

減振器參數激擾之分析

Study of Parameter Excitation of Dynamic Vibration absorbers

陳聿翎, 蕭宛琪, 王怡仁

Yu- Ling Chen, Wan-Chi Hsiao, Yi-Ren Wang

淡江大學航空太空工程學系

Department of Aerospace Engineering, Tamkang University

摘要

本研究目的是研究一考慮參數激擾共振影響的動態減振器，在主體兩自由度的振動影響下穩定情形。此動態減振器由一非線性彈簧及質量塊組成，主體可視為精密加工或是傳統產業的機械製造工具機的基座。利用牛頓力學法, Lagrange 法和時間多尺度法分析及推導此減振器的運動方程式，求出振動頻率與振幅相對曲線，找出不穩定區域並求得能有最佳減震效果的耦合彈性係數及彈簧下質量塊的質量（轉動慣量）。

關鍵字：參數激擾、動態減振器、時間多尺度法、耦合彈性係數

Abstract

Parametric excitations are usually expressed in the form of homogeneous differential equations with rapidly varying coefficients or periodic motions. In contrast with external excitations for which a small excitation produces a large response only if the frequency of the excitation is close to a linear natural frequency, a small parametric excitation can produce a large response when the excitation is away from the linear natural frequency. This research exposed the parametric resonance of a 2-DOF dynamic vibration absorber (DVA) that is suspended under a mechanical vibration base. The external forces from the vibration base performed as the parametric excitation for the DVA. The method of multi scales (MOMS) was employed to analyze this problem. We made a parametric force-frequency plot to examine the stability of this DVA system. The numerical simulations were also presented to confirm our results.

Keywords: Parametric excitations, dynamic vibration absorber, method of multi scales, coupling spring constant

一、緒論

1.1 研究動機

一般機械操作元件或機具之減振大致分為主動及被動減振兩類，雖然主動式減振器的效果較佳，且適用頻寬較寬，但是基於成本考量，且一般的機械器具操作皆固定某個頻寬，因此被動式減振器在一般工業界仍是被廣為採用的減振方式。

以常見的被動式減振器而言大致是以一懸吊系統作為抑制主體振動的方式，藉由此懸吊系統之質量-彈簧-阻尼裝置，製造反向（anti phase）的振動或非同相之振動，以吸收主體之振動。雖然主體的振動是考量的重點，但是被動式減振器的振動行為卻很少被學界及業界分析。以一工具機之懸吊減振器（dynamic vibration absorber

(DVA)) 而言，一DVA的振動除了會抑制主體之振動，但是DVA本身的振動，有時卻會造成系統為不穩定。舉凡振動體都有共振或是穩定性的問題，DVA亦不例外。而在諸多振動問題當中，可能大家都會考慮共振造成的問題，卻忽略有一種參數激擾造成之共振，參數激擾的定義為外力以時間函數的形式通過系統內參數產生週期性的改變及共振，其影響有時可能很微弱，但也可能出現劇烈的共振現象，而自激擾不受系統外的週期性外力影響，是由靜態能源的能量產生持續且穩定的周期振動。吾人考慮一個機械加工之工具機之基座，其下方中央位置懸吊一傳統之DVA，由於機具的底座經由外力之施作而產生上下及旋轉之振動行為，此時，主體的這兩個自由度的振動將會以參數激擾之方式施加於其下方之DVA。假若主體之振動振幅大小超過某個範圍時

YY-XX

，不僅其下方DVA不會有減振之效果反而是DVA先產生參數激擾共振，進而導致機具主體之損壞。因此吾人將重點放置於分析一個具有參數激擾潛在因素之DVA系統，其質量、轉動慣量及拉伸、扭轉耦合彈性係數的值及外力(工具機之兩個自由度之振動)的施作大小等，對於此DVA穩定性之影響及分析。一般的參數激擾皆為非線性問題，吾人將利用Lagrange法，推導整個DVA系統的E.O.M.此時吾人考慮此DVA具有上下及旋轉兩個自由度，且其彈簧為具備拉伸及扭轉耦合之彈簧；藉由此彈簧之耦合彈性係數(δ)的選擇，吾人將探討此時 δ 對此系統之穩定性的影響。吾人將以MOMS法將非線性以小擾動之時間尺度分開討論之，並利用各尺度之secular term所造成的solvability condition推導出此DVA在拉伸及旋轉兩自由度的各常數($m_B, I_B, \delta, \bar{Z}, \bar{\theta}$)之參數激擾的穩定性。本研究跳脫一般的減振分析，主要是以DVA之振動系統的穩定性為考量主軸。這一類的研究除了可直接應用在DVA效益之分析，亦可應用在各式機械元件相關之振動現象，因此具有極高之實用價值。

1.2文獻回顧

振動問題長久以來在工程應用中扮演重要的角色，振動影響結構的穩定性，長期承受振動下會造成材料的疲勞進而造成結構損壞，因此減振方法一直是學者研究的重要標的之一。如何有效的抑制振動，一直都是工程師必須克服的問題。在諸多減振方法中，以被動式(passive)減振器最被廣泛使用。該減振方式不僅結構簡單，成本亦較主動式(active)減振器低廉。一般被動式減振器的研究大多著重在DVA(or TMD)與振動主體之整體的參數設計，這可能會牽涉到振動主體的重新設計。但是也有基於經濟考量，在不需要改變原來的振動主體的前提下，只需調整DVA的位置，質量，彈性係數等，以最經濟的方式，避開內共振(I.R.)並達到最佳減振效果。此類的研究，就一般剛體及2D的樑而言，已有多人研究，Wang and Chen [1] 使用TMDs來吸收一旋轉機械儀器的振動(例如CD-ROM drives)。Wang and Lin [3] 運用解析解和數值分析法判斷減振器對非線性固液體相互作用系統穩定性的影響。他們結合了internal resonance contour plots (IRCPs) 和 flutter speed contour plots (FSCPs)，來呈現系統整體的完整度和準確度。Wang and Hung [2] 研究一個振動和內共振

為1比2的微小二維剛體的pendulum tuned mass damper (PTMD)的影響。重點放在PTMD在各參數的阻尼效應來克服內共振的產生。3D-IRCP是第一個被提議去評估PTMD在設計加工前各參數組合效益。Wang and Kuo [4] 考慮一置放於非線性彈性的基礎上的非線性鉸接-自由(hinged-free)樑之振動。發現彈性基礎在某彈性係數的情況下，系統中之1st mode及2nd mode存在1:3的內共振之現象。他們在彈性樑上掛載Dynamic Vibration Absorber (DVA)，利用DVA達到避開內共振及減振之效果。他們發現將DVA置放於距離樑的鉸接端的0.25l~0.5l之間，通常能夠給予最有效之減振效益。相對的，若置放於樑長的0.7l~0.8l之間，則減振效益不彰。Wang and Liang [5] 則是尋求一種lumped-mass vibration absorber (LMVA)對於置放在非線性彈性基礎上的非線性兩端鉸接支撐的樑的最佳減振效果。他們以3D maximum amplitude contour plot (3D MACP)的方法，歸納此LMVA的最佳組合，以達到最佳減振效果。Wang and Chang [6] 使用MOMS決定DVA在自由尾端對一個在彈性基礎下線性鉸接-自由樑或在懸吊的纜線模擬使用三次非線性彈簧的影響。他們為了減少在樑上的振動和防止內共振的產生所以辨認在DVA最佳的質量和彈性係數的組合。

本研究討論的是一個懸掛於工具機底座之DVA減振器，基於其參數激擾的非線性現象，吾人必須使用數學方法分析此系統，以利後續研究之進行。在眾多分析非線性問題的數學方法中，Nayfeh and Mook [7]建議使用了很多方法，來得到非線性問題的解析解，例如Poincaré method, the Lindstedt method, the average method, 和 method of multiple scales (MOMS)。因MOMS法的適用度，使其被廣泛的運用在有加減振器的振動系統上。Sedighi et al. [8] 研究懸臂樑在準備安裝三次非線性彈簧的邊界條件的非線性振動。使用The He's Parameter Expanding Method (HPEM)得到此系統動態行為之精準的解。此研究呈現出只要展開一個項就可以輕鬆的得到精準的解。Pakdemirli [9] 研究了兩個逼近法，分別為離散和直接逼近，它們用在二次及三次非線性系統。The MOMS was applied. 使用一個廣義的運動方程式對照兩個逼近法，它顯示直接逼近法可以得到精準解。Nayfeh and Nayfeh [10] 使用 Galerkin procedure 轉換三階非線性偏微分運動方程式到一階微分方程式。運用 MOMS 找出非線性的模態(mode shapes)和頻率。使用invariant manifolds理論的概念，Shaw and Pierre [11] 呈

YY-XX

現一方法來找出振動系統的非線性模態和頻率。延伸研究[11] 到 continuous systems [12]。鉅細靡遺地呈現推導出 vibration beams 的非線性mode shapes的過程。Pesheck and Pierre [13] 擴大運用座標的轉換[11] and a Galerkin solution procedure 找出確切非線性系統的 nonlinear normal modes. 一個 2個自由度的非線性振盪器和一個有限元素的樑模型的兩個例子呈現他們提出方法的準確性。

1.3研究方法

我們的研究目的是基於對一個精密加工或是傳統產業的機械製造的工具機，分析在基座上的減振器穩定性，減振器置放於精密加工或切削工具的基座正下方。基座如圖2所示，基座是一個平板四邊有支柱，工具機在切削時會產生少許的上下或旋轉震動，我們在基座下安裝被動式減振器，它是由螺旋彈簧跟質量塊組成，能抑制機具底座有兩個方向的減震效果。為了避免在減震效果前先發生不穩定的狀況，我們要考慮參數激擾的問題。不過，我們的參數激擾是指個別激擾各個自由度，但是2個自由度有耦合。由於基座會產生上下及旋轉的震動，而連接於基座下的彈簧端點會有已知的上下和旋轉兩個方向與時間有關的激擾外力，外力會影響整個系統，我們使用Lagrange's equation推導運動方程式，再利用M O S法分析非線性，因為2個外力為時間週期項會進入DVA的未知的係數，找出參數激擾的範圍及上下及旋轉震動的耦合的彈性係數 δ ，找出什麼範圍內的耦合彈性係數能有最佳的減震效果。

二、理論模式之建立

2.1 振動模型之敘述

如圖2所示，工具機的基座下方為DVA，此基座同時存在上下及旋轉之振動的自由度，其中 Z_Z 為螺旋彈簧減振器上方的支撐點的上下振動位移， θ_Z 為螺旋彈簧支撐點延Z軸向的轉動角度， Z_B 為螺旋彈簧下方剛體延Z軸向的上下振動位移， θ_B 為螺旋彈簧下方剛體延Z軸向的轉動角度，其振幅單位為mm，旋轉量單位為rad。

2.2 理論模型

如圖1所示，為圖2之DVA為系統，其中T代

表總動能， V 代表總位能， R 代表Rayleigh消散方程式。吾人利用Lagrange法將 T ， V 及 R 表示成：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}_B}\right) - \frac{\partial T}{\partial Z_B} + \frac{\partial R}{\partial \dot{Z}_B} + \frac{\partial V}{\partial Z_B} = F_B \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_B}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_B} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_B} + \frac{\partial V}{\partial \theta_B} = M_B \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2}m_B(\dot{Z}_B - \dot{Z}_Z)^2 + \frac{1}{2}I_B(\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_Z)^2 \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2}k_B(Z_B - Z_Z)^2 + \frac{1}{2}K_\theta(\theta_B - \theta_Z)^2 + \frac{1}{4}k_B(Z_B - Z_Z)^4 + \frac{1}{4}K_\theta(\theta_B - \theta_Z)^4 + \frac{1}{2}\delta(Z_B - Z_Z)(\theta_B - \theta_Z) \quad (4)$$

$$R = \frac{1}{2}C_B(\dot{Z}_B - \dot{Z}_Z)^2 + \frac{1}{2}C_\theta(\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_Z)^2 \quad (5)$$

令 $Z_Z = \bar{Z} \cos(\omega_Z t)$ ， $\theta_Z = \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t)$ 。其中， Z_B 代表質量塊上下的移動量， $\bar{Z}$ 代表加工平台的上下移動大小； θ_B 代表質量塊的旋轉量， $\bar{\theta}$ 代表加工平台的旋轉大小； m_B 代表質量塊的質量， I_B 為質量塊的旋轉慣量； k_B, k_θ 分別為上下及旋轉的線性的彈簧彈性係數； β_{Z2}, β_{Z3} 分別為非線性二次及三次的彈簧彈性係數； C_B, C_θ 分別為上下及旋轉的線性的阻尼係數； ω_Z, ω_θ 分別為加工平板的上下及旋轉振動頻率； $\omega_{ZB}, \omega_{\theta B}$ 為質量塊的上下及旋轉振動頻率； $\tilde{\omega}_{ZB}, \tilde{\omega}_{\theta B}$ 分別為彈簧的上下及旋轉的自然振動頻率； F_B 為質量塊所受的力， M_B 為質量塊所受的力矩； δ 為上下及旋轉的耦合彈性係數。經過運算得到下列運動方程式：

$$\begin{aligned} m_B \ddot{Z}_B + C_B \dot{Z}_B + k_B(1 + 3\beta_{Z2} \bar{Z}^2 \cos^2(\omega_Z t))Z_B \\ + \frac{\delta}{2} \theta_B - 3k_B \beta_{Z2} \bar{Z} \cos(\omega_Z t) Z_B^2 + k_B \beta_{Z3} Z_B^3 \\ = F_B - m_B \bar{Z} \omega_Z^2 \cos(\omega_Z t) - C_B \bar{Z} \omega_Z \sin(\omega_Z t) \\ + k_B \bar{Z} \cos(\omega_Z t) + \frac{\delta}{2} \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) \\ + k_B \beta_{Z3} \bar{Z}^3 \cos^3(\omega_Z t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_B \ddot{\theta}_B + C_\theta \dot{\theta}_B + k_\theta(1 + 3\beta_{\theta2} \bar{\theta}^2 \cos^2(\omega_\theta t))\theta_B \\ + \frac{\delta}{2} Z_B - 3k_\theta \beta_{\theta2} \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) \theta_B^2 + k_\theta \beta_{\theta3} \theta_B^3 \\ = M_B - I_B \bar{\theta} \omega_\theta^2 \cos(\omega_\theta t) - C_\theta \bar{\theta} \omega_\theta \sin(\omega_\theta t) \\ + k_\theta \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) + \frac{\delta}{2} \bar{Z} \cos(\omega_Z t) \\ + k_\theta \beta_{\theta3} \bar{\theta}^3 \cos^3(\omega_\theta t) \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 理論模型之簡化

YY-XX

由於我們研究的DVA減振器為微量耦合($0 < \delta < 1$), 所以 $-\frac{\delta}{2I_B}Z_{B0}$ 和 $-\frac{\delta}{2m_B}\theta_{B0}$ 只放在 ε^2 。 μ_B 和 μ_θ 是DVA spring 的 damping coefficient, 我們的DVA只考慮螺旋彈簧, 沒有damping, 因此 μ_B 和 μ_θ 假設為0。

另外, 因為簡化問題, 我們不考慮2次方以上之非線性彈性係數, 因此忽略上下方向的 $k_B\beta_{Z3}Z_B^3$, $-3k_B\beta_{Z2}\bar{Z}\cos(\omega_Zt)Z_B^2$ 及 $k_B\beta_{Z3}\bar{Z}^3\cos^3(\omega_Zt)$; 旋轉方向的 $k_\theta\beta_{Z3}\theta_B^3$, $-3k_\theta\beta_{Z2}\bar{\theta}\cos(\omega_\theta t)\theta_B^2$ 及 $k_\theta\beta_{Z3}\bar{\theta}^3\cos^3(\omega_\theta t)$, 但是上下方向的 $k_B(1+3\beta_{Z2}\bar{Z}^2\cos^2(\omega_Zt))Z_B$ 及旋轉方向的 $k_\theta(1+3\beta_{Z2}\bar{\theta}^2\cos^2(\omega_\theta t))\theta_B$ 需要保留, 因為它們 Z_z 和 Z_B , θ_z 和 θ_B 相乘, 指數將有 $\omega_{ZB} \pm \omega_Z$ 和 $\omega_{\theta B} \pm \omega_\theta$ 的形態, 這樣能在 ω_{ZB} 和 $\omega_{\theta B}$ 遠離1或2或接近1或2時討論。

三、MOMS法

3.1 時間多尺度法 (MOMS) 法

令 $T_0 = \varepsilon^0 t$, $T_1 = \varepsilon^1 t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$

Z 方向:

$$Z_B(t, \varepsilon) = \varepsilon^0 Z_{B0}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^1 Z_{B1}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^2 Z_{B2}(T_0, T_1, T_2 \dots) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{K_B}{m_B} &= \tilde{\omega}_{ZB}^2, \mu_Z = \frac{C_B}{m_B} \\ \varepsilon^0 : \ddot{Z}_{B0} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B0} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \ddot{Z}_{B1} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B1} &= -2 \frac{\partial^2 Z_{B0}}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{1}{m_B} - \mu_Z \dot{Z}_{B0} \\ &\quad - 3\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \cos^2(\omega_Z t) Z_{B0} - \omega_Z \mu_Z \bar{Z} \sin(\omega_Z t) \\ &\quad - \omega_Z^2 \bar{Z} \cos(\omega_Z t) - \tilde{\omega}_{ZB}^2 \bar{Z} \cos(\omega_Z t) \\ &\quad + \frac{1}{2m_B} \delta \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) + \frac{F_1}{m_B} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \ddot{Z}_{B2} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B2} &= -\frac{1}{m_B} \frac{\partial^2 Z_{B0}}{\partial T_1^2} - \frac{2}{m_B} \frac{\partial^2 Z_{B0}}{\partial T_0 \partial T_2} \\ &\quad - \frac{2}{m_B} \frac{\partial^2 Z_{B1}}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_Z (\dot{Z}_{B1} + \frac{\partial Z_{B0}}{\partial T_1}) - 3\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \cos^2(\omega_Z t) Z_{B0} \\ &\quad + \frac{F_2}{m_B} - \omega_Z \mu_Z \bar{Z} \sin(\omega_Z t) - \omega_Z^2 \bar{Z} \cos(\omega_Z t) \\ &\quad - \tilde{\omega}_{ZB}^2 \bar{Z}^2 \cos(\omega_Z t) + \frac{1}{2m_B} \delta \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) - \frac{\delta}{2m_B} \theta_{B0} \end{aligned} \quad (11)$$

θ 方向:

$$\theta_B(t, \varepsilon) = \varepsilon^0 \theta_{B0}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^1 \theta_{B1}(T_0, T_1, T_2 \dots)$$

$$+ \varepsilon^2 \theta_{B2}(T_0, T_1, T_2 \dots) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{K_\theta}{I_B} &= \tilde{\omega}_{\theta B}^2, \mu_\theta = \frac{C_\theta}{I_B} \\ \varepsilon^0 : \ddot{\theta}_{B0} + \tilde{\omega}_{\theta B}^2 \theta_{B0} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \ddot{\theta}_{B1} + \tilde{\omega}_{\theta B}^2 \theta_{B1} &= -2 \frac{\partial^2 \theta_{B0}}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{1}{I_B} - \mu_\theta \dot{\theta}_{B0} \\ &\quad - 3\tilde{\omega}_{\theta B}^2 \beta_{Z2} \bar{\theta}^2 \cos^2(\omega_\theta t) \theta_{B0} - \omega_\theta \mu_\theta \bar{\theta} \sin(\omega_\theta t) \\ &\quad - \omega_\theta^2 \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) - \tilde{\omega}_{\theta B}^2 \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) \\ &\quad + \frac{1}{2I_B} \delta \bar{Z} \cos(\omega_Z t) + \frac{M_1}{I_B} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \ddot{\theta}_{B2} + \tilde{\omega}_{\theta B}^2 \theta_{B2} &= -\frac{1}{I_B} \frac{\partial^2 \theta_{B0}}{\partial T_1^2} - \frac{2}{I_B} \frac{\partial^2 \theta_{B0}}{\partial T_0 \partial T_2} \\ &\quad - \frac{2}{I_B} \frac{\partial^2 \theta_{B1}}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_\theta (\dot{\theta}_{B1} + \frac{\partial \theta_{B0}}{\partial T_1}) - 3\tilde{\omega}_{\theta B}^2 \beta_{Z2} \bar{\theta}^2 \cos^2(\omega_\theta t) \theta_{B0} \\ &\quad + \frac{M_2}{I_B} - \omega_\theta \mu_\theta \bar{\theta} \sin(\omega_\theta t) - \omega_\theta^2 \bar{\theta} \cos(\omega_\theta t) \\ &\quad - \tilde{\omega}_{\theta B}^2 \bar{\theta}^2 \cos(\omega_\theta t) + \frac{1}{2I_B} \delta \bar{Z} \cos(\omega_Z t) - \frac{\delta}{2I_B} Z_{B0} \end{aligned} \quad (15)$$

3.2 Secular terms 之分析

3.2.1. Z 方向:

$$\begin{aligned} \text{令 } \omega_Z &= 1, \omega_{\theta B} = \omega_{ZB}, \tilde{\omega}_{\theta B}^2 = 4 \\ Z_{B0} &= \hat{Z}(T_1, T_2) e^{i(\omega_{ZB} T_0)} + \bar{\hat{Z}}(T_1, T_2) e^{-i(\omega_{ZB} T_0)} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial Z_{B0}}{\partial T_0} = (\frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_0} + i\omega_{ZB} \hat{Z}) e^{i(\omega_{ZB} T_0)} + (\frac{\partial \bar{\hat{Z}}}{\partial T_0} - i\omega_{ZB} \bar{\hat{Z}}) e^{-i(\omega_{ZB} T_0)} \quad (17)$$

$$\frac{\partial Z_{B0}}{\partial T_1} = \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} e^{i\omega_{ZB} T_0} + \frac{\partial \bar{\hat{Z}}}{\partial T_1} e^{-i\omega_{ZB} T_0} \quad (18)$$

這時考慮

(A) ω_{ZB} 遠離1和2

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \ddot{Z}_{B1} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B1} &= -\frac{2}{m_B} i\omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} e^{i\omega_{ZB} t} - \mu_Z (\frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_0} + i\omega_{ZB} \hat{Z}) e^{i\omega_{ZB} t} \\ &\quad - \frac{3}{4} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 (\hat{Z} e^{i(2+\omega_{ZB})t} + \bar{\hat{Z}} e^{i(2-\omega_{ZB})t}) + \bar{A} e^{-it} + \bar{B} e^{it} \\ &\quad + \frac{F_1}{m_B} + C.C. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{Secular terms } -\frac{2}{m_B} i\omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} = 0 \quad (20)$$

由(20)得知 $\frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} = 0$

$$Z_{B1} = -\frac{3}{4} \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \hat{Z} e^{i(2+\omega_{ZB})t} - \frac{3}{4} \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} \bar{\hat{Z}} e^{i(2-\omega_{ZB})t}$$

YY-XX

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\bar{A}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{-it} + \frac{\bar{B}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{it} + \frac{F_1}{m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2} + C.C. \\
 \varepsilon^2 : \ddot{Z}_{B2} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B2} = & \left(-\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \right. \\
 & \left(\frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} + \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} \right) e^{i(\omega_{ZB} t)} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \\
 & \left(\frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} e^{i(4 + \omega_{ZB})t} + \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} e^{i(4 - \omega_{ZB})t} \right) + \frac{F_2}{m_B} \\
 & + \bar{A} e^{-it} + \bar{B} e^{it} - \frac{\delta}{2m_B} \hat{\theta} e^{i(\omega_{B0} t)} + C.C. \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Secular terms } \frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} - \frac{9}{8} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \hat{Z} \\
 \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - \omega_{ZB}^2 - 4}{(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)} + \frac{\delta}{2m_B} \hat{\theta} = 0 \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{B2} = \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^2 \left(\frac{\hat{Z}}{(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (4 + \omega_{ZB})^2)} e^{i(4 + \omega_{ZB})t} \right. \\
 + \frac{\hat{Z}}{(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (4 - \omega_{ZB})^2)} e^{i(4 - \omega_{ZB})t} \Big) \\
 + \frac{\bar{A}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{-it} + \frac{\bar{B}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{it} + \frac{F_2}{m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2} + C.C. \quad (24)
 \end{aligned}$$

由(8)得：

$$\begin{aligned}
 Z_B = \varepsilon^0 (\hat{Z}(T_1, T_2) e^{i(\omega_{ZB} T_0)} + \bar{Z}(T_1, T_2) e^{-i(\omega_{ZB} T_0)}) \\
 + \varepsilon^1 \left(-\frac{3}{4} \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^2}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \hat{Z} e^{i(2 + \omega_{ZB})t} - \frac{3}{4} \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^2}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} \hat{Z} e^{i(2 - \omega_{ZB})t} \right. \\
 + \frac{\bar{A}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{-it} + \frac{\bar{B}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{it} + \frac{F_1}{m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2} + C.C.) \\
 + \varepsilon^2 \left(\frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^2 \left(\frac{\hat{Z}}{(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (4 + \omega_{ZB})^2)} e^{i(4 + \omega_{ZB})t} \right. \right. \\
 + \frac{\hat{Z}}{(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (4 - \omega_{ZB})^2)} e^{i(4 - \omega_{ZB})t} \Big) \\
 + \frac{\bar{A}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{-it} + \frac{\bar{B}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{it} + \frac{F_2}{m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2} + C.C.) \quad (25)
 \end{aligned}$$

(B) ω_{ZB} 遠離1和 $\omega_{ZB} \approx 2$

ω_{ZB} 遠離1和 $\omega_{ZB} \approx 2$ 的 ε^1 , Z_{B1} 結果與 ω_{ZB} 遠離1和2相同

$$\begin{aligned}
 \text{令 } 2 = \omega_{ZB} + \varepsilon^2 \sigma_Z, \quad (4 - \omega_{ZB})T_0 = \omega_{ZB}T_0 + 2\sigma_Z T_2 \\
 \varepsilon^2 : \ddot{Z}_{B2} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B2} = \left(-\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \right. \right. \\
 + \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} \Big) e^{i(\omega_{ZB} t)} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} e^{i(4 + \omega_{ZB})t} \\
 + \frac{F_2}{m_B} + \bar{A} e^{-it} + \bar{B} e^{it} - \frac{\delta}{2m_B} \hat{\theta} e^{i(\omega_{B0} t)} + C.C. \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Secular terms } -\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \right. \\
 + \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2} \Big) e^{2i\sigma_Z T_2} - \frac{\delta}{2m_B} \hat{\theta} = 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

令 $\hat{Z}(T_2) = B_Z(T_2) e^{i\sigma_Z T_2}$, $\bar{Z}(T_2) = \bar{B}_Z(T_2) e^{-i\sigma_Z T_2}$ 代入(27)得：

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial B_Z}{\partial T_2} + B_Z \left(\frac{2\sigma_Z \omega_{ZB}}{m_B} + \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{16(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)} \right. \\
 + \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{16(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)} \Big) + \frac{9\bar{B}_Z \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{16(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)} \\
 - \frac{9\bar{B}_Z \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{32} \frac{\delta}{m_B} B_\theta = 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

令 $B_Z = B_{Zr} + iB_{Zi}$, $\bar{B}_Z = B_{Zr} - iB_{Zi}$

$(B_{Zr}, B_{Zi}) = (b_{Zr} e^{\gamma_Z T_2}, b_{Zi} e^{\gamma_Z T_2})$,

b_{Zr} 和 b_{Zi} 為常數，代入(28)

$$\begin{aligned}
 \text{實數部份： } \frac{2}{m_B} \omega_{ZB} \gamma_Z b_{Zr} + b_{Zr} \left(\frac{2\sigma_Z \omega_{ZB}}{m_B} + \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{16(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)} \right. \\
 + \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{8(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 - \omega_{ZB})^2)} \Big) - b_{\theta r} \frac{\delta}{m_B} \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{32} = 0 \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{虛數部份： } -\frac{2}{m_B} \omega_{ZB} \gamma_Z b_{Zi} + b_{Zi} \left(\frac{2\sigma_Z \omega_{ZB}}{m_B} + \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{16(\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)} \right. \\
 - b_{\theta i} \frac{\delta}{m_B} \frac{9\tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{32} = 0 \quad (30)
 \end{aligned}$$

(29),(30)解聯立，並令 $\tilde{\omega}_{ZB}^2 = 4$, $b_{\theta r} = b_{Zr}$, $b_{\theta i} = b_{Zi}$

$$\begin{aligned}
 \gamma_Z^2 = -\frac{m_B^2}{4\omega_{ZB}^2} \left(\frac{2\sigma_Z \omega_{ZB}}{m_B} + 9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{1 + 3\omega_{ZB}}{4\omega_{ZB}(1 - \omega_{ZB}^2)} + \frac{\delta}{m_B} \frac{9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{2} \right) \\
 \left(\frac{2\sigma_Z \omega_{ZB}}{m_B} - 9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{1}{4\omega_{ZB}(1 + \omega_{ZB})} + \frac{\delta}{m_B} \frac{9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{2} \right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

由(31)得知：

$$-9m_B \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{1 + 3\omega_{ZB}}{8\omega_{ZB}^2(1 - \omega_{ZB}^2)} - \delta \frac{9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{4\omega_{ZB}} < \sigma_Z \quad (32)$$

$$\sigma_Z < 9m_B \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{1}{8\omega_{ZB}^2(1 + \omega_{ZB})} - \delta \frac{9\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4}{4\omega_{ZB}} \quad (33)$$

因為 $\omega_{ZB} \approx 2$

$$\text{由(32)得到：} \sigma \approx -\beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{21}{32} m_B + \frac{9\delta}{8} \right) \quad (34)$$

$$\text{由(33)得到：} \sigma \approx \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{3}{32} m_B - \frac{9\delta}{8} \right) \quad (35)$$

令 $\bar{Z} = \varepsilon$ 是小擾動

(34),(35)代入 $\omega_{ZB} = 2 - \varepsilon^2 \sigma_Z$ 得

$$\omega_{ZB}^2 = 4 + \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^6 \left(\frac{21}{8} m_B + \frac{9\delta}{2} \right) + \dots \quad (36)$$

$$\omega_{ZB}^2 = 4 - \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^6 \left(\frac{3}{8} m_B - \frac{9\delta}{2} \right) + \dots \quad (37)$$

(C) $\omega_{ZB} \approx 1$

令 $1 = \omega_{ZB} + \varepsilon \sigma_Z$, $(2 - \omega_{ZB})T_0 = \omega_{ZB}T_0 + 2\sigma_Z T_1$

$(2 - \omega_{ZB})T_0 = \omega_{ZB}T_0 + 2\sigma_Z T_1$ 代入 ε^1 , Secular terms

$$\text{為 } -\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} - \frac{3}{4} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^2 \hat{Z} e^{i(2 - \omega_{ZB})T_1} = 0 \quad (38)$$

YY-XX

$$Z_{B1} = -\frac{3}{4} \frac{\tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \hat{Z} e^{i(2+\omega_{ZB})t} + \frac{\bar{A}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{-it} + \frac{\bar{B}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - 1} e^{it} + \frac{F_1}{m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2} + C.C. \quad (39)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{Z}_{B2} + \tilde{\omega}_{ZB}^2 Z_{B2} = \left(-\frac{1}{m_B} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial T_1^2} - \frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \right) e^{i(\omega_{ZB}t)} + i \frac{3 \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{2 m_B (\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2)} (2 + \omega_{ZB}) \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_1} e^{i(2+\omega_{ZB})t} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} e^{i(4+\omega_{ZB})t} + \frac{F_2}{m_B} + \bar{A} e^{-it} + \bar{B} e^{it} - \frac{\delta}{2 m_B} \hat{\theta} e^{i(\omega_{\theta B}t)} + C.C. \quad (40)$$

$$\text{Secular terms} - \frac{1}{m_B} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial T_1^2} - \frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{16} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \frac{\hat{Z}}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} - \frac{\delta}{2 m_B} \hat{\theta} = 0 \quad (41)$$

由(38)得到：

$$\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial T_1^2} = i \frac{3}{8 \omega_{ZB}} m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \left(\frac{\hat{Z}}{\partial T_1} + i 2 \sigma_Z \hat{Z} \right) e^{i 2 \sigma_Z T_1} = -\frac{3}{4 \omega_{ZB}} m_B \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \sigma_Z \hat{Z} e^{i 2 \sigma_Z T_1} - \frac{9}{64 \omega_{ZB}^2} m_B^2 \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \hat{Z} \quad (42)$$

(42) 代入(41)得到：

$$-\frac{2}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial T_2} + \frac{9}{64} \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{m_B}{\omega_{ZB}^2} + \frac{4}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \right) \hat{Z} + \frac{3}{4 \omega_{ZB}} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \sigma_Z \hat{Z} e^{i 2 \sigma_Z T_1} - \frac{\delta}{2 m_B} \hat{\theta} = 0 \quad (43)$$

(38)+(43) 得到：

$$-\frac{4}{m_B} i \omega_{ZB} \frac{d\hat{Z}}{dt} + \varepsilon \left(-1 + \frac{\varepsilon \sigma_Z}{\omega_{ZB}} \right) \frac{3}{4} \tilde{\omega}_{ZB}^2 \beta_{Z2} \bar{Z}^2 \hat{Z} e^{i 2 \sigma_Z T_1} + \frac{9}{64} \varepsilon^2 \tilde{\omega}_{ZB}^4 \beta_{Z2}^2 \bar{Z}^4 \left(\frac{m_B}{\omega_{ZB}^2} + \frac{4}{\tilde{\omega}_{ZB}^2 - (2 + \omega_{ZB})^2} \right) \hat{Z} - \frac{\delta}{2 m_B} \varepsilon^2 \hat{\theta} = 0 \quad (44)$$

令 $\hat{Z} = (B_{Zr} + i B_{Zi}) e^{i \sigma_Z \varepsilon t}$, $\hat{\bar{Z}} = (B_{Zr} - i B_{Zi}) e^{i \sigma_Z \varepsilon t}$, $(B_{Zr}, B_{Zi}) = (b_{Zr}, b_{Zi}) e^{i \gamma_Z t}$ 代入(44)並解聯立得：

$$\frac{16}{m_B^2} \omega_{ZB}^2 \gamma_Z = \varepsilon^2 \left[\left(1 - \frac{\varepsilon \sigma_Z}{\omega_{ZB}} \right) - \frac{1}{4} \varepsilon \frac{m_B (\omega_{ZB} + 4) - 4 \omega_{ZB}}{\omega_{ZB}^2 (\omega_{ZB} + 4)} - \frac{2}{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2} \sigma_Z \omega_{ZB} - \varepsilon \frac{\delta}{6 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2} \right] \left[\left(1 - \frac{\varepsilon \sigma_Z}{\omega_{ZB}} \right) + \frac{1}{4} \varepsilon \frac{m_B (\omega_{ZB} + 4) - 4 \omega_{ZB}}{\omega_{ZB}^2 (\omega_{ZB} + 4)} + \frac{2}{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2} \sigma_Z \omega_{ZB} + \varepsilon \frac{\delta}{6 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2} \right] \quad (45)$$

因為 $\omega_{ZB} \approx 1$

由(45)得到

$$\sigma_Z \approx \frac{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2 (5 m_B - 4)}{40} + \frac{\delta}{2} \right) \quad (46)$$

$$\sigma_Z \approx -\frac{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{3 m_B \beta_{Z2} \bar{Z}^2 (5 m_B - 4)}{40} + \frac{\delta}{2} \right) \quad (47)$$

因為 $\omega_{ZB} = 1 - \varepsilon \sigma_Z$, $\omega_{ZB}^2 = 1 - 2 \varepsilon \sigma_Z + \varepsilon^2 \sigma_Z^2$
所以由(46),(47)得到：

$$\omega_{ZB}^2 = 1 + \varepsilon^2 \delta - \varepsilon^3 3 m_B \beta_{Z2} + \varepsilon^4 \frac{3 m_B \beta_{Z2} (5 m_B - 4)}{20} + \varepsilon^6 \frac{9 m_B^2 \beta_{Z2}^2}{4} \quad (48)$$

$$\omega_{ZB}^2 = 1 + \varepsilon^2 \delta + \varepsilon^3 3 m_B \beta_{Z2} + \varepsilon^4 \frac{3 m_B \beta_{Z2} (5 m_B - 4)}{20} + \varepsilon^6 \frac{9 m_B^2 \beta_{Z2}^2}{4} \quad (49)$$

3.2.2. θ 方向：

由於Z方向與 θ 方向的運動方程式形式相同，所以解出的曲線結果相同，差別只在於Z方向的 $Z_B, \bar{Z}, m_B, k_B, C_B, \omega_Z, \omega_{ZB}, \tilde{\omega}_{ZB}, F_B$ 分別改為 $\theta_B, \bar{\theta}, I_B, k_\theta, C_\theta, \omega_\theta, \omega_{\theta B}, \tilde{\omega}_{\theta B}, M_B$ 。

四、結果與討論

由數學式的推導得圖3和4的曲線;(48)求得 $\omega_{ZB}^2 \approx 1$ 時左邊的曲線，而(49)為右邊曲線，(36)求得 $\omega_{ZB}^2 \approx 4$ 時右邊的曲線，(37)為左邊曲線。圖3可發現當彈簧下的質量塊固定，耦合彈性係數越大，不穩定區域越大，進入不穩定範圍的振動頻率越高。圖4可得知當耦合彈性係數固定，質量塊的質量或轉動慣量越大，不穩定範圍也較大；微量的振幅及振動頻率小於1，進入不穩定範圍的振動頻率越低，不過振幅稍大一些及頻率大於1時，穩定的頻率會越高。由於頻率的公式為 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ，有此可知當彈性係數變大時，頻率會變大；當質量變大，頻率會變小。而我們的穩定性圖的曲線也是如此，耦合彈性係數越大，曲線越右邊；反之，質量和轉動慣量越大，曲線越左邊。圖3和4發現隨著外力激擾程度（幅度）的增加，不穩定的範圍變大，另外也發現質量和轉動慣量的大小影響不穩定的範圍較耦合彈性係數大小多。時間響應（圖5,6,7）是用 RK-4 直接求解(6),(7)的聯立方程式，可驗證圖3的結果： $\delta=0.5$ 的曲線在 $\omega^2=1.1$ 時，任何振幅皆在不穩定的區域中，所以圖5對應振幅在5的時候也是在不穩定的區域內，甚至還發生發散的情況； $\omega^2=3$ 時，振幅大約在0.9以下皆為穩定狀態，所以圖6呈現小幅度擺動為穩定的情形； $\omega^2=4$ 時，振幅皆為不

YY-XX

穩定狀態，由圖7可發現振幅為大幅度振盪為不穩定狀態。比較圖5和7可發現頻率在1的不穩定情形比頻率在2時嚴重，因為在相同的能量下，頻率在2的分散能量效果較佳。不過頻率在1的穩定情況較頻率在2時重要，因為機械皆由從小頻率開始振動，如果一開始出現不穩定，減振效果將會大打折扣。

在線性的假設中不能看見穩定性分析圖有不穩定區域的現象。因為在線性的結果只有在頻率為1和2時會不穩定，所以圖形只會出現2條直線而不會有2條曲線為成一不穩定區域，這證明我們的模型有抓住非線性參數激擾的特性。

五、結論

本文主要使用時間多尺度法分析減振器在參數激擾的影響情況下，分別觀察減振器質量塊的質量或轉動慣量為1，而彈簧的耦合彈性係數分別為0.1, 0.5及0.9，及耦合彈性係數為0.1，質量或轉動慣量分別為1, 2及3的穩定情形，兩張圖皆有質量或轉動慣量為的曲線，它能清楚比對並瞭解質量和轉動慣量的影響較耦合彈性係數大。由模擬結果可發現質量、轉動慣量和頻率越小，不穩定區域越小，我們可以根據這些圖模擬及選取合適的減振器，可避免減振器先產生不穩定的情形。

參考文獻

- [1] Y. R. Wang, and T. H. Chen, "The vibration reduction analysis of a nonlinear rotating mechanism deck system," *Journal of Mechanics*, Vol.24, No.3, 2008, pp.253-266.
- [2] Y.R. Wang, and K.E. Hung, "Damping effect of pendulum tuned mass damper on vibration of two-dimensional rigid body," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.15, No.2, 2015, article number 1450041(37 pages).
- [3] Y. R. Wang, and H. S. Lin, "Stability analysis and vibration reduction for a two-dimensional nonlinear system," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.13, No.5, 2013, article number 1350031(30 pages).
- [4] Y. R. Wang, and T. H. Kuo, "Effects of a dynamic vibration absorber on nonlinear hinged-free beam," submitted, 2014.
- [5] Y. R. Wang, and T. W. Liang, "Application of 3D MACPs on the effects of a lumped-mass vibration absorber on nonlinear beam-spring-mass system," submitted, 2014.

- [6] Y. R. Wang, and C. M. Chang, "Elastic beam with nonlinear suspension and a dynamic vibration absorber at the free end," *Transaction of the Canadian Society for Mechanical Engineering (TCSME)*, Vol.38, No.1, 2014, pp.107-137.
- [7] Nayfeh, A. H., and Mook, Dean T. *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley-Interscience, New York 1981.
- [8] Sedighi, H. M., Reza, A., and Zare, J. Study on the Frequency-Amplitude Relation of Beam Vibration. *International Journal of the Physical Sciences* 2011;6: 8051-8056.
- [9] Pakdemirli, M., "A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities," *Mechanics Research Communications*, Vol. 21, No. 2, pp.203-208, 1994.
- [10] Nayfeh, A.H. and Nayfeh, S.A., "On nonlinear modes of continuous systems," *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp.129-136, 1994.
- [11] Shaw, S. W. and Pierre, C., "Normal modes for non-linear vibratory systems," *Journal of Sound and vibration*, Vol. 164, pp.85-124, 1993.
- [12] Shaw, S. W. and Pierre, C., "Normal modes of vibration for non-linear continuous systems," *Journal of Sound and vibration*, Vol. 169, pp.319-347, 1994.
- [13] Pesheck, E. and Pierre, C., "A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds," *Journal of Sound and vibration*, Vol. 249, No.5, pp. 971-993, 2002.

附錄

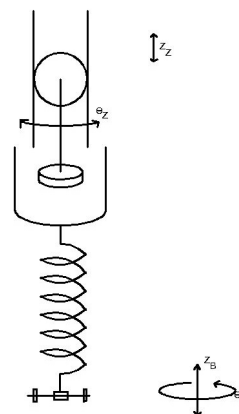


圖1 動態減振器(DVA)示意圖

YY-XX

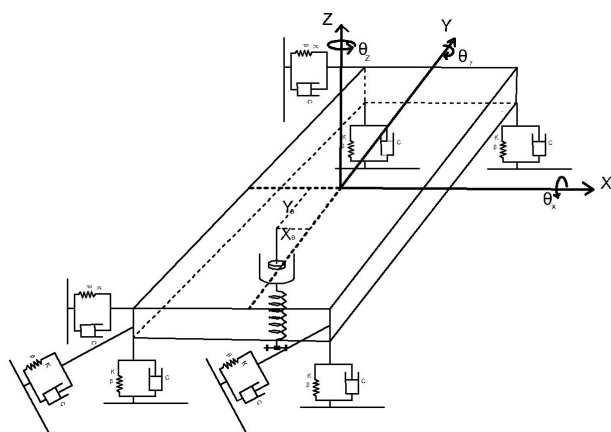


圖2. 振盪基座與動態減振器概念圖

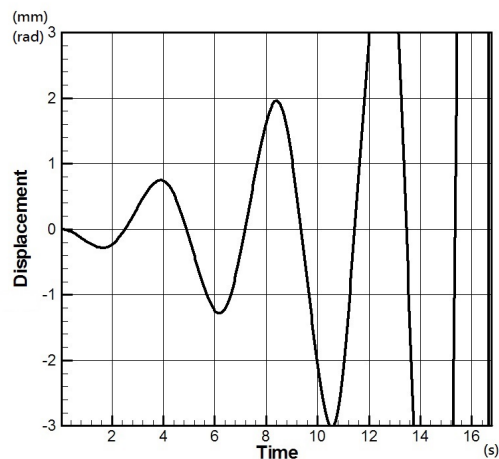


圖5 驗證圖3 ($\delta=0.5$, $\bar{Z}$ 或 $\bar{\theta}=0.5$, $\omega^2=1.1$) 為不穩定區域

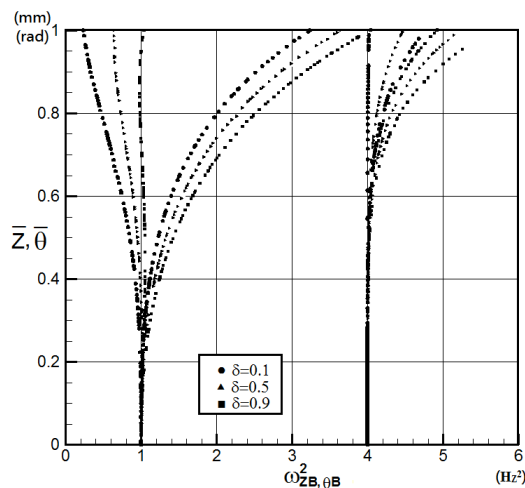


圖3 $m_B=1$ 時, 耦合彈性係數分別為0.1, 0.5及0.9的參數激擾穩定性圖

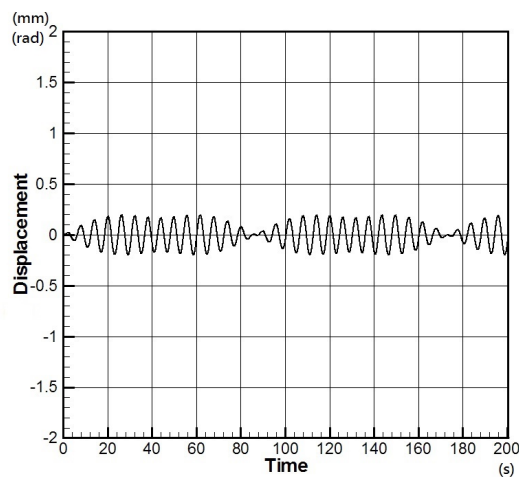


圖6 驗證圖3 ($\delta=0.5$, $\bar{Z}$ 或 $\bar{\theta}=0.5$, $\omega^2=3.0$) 為穩定區域

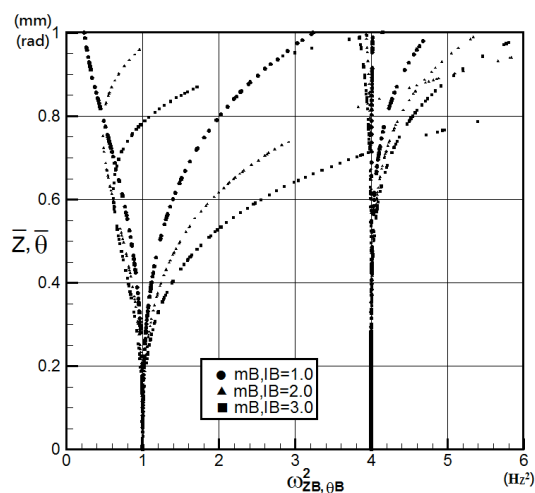


圖4 $\delta=0.1$ 時, 質量和轉動慣量分別為1, 2及3的參數激擾穩定性圖

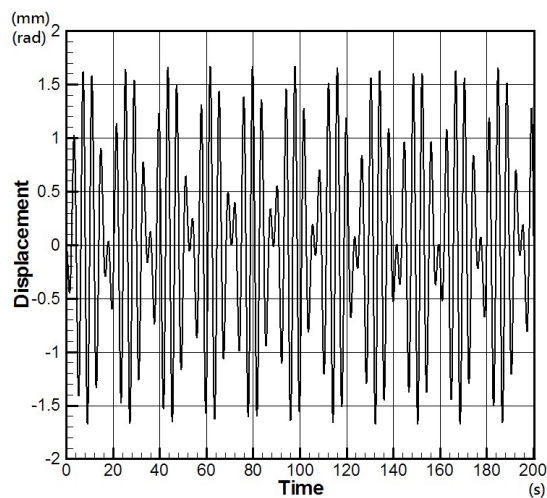


圖7 驗證圖3 ($\delta=0.5$, $\bar{Z}$ 或 $\bar{\theta}=0.5$, $\omega^2=4.0$) 為不穩定區域