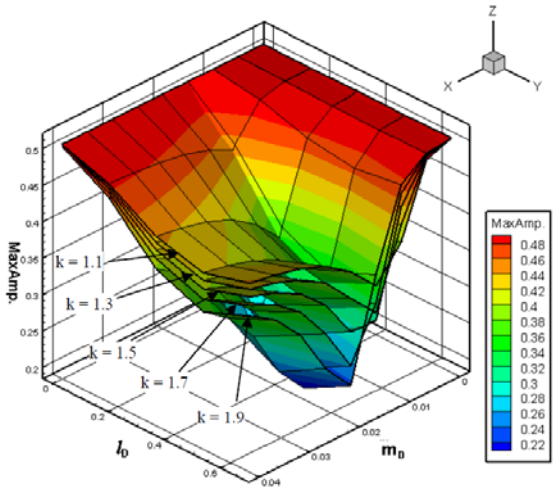


圖 11 線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.05$
(最佳減振值 0.23908)

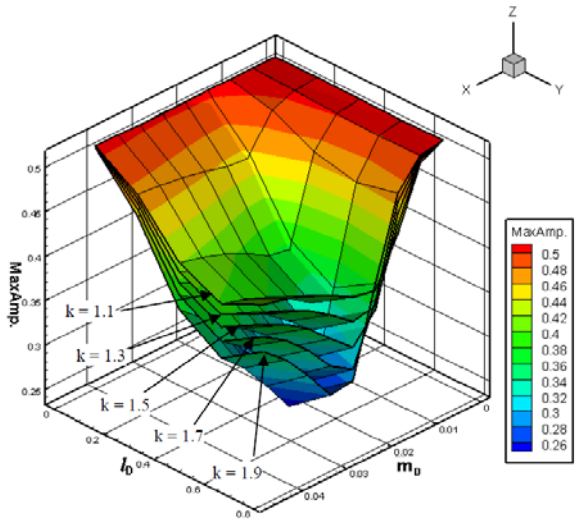


圖 12 線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.075$
(最佳減振值 0.24519)

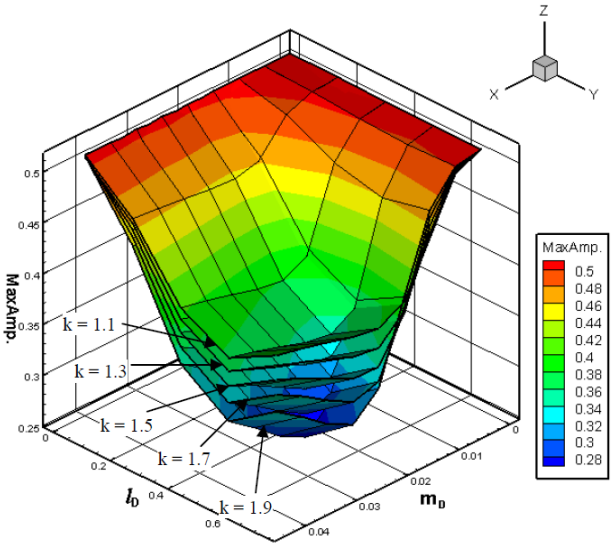


圖 13 線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$
(最佳減振值 0.26102)

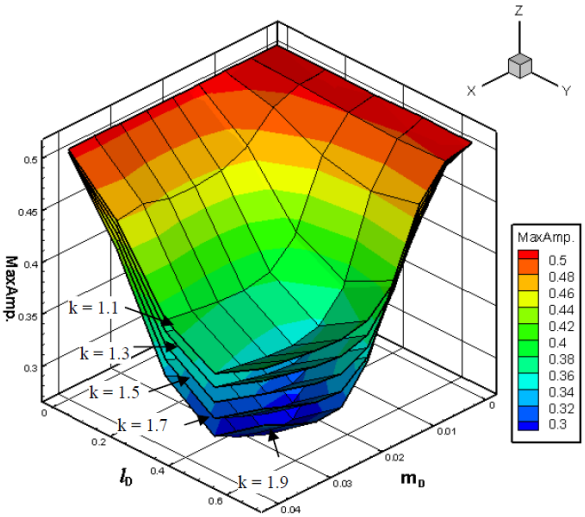


圖 14 線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.125$
(最佳減振值 0.27657)

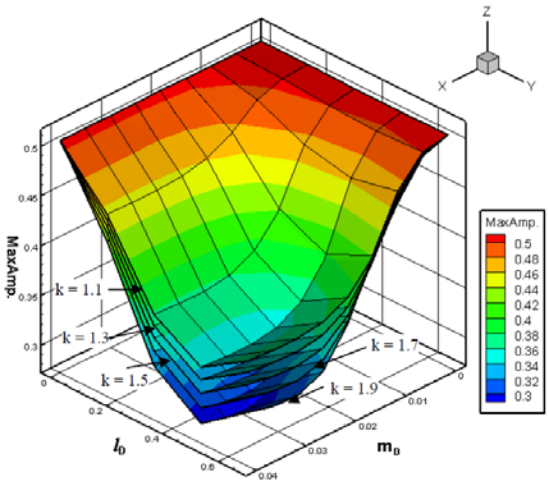
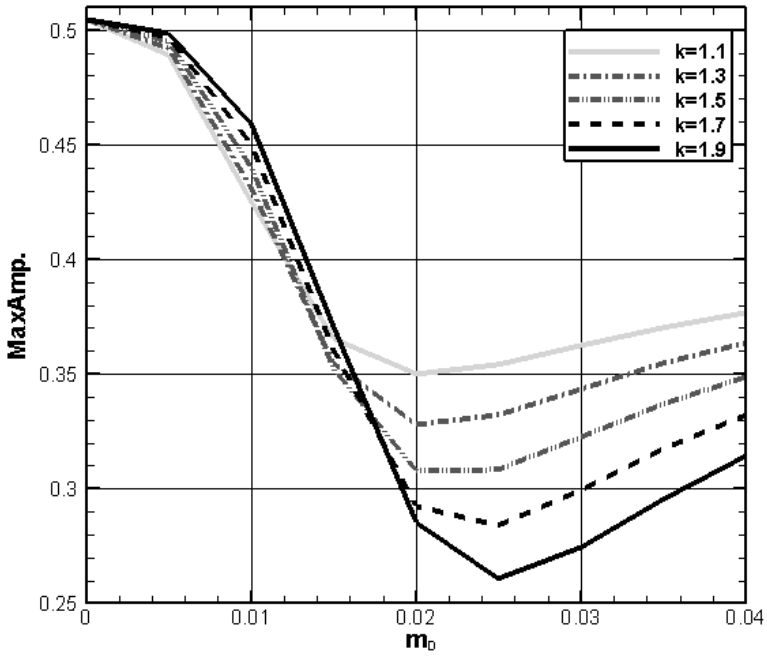
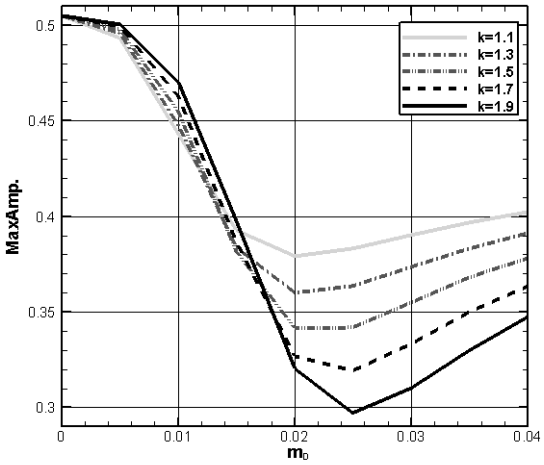
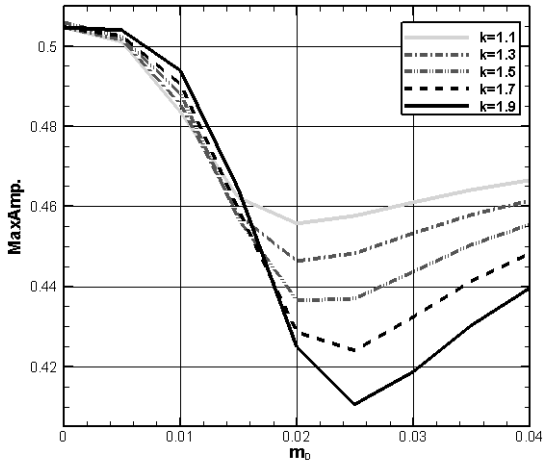


圖 15 線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.15$ (最佳減振值 0.28278)



(a)





(b) (c)

圖 16-(a)線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.5$ 截面圖

圖 16-(b) 非線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.33$ 截面圖

圖 16-(c) 非線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.16$ 截面圖

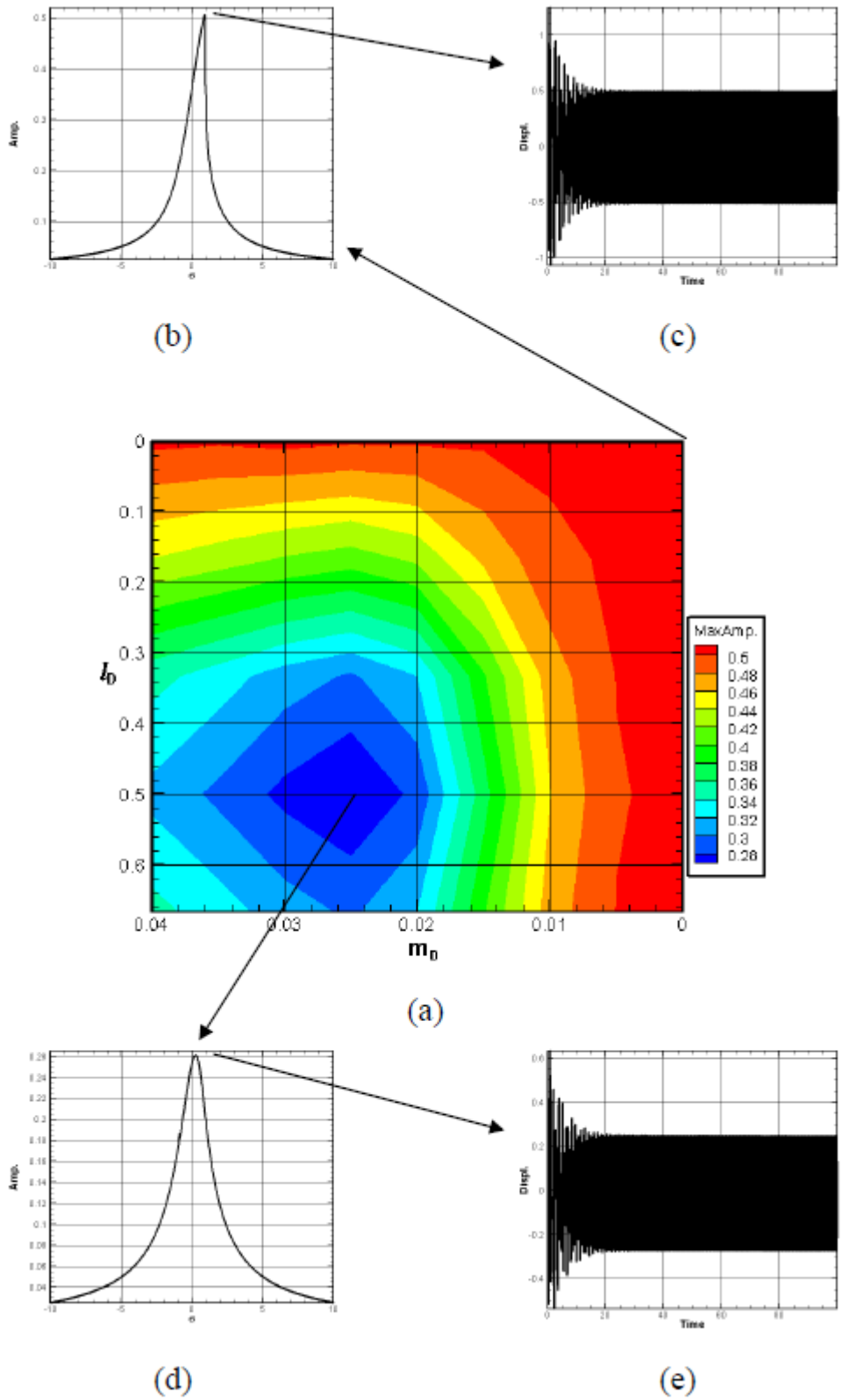


圖 17-(a)線性 TMD 之 3DMACP $\lambda = 0.1$；$k = 0.9$

圖 17-(b)、(c)當 $m_D = 0$；$l_D = 0$ 之 Fixed Point Plot 與 Time Response

圖 17-(d)、(e)當 $m_D = 0.025$；$l_D = 0.5$ 之 Fixed Point Plot 與 Time Response

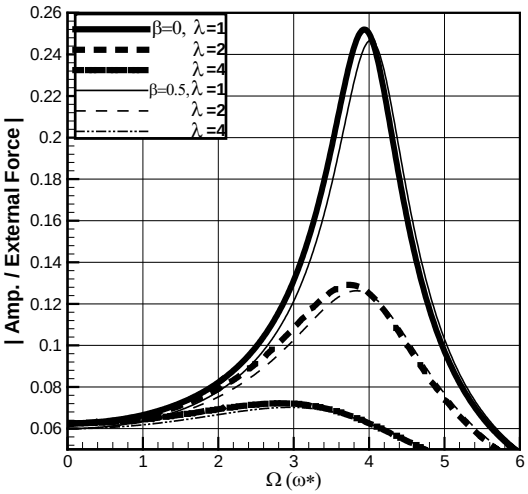


圖 18 非線性彈性係數 0 及 0.5 時不同阻尼係數之頻率響應圖

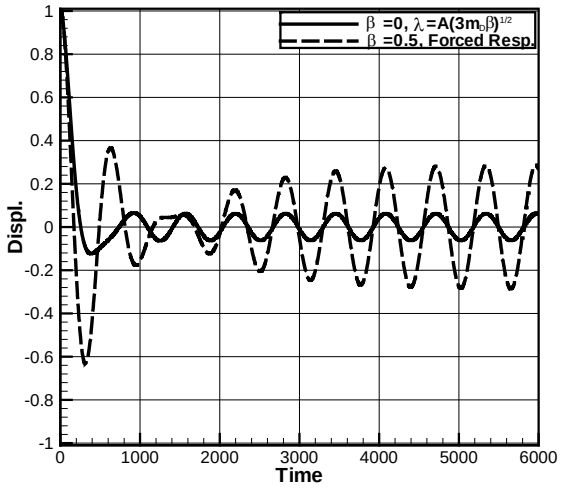


圖 19 阻尼係數 $\lambda = \sqrt{3m\beta}A$ 時 ($\omega^* = \omega_0$) 非線性彈性係數為 0 及 0.5，之時間響應圖

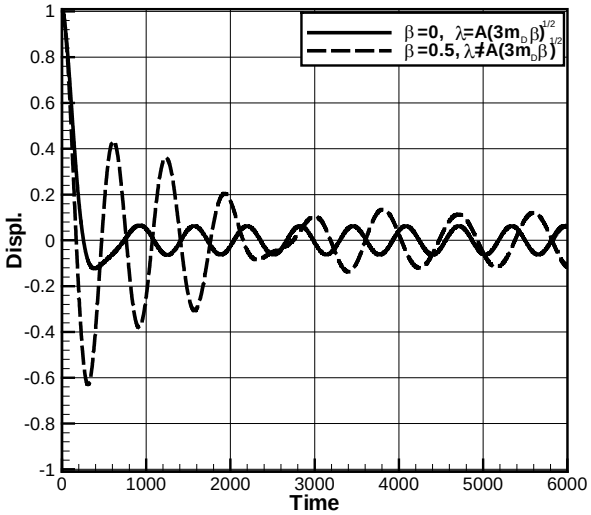


圖 20 阻尼係數 $\lambda \neq \sqrt{3m\beta}A$ 時 ($\omega^* \neq \omega_0$) 非線性彈性係數為 0 及 0.5，之時間響應圖

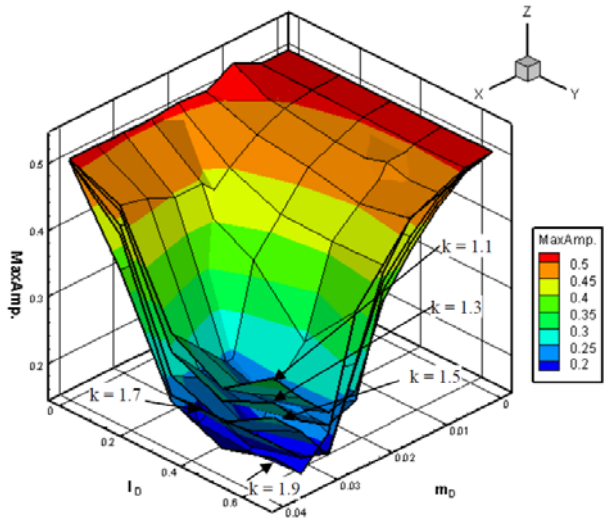


圖 21 非性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.05$；$\beta = 0.01$ (最佳減振值 0.16308)

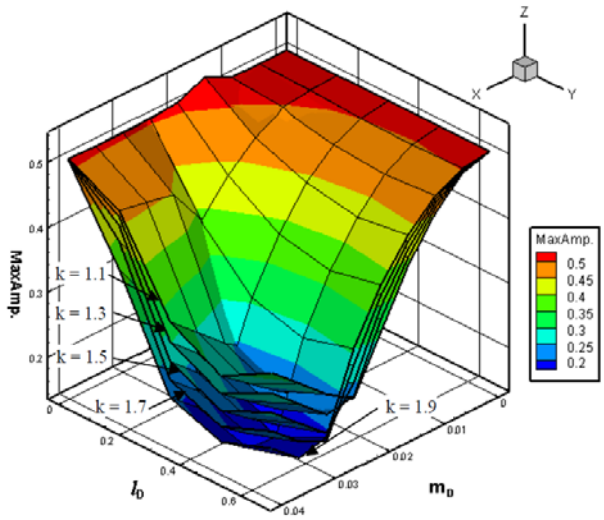


圖 22 非性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.075$；$\beta = 0.01$ (最佳減振值 0.15242)

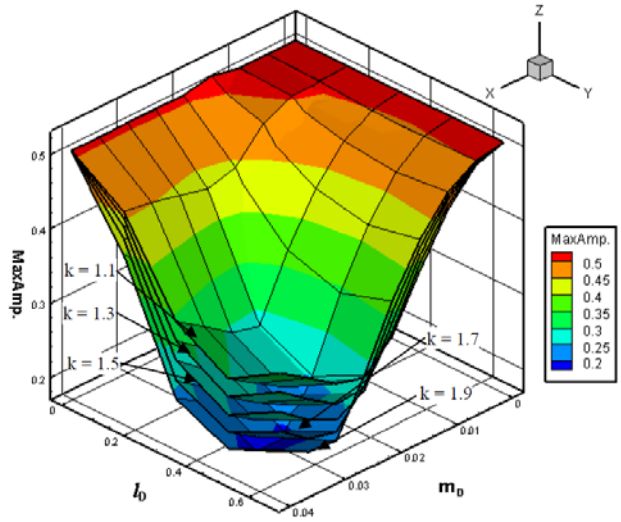


圖 23 非性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$\beta = 0.01$ (最佳減振值 0.18594)

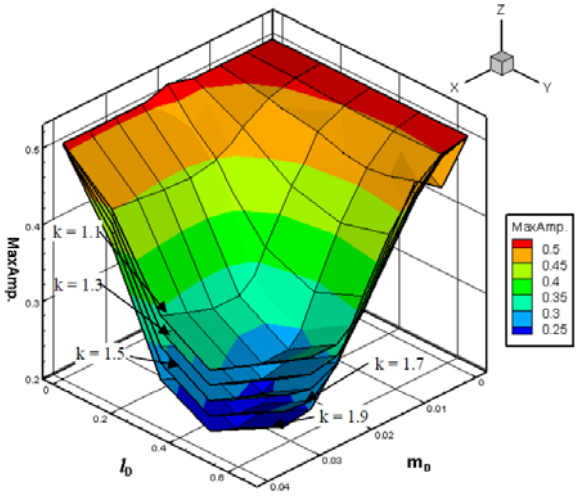


圖 24 非性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.125$；$\beta = 0.01$ (最佳減振值 0.21245)

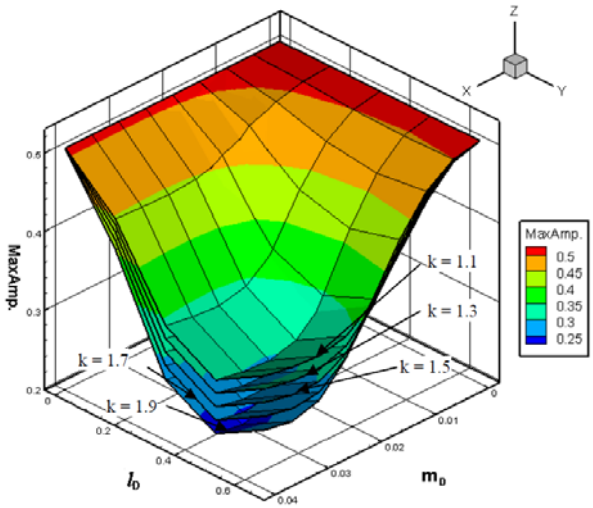
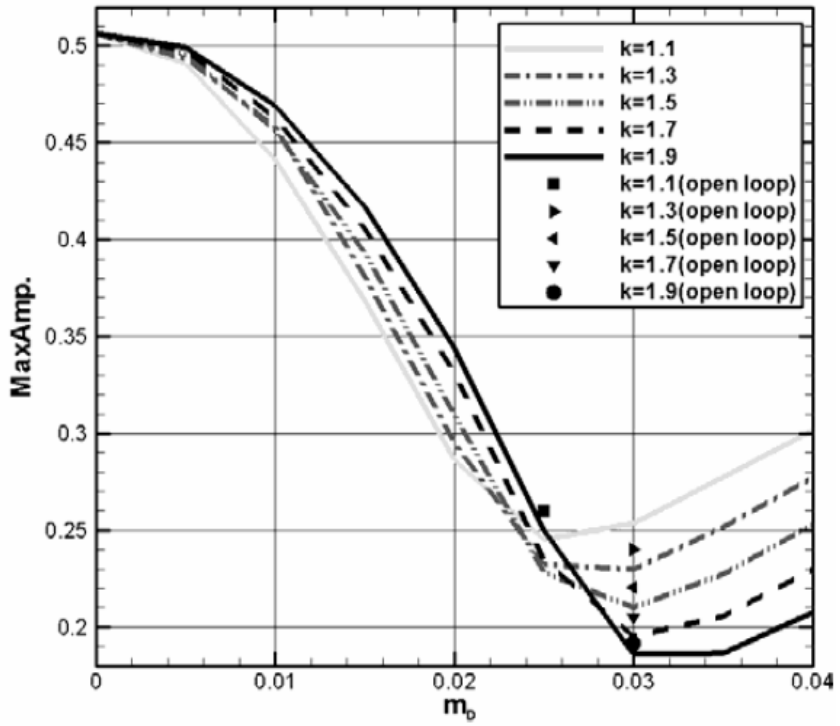
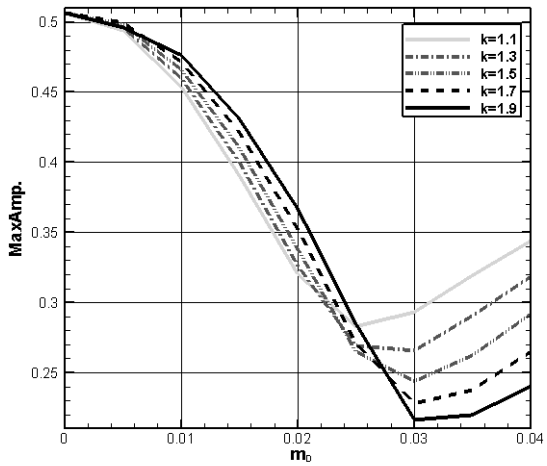


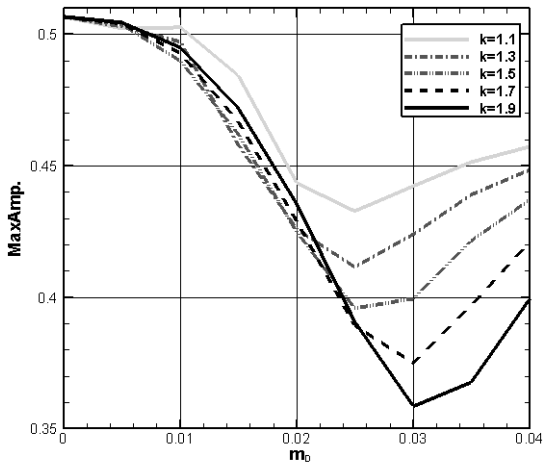
圖 25 非性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.15$；$\beta = 0.01$ (最佳減振值 0.23227)



(a)



(b)

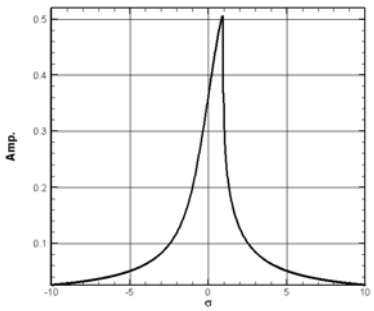


(c)

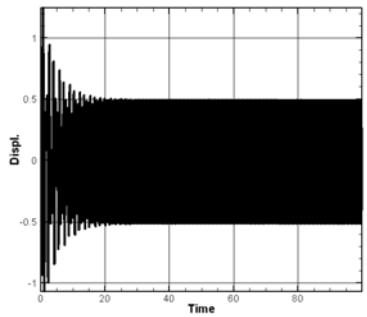
圖 26-(a) 非線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.5$；$\beta = 0.01$ 截面圖

圖 26-(b) 非線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.33$；$\beta = 0.01$ 截面圖

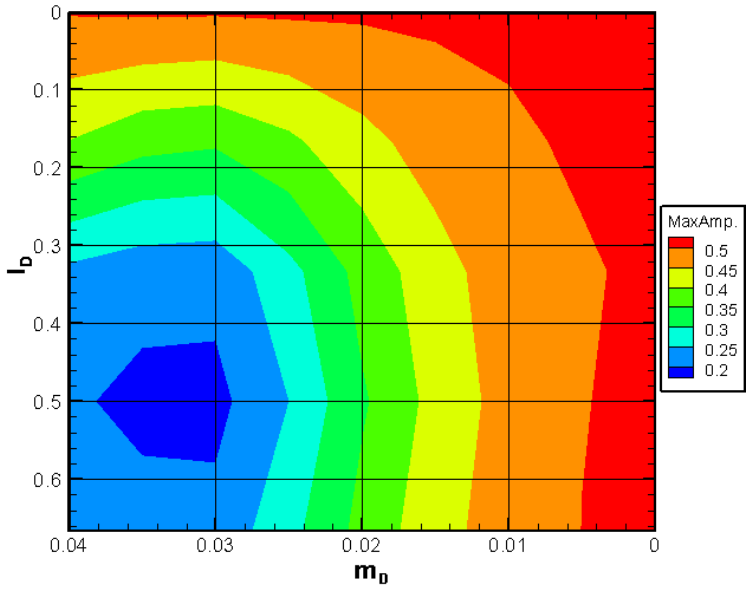
圖 26-(c) 非線性 TMD 之 3DMAP $\lambda = 0.1$；$l_D = 0.16$；$\beta = 0.01$ 截面圖



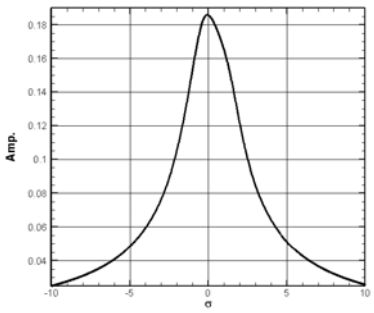
(b)



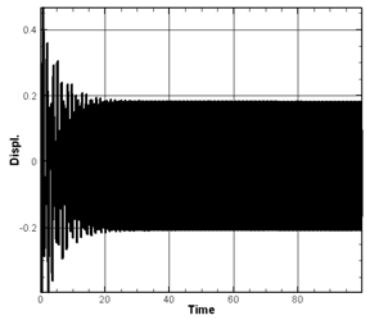
(c)



(a)



(d)

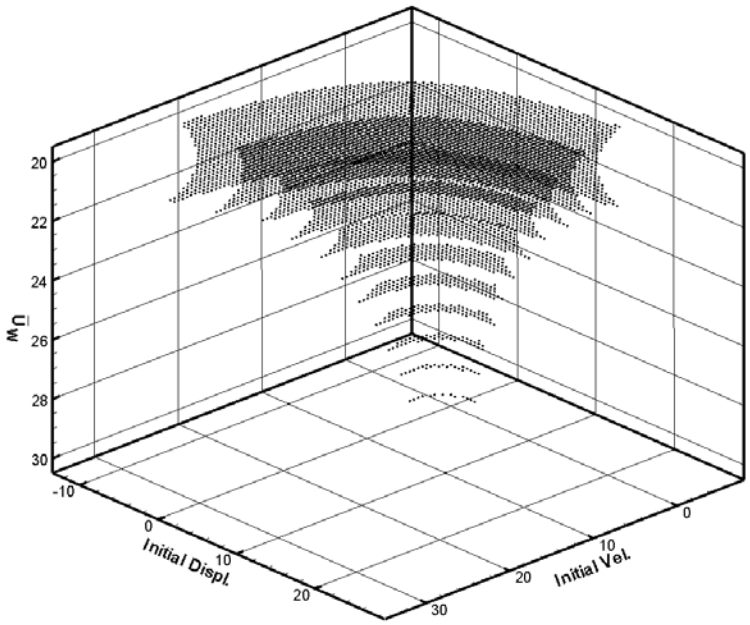


(e)

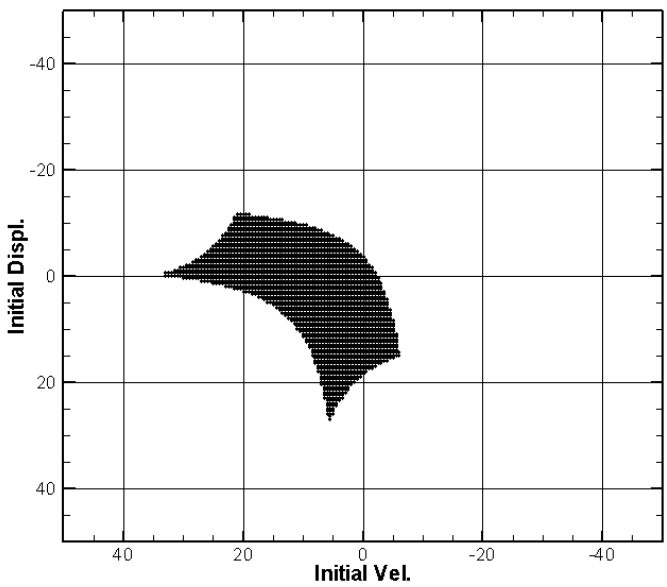
圖 27-(a)線性 TMD 之 3DMACP $\lambda = 0.1$；$k = 0.9$；$\beta = 0.01$

圖 27-(b)、(c)當 $m_D = 0$；$l_D = 0$ 之 Fixed Point Plot 與 Time Response

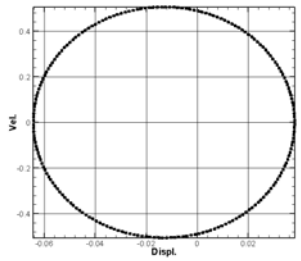
圖 27-(d)、(e)當 $m_D = 0.03$；$l_D = 0.5$ 之 Fixed Point Plot 與 Time Response



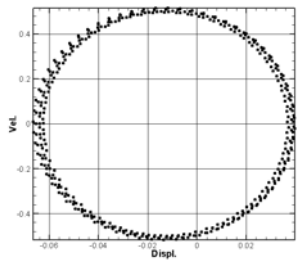
(a)



(b)



(c)



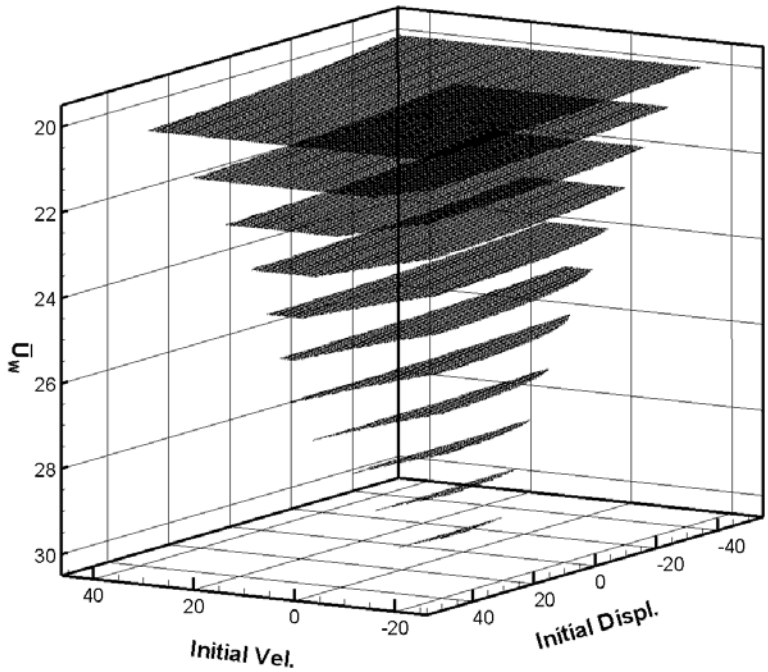
(d)

圖 28-(a) 無 TMD 之 Basin of Attraction

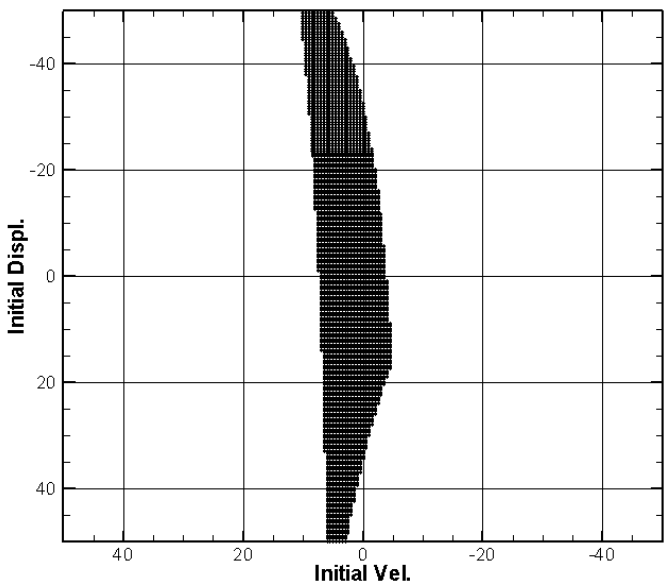
圖 28-(b) 無 TMD 之 Basin of Attraction $\overline{U}_W = 25$

圖 28-(c) Initial Vel.= -1.0；Initial Displ.= -2.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map

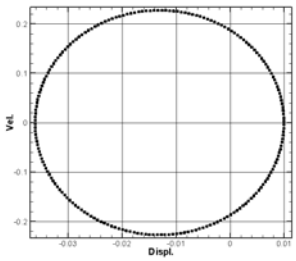
圖 28-(d) Initial Vel.= -1.5；Initial Displ.= -2.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map



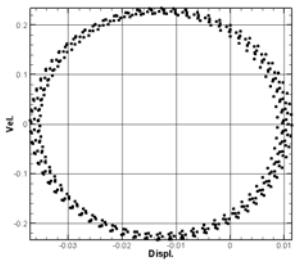
(a)



(b)



(c)



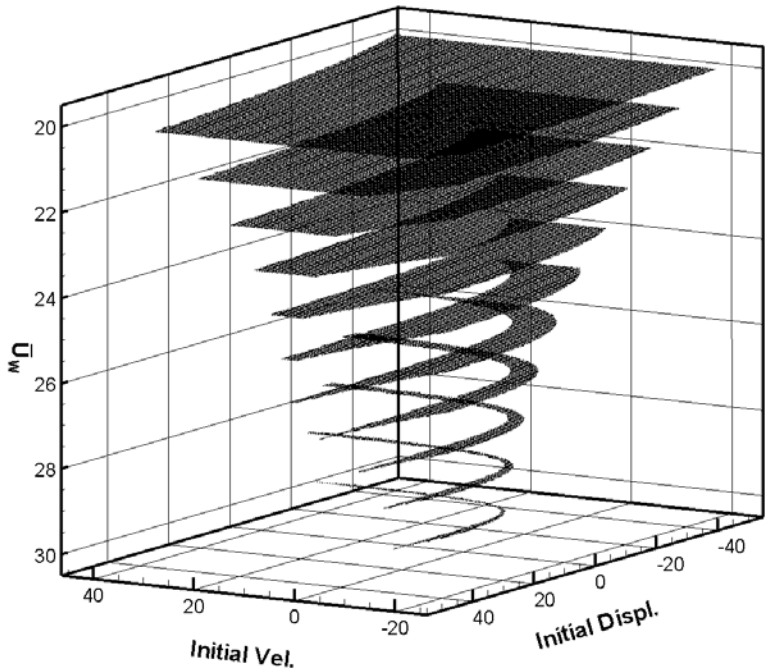
(d)

圖 29-(a) 具線性 TMD 之 Basin of Attraction

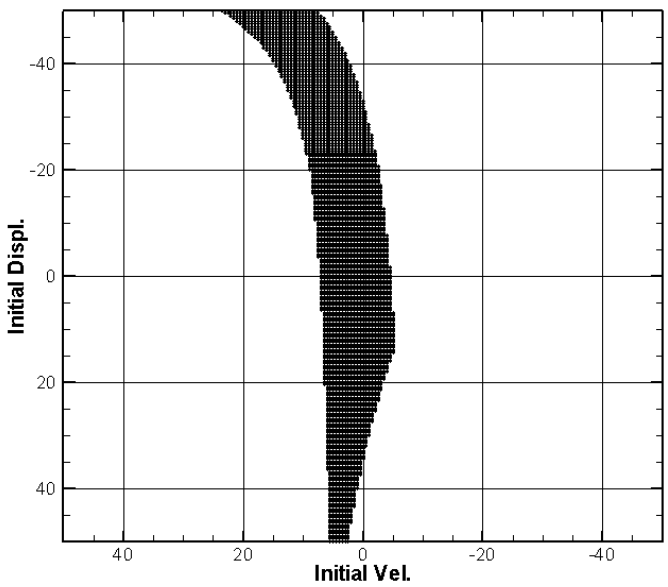
圖 29-(b) 具線性 TMD 之 Basin of Attraction $\overline{U}_W = 25$

圖 29-(c) Initial Vel.= -2.0；Initial Displ.= -20.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map

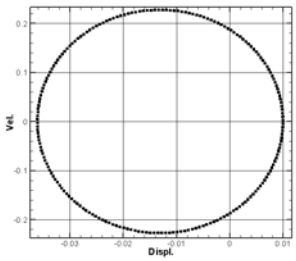
圖 29-(d) Initial Vel.= -2.5；Initial Displ.= -20.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map



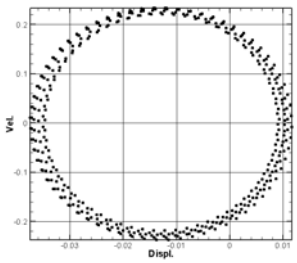
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 30-(a)具線性 TMD 之 Basin of Attraction $\beta = 0.01$

圖 30-(b) 具非線性 TMD 之 Basin of Attraction $\beta = 0.01$；$\overline{U}_W = 25$

圖 30-(c) Initial Vel.= -2.0；Initial Displ.= -20.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map

圖 30-(d) Initial Vel.= -2.5；Initial Displ.= -20.0；$\overline{U}_W$ =25 之 Poincaré Map

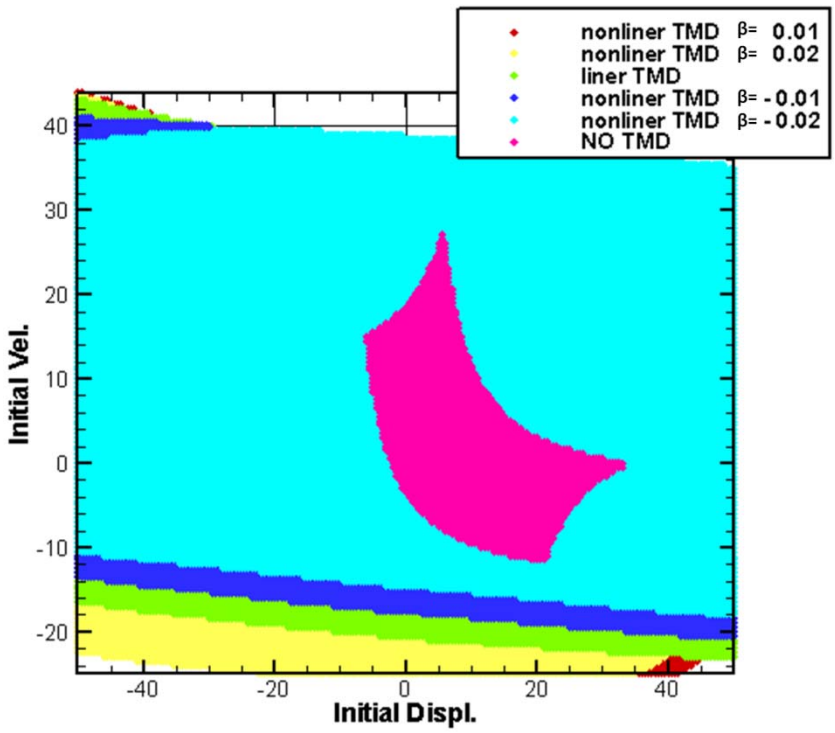


圖 31 $\overline{U}_W = 20(m/s)$ 時各系統之 Basin of Attraction

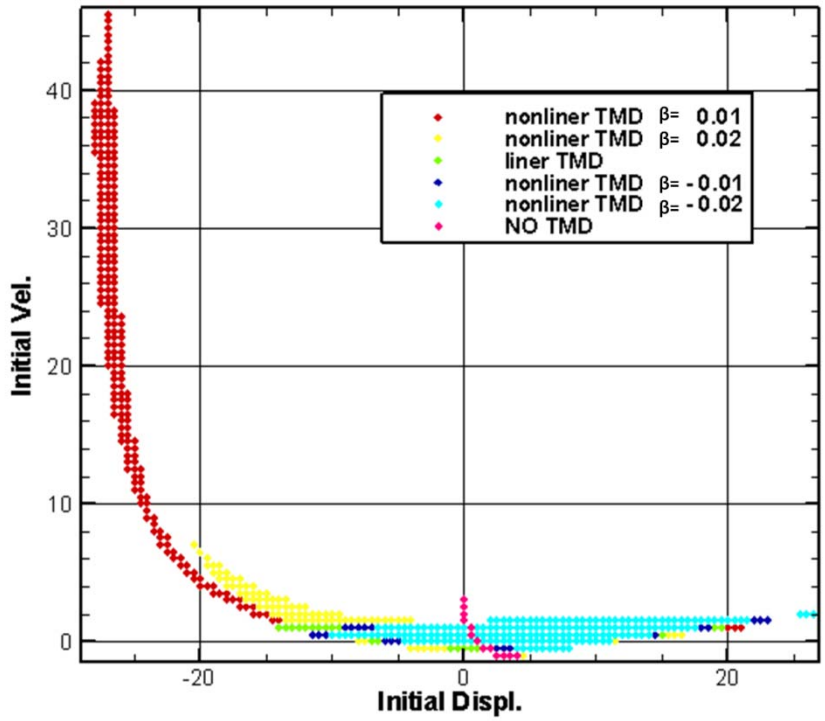


圖 32 $\overline{U}_W = 30(m/s)$ 時各系統之 Basin of Attraction

106年度專題研究計畫成果彙整表

計畫主持人：王怡仁	計畫編號：106-2221-E-032-037-
計畫名稱：線性減振器與非線性能量槽於非線性樑之減振及穩定性研究	

成果項目					量化	單位	質化（說明：各成果項目請附佐證資料或細項說明，如期刊名稱、年份、卷期、起訖頁數、證號...等）
國內	學術性論文	期刊論文			0	篇	
		研討會論文			1		王怡仁，馮朝剛，陳思遠， “非線性減振器之於非線性簡支樑之減振研究，” 2017中華民國航空太空學術研討會，台中 逢甲大學，中華民國一0六年十二月九日。
		專書			0	本	
		專書論文			0	章	
		技術報告			0	篇	
		其他			0	篇	
	智慧財產權及成果	專利權	發明專利	申請中	0	件	
				已獲得	0		
			新型/設計專利		0		
		商標權			0		
		營業秘密			0		
		積體電路電路布局權			0		
		著作權			0		
		品種權			0		
		其他			0		
	技術移轉	件數			0	件	
		收入			0	千元	
國外	學術性論文	期刊論文			2	篇	1. Yi-Ren Wang, C.K. Feng and S.Y. Chen, “Damping effects of linear and nonlinear tuned mass dampers on nonlinear hinged-hinged beam,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 430, 2018, pp. 150-173. (SCI) (MOST 106-2221-E-032-037) 2. Yi-Ren Wang, Chi Tang and Chien-Chih Chiu, "The Effects of Wake Dynamics and Trailing Edge Flap on Wind Turbine Blade," Journal of Applied Science and Engineering, Vol. 21, No. 1, 2018. pp.105-115. (ESCI)
		研討會論文			2		1. Yi-Ren Wang, Bo-Ruei Lai, and Shin-Ting Huang, "Nonlinear effects

						on moving string rested on nonlinear elastic foundation," 2017 International Conference in Aerospace for Young Scientists, Beihang University, Beijing, P.R.China, Sep. 07-08, 2017. (MOST 106-2813-C-032-049-E) Best paper award. 2. Yi-Ren Wang , Chi Tang, and Chien-Chih Chiu, "Application of Finite State Wake Dynamics on Wind Turbine Blade," 2017 International Conference in Aerospace for Young Scientists, Beihang University, Beijing, P.R.China, Sep. 07-08, 2017.
		專書		0	本	
		專書論文		0	章	
		技術報告		0	篇	
		其他		0	篇	
	智慧財產權及成果	專利權	發明專利 申請中	0	件	
			發明專利 已獲得	0		
			新型/設計專利	0		
		商標權		0		
		營業秘密		0		
		積體電路電路布局權		0		
		著作權		0		
		品種權		0		
		其他		0		
	技術移轉	件數		0	件	
		收入		0	千元	
參與計畫人力	本國籍	大專生		0	人次	
		碩士生		5		本計劃之耦合模式的建立及附加減振器參數的響應，其中的數學理論，研究過程及蘊含的物理現象將提供一套求解非線性耦合模式的理論方法，及值得業界參考的途徑。而對於參與之研究人員也可以直接由研究的過程，瞭解附加減振器與基座的理論模式及物理現象，對於精密機械之非線性振動及內共振的因素將有更深入的瞭解。日後從事相關研究時將可直接投入，對於基礎研發人才的培育也有直接的貢獻。
		博士生		0		
		博士後研究員		0		

		專任助理	0		
	非本國籍	大專生	0		
		碩士生	0		
		博士生	0		
		博士後研究員	0		
		專任助理	0		
其他成果 （無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。）					

科技部補助專題研究計畫成果自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現（簡要敘述成果是否具有政策應用參考價值及具影響公共利益之重大發現）或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

■達成目標

□未達成目標（請說明，以100字為限）

　　□實驗失敗

　　□因故實驗中斷

　　□其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形（請於其他欄註明專利及技轉之證號、合約、申請及洽談等詳細資訊）

論文：■已發表　□未發表之文稿　□撰寫中　□無

專利：□已獲得　□申請中　■無

技轉：□已技轉　□洽談中　■無

其他：（以200字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性，以500字為限）

學術成就: 本研究全面分析非線性簡支樑附加線性減振器（TMD）或非線性TMD時各項參數(如TMD之質量比、掛載位置、阻尼係數、非線性彈性係數）對樑之影響。吾人也使用因次分析法解得非線性TMD運動方程之解析解，並將該解所求得之開迴路解析解與先前提的閉迴路數值解相互比較，獲得驗證，同時吾人也提出非線性 TMD 頻率之明確關係式。尤其是非線性TMD運動方程之解析解，依筆者所知，是目前學界首次獲得此解析函數的研究團隊。技術創新: 本研究除了獲得非線性 TMD運動方程之解析解，更利用3D MAP 與同時顯示各種參數的變化於同一個圖示，可免去一般成果2-D 曲線，受限於顯示維度，必須同時顯示數張圖形，不利綜合判讀數據的困擾。社會影響: TMD 被廣為應用於工程振動主體的減振，且已證實其效果顯著。然而即使工程問題以線性模式模擬之，仍然無法完整探討所有工程結構的振動現象。本研究比較線性減振器與非線性能量槽於非線性樑之減振效果,並分析在系統受到空氣動力作用時須注意之事項，不只是學術創新，對於一般交通運輸工具或飛行器的減振，乃至公共工程建設（例如橋樑道路等)振動抑制及穩定性的分析皆可做為研究參考。

4. 主要發現

本研究具有政策應用參考價值：□否　■是，建議提供機關科技部,交通部,行政院公共工程委員會,

（勾選「是」者，請列舉建議可提供施政參考之業務主管機關）

本研究具影響公共利益之重大發現：□否　■是

說明：（以150字為限）

吾人以 Floquet Theory法繪製Basin of Attraction(BOA)，發現具TMD之非線性簡支樑其穩定範圍有明顯增加，尤其當非線性簡支樑附加非線性TMD時特別明顯，但這並不表示持續增加非線性彈性係數，系統將會更穩定，吾人發現在非線性彈性係數 約為 0.01 時才具最佳穩定範圍。