

## 應用移動漸近線法於結構之最佳化設計

張永康 郭純孜 康祐嘉  
淡江大學航空太空工程學系

### 摘要

移動漸近線法的原理是將一個函數利用倒數近似法加上中介變數轉換為近似原問題的函數。因移動漸近線法可以處理各種設計參數並因應各式目標函數與限制條件，本研究應用移動漸近線法之特性得到函數之近似式並利用對偶法對最佳化問題求解。對偶法為將原本的最小化問題以與之有關的最大化對偶函數取代。也就是將原設計問題轉換為凸性且為可分離的子問題，這有助於結構最佳化問題能夠快速地求解。因此本研究應用移動漸近線法得到結構行為之近似函數，再採用對偶法執行結構之最佳化設計。

**關鍵字：**移動漸近線法，對偶法，靈敏度分析

## Optimum Design of Structures by Method of Moving Asymptotes

Y.K. Chang, C.T. Kuo and Y.C. Kang  
Department of Aeronautical Engineering  
Tamkang University, Taiwan, R.O.C.

### ABSTRACT

Method of Moving Asymptotes (MMA) is used by reciprocal approximate and moving asymptotes to approximate an original function. Because MMA can deal with various kinds of design parameters and handle all kinds of objective and constraint functions, this study applies the characteristics of MMA to obtain the approximation function and then uses dual method to solve the problem. Dual method is that the original minimization problem is replaced by the maximization of dual function relating to it. That is, the dual method was used to solve design problem by a subproblem, which is convex and separable. Therefore, this study applies MMA to obtain the approximate function of structural behavior, and then adopts dual method to obtain the optimum design of structures.

**Keyword:** Method of Moving Asymptotes, Dual Method, Sensitivity analysis

### 一、前言

在結構最佳化的領域裡，為了達到最佳化的目的，會對結構的尺寸、形狀或重量進行改良。在結構設計上，除了使其輕量化之外，同時也增加了結構強度。一個理想的結構最佳化方法，應該具有變通性與普遍性，要能處理各種設計變數與因應各式各樣的限制條件及一般的非線性問題作分析。而移動漸近線法(Method of Moving Asymptotes, MMA)能夠處理多變數、多個限制條件，除了擁有上述的理想的結構最佳化方法應有的特性外，在處理相關的設計問題中，也能夠得到更佳的解。

結構最佳化設計，在二十世紀初便有其概念

出現，最初是由結構尺寸最佳化開始發展。到了西元 1950 年代末期，由於電腦的迅速發展以及有限元素法(Finite element method)的出現，對於大型而且複雜的結構問題提供了一個強而有力的分析工具。接著有學者將近似法的概念加入以數學規劃法為基礎的最佳化方法上，大大地增進了計算效率，並簡化原有的問題，使結構最佳化設計向前邁進了一大步 [1]。移動漸近線法(Method of moving asymptotes)是一種應用近似法的概念所發展的新理論，由 Svanberg [2] 在 1987 年提出，將其理論應用在樑和桁架上，對於結構最佳化分析能夠快速收斂，即使不加入移動限制的條件，也有不錯的結果。Saldanha [3] 等學者分

別比較懲罰法(Penalty method)和移動漸近線法兩種方法，以線圈的形狀和位置為設計變數，求解螺線管所受的力與給定的不變的力之誤差最小化問題，並證實移動漸近線法比懲罰法更有效率，能更快地收斂。Bruyneel [4]利用移動漸近線法的概念應用在複合材料上，以改變疊層厚度及角度達到有效的收斂，雖然整體沒有最佳解，但是局部區域有最佳解，在工業上仍有進步的空間。Svanberg [5]在近年提出了一套新的理論—Conservative Convex Separable Approximating (CCSA)，應用於求解非線性不等式限制條件的問題，結果顯示最佳化問題能有效的收斂並可應用於變數數目很大的問題上。Buhl [6]等學者在可縮放的屋頂設計上應用移動漸近線法，以三角形狀為設計變數，使相鄰的平板在任何狀態下的未接觸之面積與接觸之面積，兩者總和作最小化設計，來達到最佳化設計的目的。Carlsson 和 Thinnsten [7]同時將模擬退火法和移動漸近線法應用在小提琴上，利用對小提琴結構厚度的改變，以求取前三個特徵頻率的最佳化問題，說明移動漸近線法對於有限制條件的問題有較好的效率，而移動漸近線法之所以比較接近最佳解的行為是由於使用了靈敏度的關係，因此移動漸近線法有較好的表現。

移動漸近線法除了單一目標函數和單一限制條件，也可配合多目標多個限制條件，亦可應用在線性和非線性的結構最佳化問題上[8]。Kruijf [9]等學者以 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)方法建立結構最佳化問題的模型，在二維的範圍內，研究結構和材料設計之中熱傳導的影響，以最佳準則法(the Optimality Criteria method)和移動漸近線法求解，並發現移動漸近線法比最佳準則法要來得更穩定。Kruzelecki 和 Smaś [10,11] 使用移動漸近線法探討彈力環狀板最佳化問題，並在熱負載下考慮它們的穩定性，其問題為尋找一個環狀對稱板，使溫度的最大增量剛好導致結構產生彎曲的厚度分布，而局部的板子厚度非常薄，有應力集中的情況發生，他們藉由探討這個問題，發現若是配合適當的限制條件可避免厚度過薄的問題。移動漸近線法能廣泛的應用在工程上，像是求解壓電材料，或載具結構，和各種與最佳化有關的問題，對一般有數學公式的目標函數和限制條件來說，就算設計點離最佳解很遠時，移動漸近線法擁有可以快速收斂的特性。因此 Zuo [12]等學者則以移動漸近線法為基礎，發展一種新的演算法，可以更廣泛地應用到複雜的工程問題上，即使迭代次數很多，也很容易收斂。移動漸近線法有其結構最佳化設計所需要的變通性，並且現在

MMA 系統對於求解複雜的目標函數、多限制條件的最佳化問題是最穩定且計算效率快的[13]。

## 二、移動漸近線法

移動漸近線法是由 Svanberg 所提出[2]，能將原問題的函數  $f_i(x)$  依下式作轉換：

$$f_i^{(k)}(x) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \quad (1)$$

$$\text{其中 } p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j & \text{當 } \left\{ \begin{array}{l} \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ \partial f_i / \partial x_j \leq 0 \end{array} \right. \\ 0 \end{cases}$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{當 } \left\{ \begin{array}{l} \partial f_i / \partial x_j \geq 0 \\ \partial f_i / \partial x_j < 0 \end{array} \right. \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j \end{cases}$$

$$r_i^{(k)} = f_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \\ L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)}$$

求解過程通常依照以下的步驟反覆迭代：

- 步驟一 選擇一個初始值  $x^{(k)}$ ，假設初始迭代次數  $k=0$ 。
- 步驟二 利用  $x^{(k)}$  作為計算  $f_i(x^{(k)})$  和靈敏度值  $\nabla f_i(x^{(k)})$  的迭代點。
- 步驟三 產生一個子問題  $P^{(k)}$  取代  $P$ ，利用步驟二得到的結果建立函數  $f_i^{(k)}$ ，使函數  $f_i^{(k)}$  近似函數  $f_i$ 。
- 步驟四 求解  $P^{(k)}$ ，得到此次子問題的最佳解  $x^{(k)}$ 。如果不能滿足收斂條件，則回到步驟二。

上述的求解過程，設計者可自行設定收斂條件，一般是以迭代點  $x^{(k)}$  是否滿足設計所需而決定。依照 MMA 方法，能夠將最初較複雜的最佳化問題，轉換成較簡易的子問題，此子問題模型可採用對偶法求解。

## 三、對偶法

在對偶法(Dual Method)裡，最初的最小化問題可以被取代為只與 Lagrangian multipliers 有關的最大化對偶函數。這些 multipliers 受限於簡單的非負數限制條件。對偶法能將原設計問題轉換為凸性且為可分離的子問題，這些子問題有簡單的代數結構，因此能夠快速地被對偶法公式求解，對於分析結構最佳化問題是有效率的[17]。

利用 Lagrangian 函數將目標函數與限制條件合成一式，如下表示：

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \quad (2)$$

$\lambda_i$  即為 Lagrange multipliers，或是稱為對偶變數 (dual variables)。之後可將問題  $D$  (dual problem) 轉換如下：

最大化

$$W(\lambda) = r_0 - \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^n W_j(\lambda) \quad (3)$$

並滿足限制條件  $\lambda_i \geq 0$

當求解問題  $D$  得到其解  $\lambda$  時，也就能夠得到與之相對應的  $P^{(k)}$  的解。

#### 四、靈敏度分析

一般來說，對函數作一次微分時，這個一次微分項就是靈敏度。吾人從式(1)可以看出函數的一次微分項的存在，因此靈敏度在此是必須的。

對於靈敏度的計算，吾人使用有限差分法 (finite difference method)，表示如下：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \quad (5)$$

主要原理是給予一個微小的擾動  $\Delta x$ ，其微小的擾動  $\Delta x$  的數值相當重要，若  $\Delta x$  值太大則會造成過大的誤差。藉由初始與前後函數值的加減計算靈敏度，以此靈敏度作為最佳化求解過程中的搜尋方向。

有限差分法的主要優點是靈敏度的計算公式淺顯易懂。但比起其他的靈敏度方法容易花較多的計算時間。若是設計變數增加時，計算靈敏度之時間將更為可觀。我們可以利用 ANSYS 之 APDL 語法整合靈敏度算式，藉由電腦計算靈敏度的數值，使之自動化以節省計算時間，改善效率問題。

#### 五、數值分析

本研究中將應用 ANSYS 有限元素分析軟體來建立正確的有限元素模型來分析各種不同的結構。在求解結構最佳化問題時，必須先了解求解的結構其結構特性，並訂定目標函數、限制條件、以及設計參數之上下限，接著根據結構特性使用 ANSYS 有限元素分析軟體建構有限元素分析模型，以獲得所需之數值，如位移、自然振動頻率或是結構整體重量等。本研究應用移動漸近線法來求解最佳化問題，首先訂定初始設計參數，藉由有限元素分析軟體求得所需之數值，接著執行靈敏度分析，並針對限制條件做泰勒級數

展開，應用移動漸近線法將最佳化問題轉換為近似原問題的函數，再使用對偶法執行最佳化設計，最後代回 ANSYS 有限元素分析軟體驗證結果是否滿足收斂條件，若滿足收斂條件則表示完成結構之最佳化設計，上述之系統流程如圖一所示。

#### 範例一：懸臂壓電雙層複材薄板之輕量化設計

本範例為懸臂壓電雙層複材薄板結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖二所示[15]。上下層為壓電材料，中間兩層為複合材料。上層壓電層負載電壓為-180V，下層壓電層負載電壓為+180V。懸臂板的長度  $L=250\text{ mm}$ ，懸臂板寬度  $b=10\text{ mm}$ 。其限制條件為上層壓電層端點在  $z$  方向之位移量  $u_{tip}$  不超過 2.0 mm 之要求。設計參數為每一層疊板的厚度  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$  及  $t_4$ ，壓電層厚度參數  $t_1$  及  $t_4$  的上下限分別為 0.2 mm 至 1.0 mm，而複合材料層厚度參數  $t_2$  及  $t_3$  的上下限分別為 1.0 mm 至 2.0 mm，其纖維排列方向為  $[0^\circ/90^\circ]$ 。

表一為有限元素分析初始值與最佳值之比較，最佳化之結果其結構總重量由 38.4000 g 降至 23.1311 g，設計變數  $t_1$  及  $t_4$  厚度由 0.6000 mm 分別降至 0.2000 mm 及 0.2514 mm， $t_2$  厚度由 1.5000 mm 增至 1.8660 mm， $t_3$  厚度由 1.5000 mm 降至 1.0010 mm，其端點位移  $u_{tip}$  亦小於 2.0000 mm，本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[15]為佳。圖三為懸臂壓電雙層複材薄板結構之收斂歷程圖，由圖可知本範例經過 10 次迭代得到最佳值。

#### 範例二：壓電複合梯形斜板之自然頻率最大化

本範例為壓電複合梯形斜板結構之自然頻率最大化設計，提高第一個自然振動頻率  $f_1$ ，其結構外型與尺寸如圖四所示[15]。上下層為壓電材料，中間四層為複合材料。其限制條件為第一個自然振動頻率超過 50 Hz。設計參數為每一疊層板的角  $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$  及  $\theta_5$ ，考慮複合材料的對稱關係，可將第二層與第五層的角度設為相同之設計參數  $\theta_{25}$ ，第三層與第四層的角度設計參數設為  $\theta_{34}$ 。參數  $\theta_{25}$  及  $\theta_{34}$  的上下限分別為  $0^\circ$  至  $+90^\circ$ 。複合材料層的厚度為每層 1.0 mm，壓電材料層的厚度為每層 0.5 mm。

表二為有限元素分析初始值與最佳值之比較，由表六可知，第一個自然振動頻率由 33.515 Hz 提高至 50.181 Hz，設計變數  $\theta_{25}$  角度由  $10.000^\circ$

轉至  $71.500^\circ$ ， $\theta_{34}$  角度由  $10.000^\circ$  轉至  $71.562^\circ$ ，達到提高自然振動頻率的目的，本範例之結果與文獻[15,16]相比，雖然  $\theta_{25}$  及  $\theta_{34}$  的角度皆有些許改變，但振動頻率並無改變。圖五為壓電複合梯形斜板結構之收斂歷程圖，圖中顯示經過 7 次迭代得到最佳值，可以驗證移動漸近線法具有收斂效率佳的特性。

### 範例三：懸臂壓電多層複材薄板之輕量化設計

本範例為懸臂壓電多層複材薄板結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖六所示[15]。上下層為壓電材料，中間四層為複合材料。上層壓電層負載電壓為 +160V，下層壓電層負載電壓為 -160V。其中壓電薄層長度  $L_1 = 80 \text{ mm}$ ，複合材料薄層長度  $L_2 = 260 \text{ mm}$ ，懸臂板寬度  $b = 40 \text{ mm}$ 。其限制條件為複合材料層端點在  $z$  方向之位移量  $u_{ip}$  不超過 1.5 mm 之要求。設計參數為每一疊層板的厚度  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ 、 $t_4$ 、 $t_5$  及  $t_6$ ，由於考慮疊層薄板的對稱關係， $t_1 = t_6$ ， $t_2 = t_5$ ， $t_3 = t_4$ ，因此可將設計參數簡化為  $t_1$ 、 $t_2$  及  $t_3$ 。壓電層厚度及複合材料層厚度參數  $t_1$ 、 $t_2$  及  $t_3$  的上下限分別為 0.2 mm 至 1.0mm。複合材料纖維排列方向為  $[45^\circ/-45^\circ]_s$ 。

表三為有限元素分析初始值與最佳值之比較，最佳化之結果其結構總重量由 64.3968 g 降至 50.7351 g，設計變數  $t_1$  及  $t_2$  厚度由 0.6000 mm 分別降至 0.3415 mm 及 0.2432 mm， $t_3$  厚度由 0.6000 mm 增至 0.9304 mm，其端點位移  $u_{ip}$  亦小於所限制的 1.5000 mm，本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[16]為佳。圖七為懸臂壓電多層複材薄板結構之收斂歷程圖，由圖可知本範例經過 10 次迭代得到最佳值，可以驗證移動漸近線法能夠得到不錯的結果。

### 範例四：十桿件桁架結構最佳化設計

本範例為十桿件桁架結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖八所示[15]。桁架上方負載  $P_1$  為 50000 lb，下方負載  $P_2$  為 150000 lb。結構之材料性質為楊氏係數  $E = 10^7 \text{ psi}$ 、材料密度  $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ ，和蒲松比  $\nu = 0.3$ 。其限制條件為節點 2 在  $y$  方向之位移量  $u_{2y}$  不超過 2.0 in 之要求。設計參數為各桿件之截面積  $A_i$ ，其上下限分別為  $26.0 \text{ in}^2$  和  $0.1 \text{ in}^2$ 。

表四為範例五有限元素分析初始值與最佳值之比較，最佳化之結果其結構總重量由

6294.701 lb 降至 4357.845 lb，其節點 2 位移  $u_{2y}$  亦等於所限制的 2.000 in。本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[16]為佳。圖九為十桿件桁架結構之收斂歷程圖，由圖可知本範例經過 14 次迭代得到最佳值，因此可證明移動漸近線法具有收斂快並且可以得到不錯的結果。

### 範例五：直昇機尾桁結構最佳化設計

本範例為直昇機尾桁結構最佳化設計，其結構外型、尺寸以及支點上的負載如圖十所示[15]。結構共有 108 根桿件，72 個自由度。支點 1、2、3，和 4 為固定端。結構之材料性質為楊氏係數  $E = 10^7 \text{ psi}$ 、材料密度  $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ ，以及蒲松比  $\nu = 0.33$ 。其限制條件為第一個模態之自然振動頻率  $f_1 \geq 29.0 \text{ Hz}$ ，且滿足端點之最大位移  $u_{25,y}$  小於 0.5 in。設計參數為桿件之截面積  $A_i$ ，桿件之初始設計參數皆為  $0.3 \text{ in}^2$ ，其上下限分別為  $0.06 \text{ in}^2$  和  $1.50 \text{ in}^2$ 。本範例中，為了便於製造與應用，吾人將 108 根桿件分為 18 組[15]。

表五為範例六有限元素分析初始值與最佳值之比較。本範例所得到之最佳化設計位移由 1.07 in 降至 0.50 in，自然振動頻率由 21.27 Hz 提高至 33.24 Hz，最佳化結構之重量也較文獻[15]的重量輕，自然振動頻率及端點位移皆滿足所給定之條件。圖十一為直昇機尾桁結構之收斂歷程圖，由圖可知本範例經過 16 次迭代得到最佳值。

## 六、結論

本論文成功地應用移動漸近線法於結構的最佳化問題上，研究中先將結構最佳化問題轉換為近似原問題的函數，再使用對偶法求解，解題過程中並應用 ANSYS 有限元素分析軟體執行結構分析並驗證所得之最佳值。針對不同類型的問題，皆可採用移動漸近線法求解結構的最佳化設計，由數值分析中的數據顯示，應用移動漸近線法確實可以得到不錯的結果。由於應用 ANSYS 有限元素分析軟體執行結構分析之計算，使得本研究之結果更為可靠。

靈敏度分析對於移動漸近線法來說是很重要的，未來可嘗試改善靈敏度的計算效率和準確性，使得到的靈敏度值更接近真實的靈敏度方向，藉以提升應用移動漸近線法求解的效率。本研究以 APDL 語法結合 ANSYS 與 FORTRAN 程式，可以減少迭代過程所耗費的時間。由本研究的範例中可知應用移動漸近線法求解結構最佳化問題可獲得較其他文獻佳的結果。未來可應用 ANSYS 有限元素分析軟體之驗證，將移動漸近線法應用於更多複雜的結構。

### 七、參考文獻

[1] 劉惟信, 1996, “機械最優化設計”, 全華科技圖書股份有限公司。

[2] Svanberg K., 1987, “The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359-373.

[3] Saldanha R. R., Pelissier S., Kadded K., Yonnet Y. P., Coulomb J.-L., 1992, “Nonlinear optimization methods applied to magnetic actuators design,” *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1581-1584.

[4] Bruyneel M., Fleury C., 2002, “Composite structures optimization using sequential convex programming,” *Advances in Engineering Software*, Vol. 33, pp. 697-711.

[5] Svanberg K., 2002, “A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations,” *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 12, No. 2, pp. 555-573.

[6] Buhl T., Jensen F. V., Pellegrino S., 2004, “Shape optimization of cover plates for retractable roof structures,” *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 1227-1236.

[7] Carlsson P., Tinnsten M., 2003, “A distributed computing system used for concurrent optimization methods on a violin top,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 25, pp. 453-458.

[8] Stegmann J., Lund E., 2005, “Nonlinear topology optimization of layered shell structures,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 29, pp. 349-360.

[9] Kruijff N., Zhou S., Li Q., Mai Y.-W., 2007, “Topological design of structures and composite materials with multiobjectives,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 7092-7109.

[10] Kruszelecki J., Smaś P., 2006, “Optimal annular plates with respect to their stability under thermal loadings,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 32, pp. 111-120.

[11] Smaś P., 2007, “Design of clamped columns for maximizing the axial displacement at buckling,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 33, pp. 229-241.

[12] Zuo K.-T., Chen L.-P., Zhang Y.-Q., 2007, “Study of key algorithms in topology optimization,” *International Journal Advances Manufacturing Technology*, Vol. 32, pp. 787-796.

[13] Liu J., Chen Y., Luo Z., 2006, “Design of monolithic

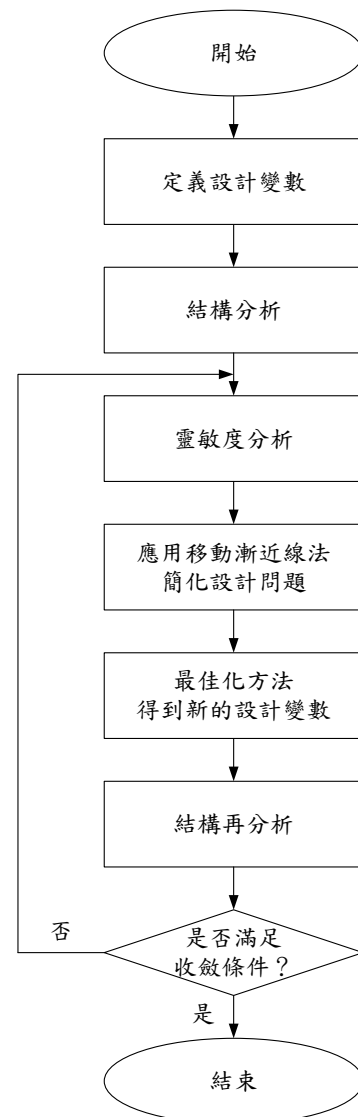
compliant mechanisms for microactuator using topology optimization schemes,” the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 21-23.

[14] 陳匡佑, 2007, “應用移動漸近線法於有限元素的最佳化設計”, 淡江大學機械與機電工程研究所碩士論文。

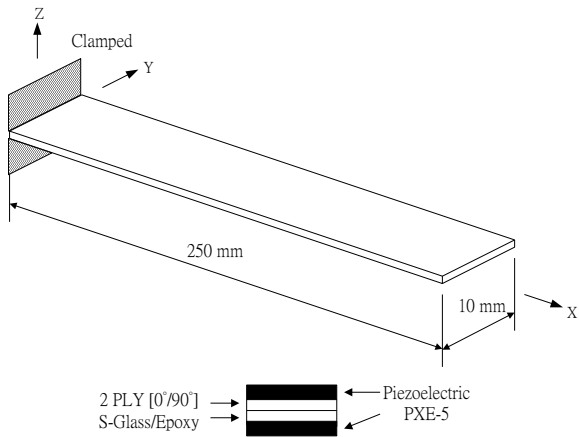
[15] 柯星竹, 2006, “應用遺傳演算法與類神經網路於結構最佳化設計之研究”, 淡江大學航空太空工程研究所碩士論文。

[16] 黃建翰, 2007, “應用逐次線性規劃法結合移動限制技術於結構最佳化設計之研究”, 淡江大學航空太空工程研究所碩士論文。

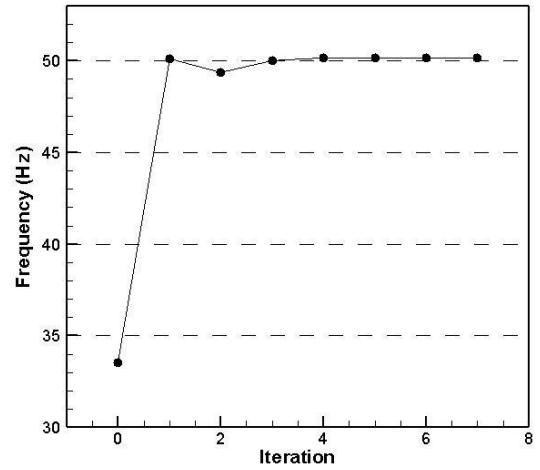
[17] Fleury C., 1992, “Mathematical Programming Methods for Constrained Optimization: Dual Methods,” *Structural Optimization: Status and Promise*, Vol. 150, pp. 123-150.



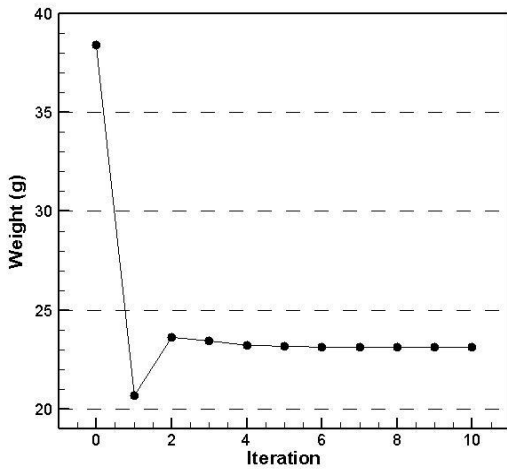
圖一 執行流程



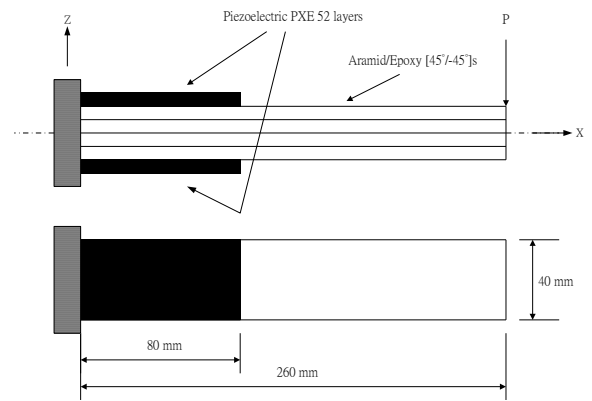
圖二 範例一 懸臂壓電雙層複材薄板結構外型圖



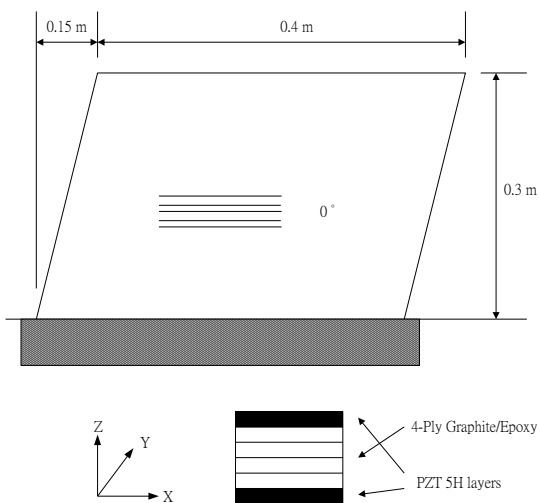
圖五 範例二 壓電複合梯形斜板結構收斂圖



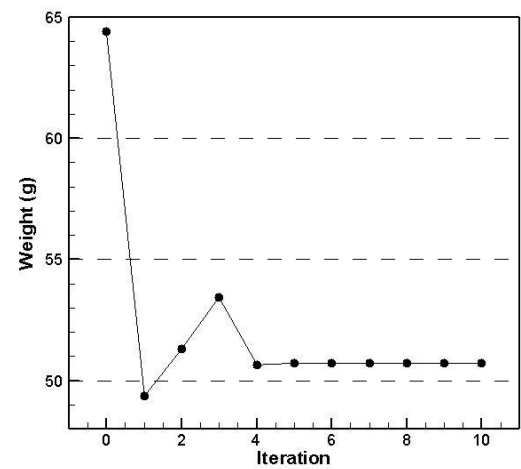
圖三 範例一 懸臂壓電雙層複材薄板結構收斂圖



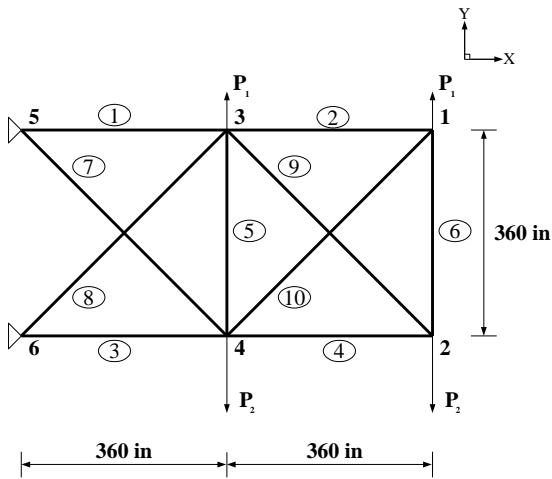
圖六 範例三 懸臂壓電多層複材薄板結構外型圖



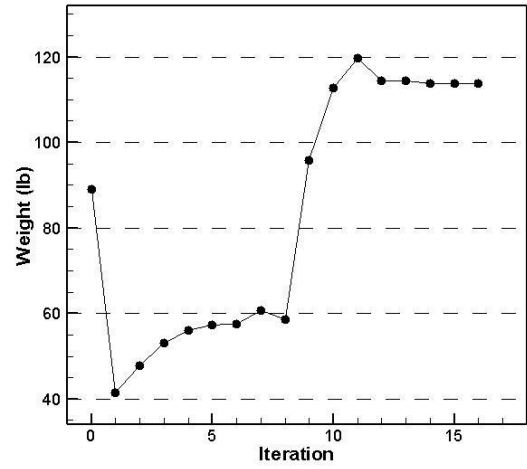
圖四 範例二 壓電複合梯形斜板結構外型圖



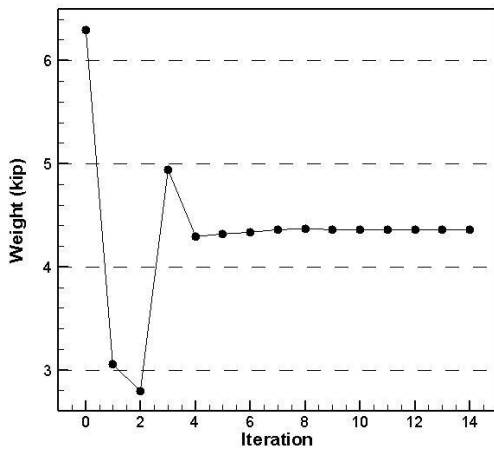
圖七 範例三 懸臂壓電多層複材薄板結構收斂圖



圖八 範例四 十桿件桁架結構外型圖



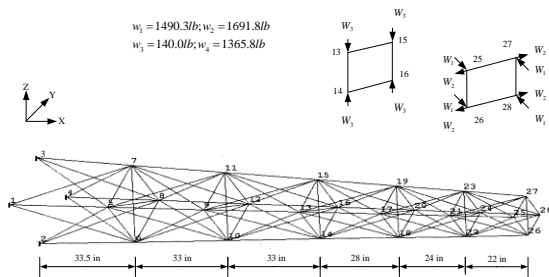
圖十一 範例五 直昇機尾桁結構收斂圖



圖九 範例四 十桿件桁架結構收斂圖

表一 範例一初始值與最佳值之比較

	初始值	文獻[15]	本研究
$t_1 (mm)$	0.6000	0.2985	0.2000
$t_2 (mm)$	1.5000	1.0329	1.8660
$t_3 (mm)$	1.5000	1.5494	1.0010
$t_4 (mm)$	0.6000	0.2991	0.2514
總重量 (g)	38.4000	24.6000	23.1311
$u_{ip} \leq 2.0 (mm)$	0.9185	2.0000	1.9996



圖十 範例五 直昇機尾桁結構外型圖

表二 範例二初始值與最佳值之比較

	初始值	文獻[15]	文獻[16]	本研究
$\theta_{25}$ (度)	10.000	71.560	71.521	71.500
$\theta_{34}$ (度)	10.000	70.320	71.110	71.562
$f_1 (Hz) > 50Hz$	33.515	50.181	50.181	50.181

表三 範例三初始值與最佳值之比較

	初始值	文獻[15]	文獻[16]	本研究
$t_1(mm)$	0.6000	0.3824	0.3518	0.3415
$t_2(mm)$	0.6000	0.5685	0.5202	0.2432
$t_3(mm)$	0.6000	0.5668	0.6559	0.9304
總重量(g)	64.3968	51.6000	51.3000	50.7351
$u_{tip} \leq 1.5(mm)$	0.9439	1.4999	1.5000	1.4999

表四 範例四初始值與最佳值之比較

	初始值	文獻[15]	文獻[16]	本研究
$A_1(in^2)$	15.00	25.99	24.97	24.97
$A_2(in^2)$	15.00	0.10	0.10	0.10
$A_3(in^2)$	15.00	22.96	22.35	22.35
$A_4(in^2)$	15.00	14.02	14.24	14.24
$A_5(in^2)$	15.00	0.10	0.10	0.10
$A_6(in^2)$	15.00	1.04	1.13	1.13
$A_7(in^2)$	15.00	4.07	4.04	4.04
$A_8(in^2)$	15.00	15.96	16.11	16.10
$A_9(in^2)$	15.00	20.13	20.89	20.89
$A_{10}(in^2)$	15.00	0.10	0.10	0.10
總重量(lb)	6294.70	4361.14	4358.24	4357.85
$u_{2y} \leq 2.0 in$	2.68	2.00	2.00	2.00

表五 範例五初始值與最佳值之比較

	初始值	文獻[15]	本研究
$AG_1(in^2)$	0.30	1.42	1.41
$AG_2(in^2)$	0.30	0.16	0.15
$AG_3(in^2)$	0.30	0.06	0.06
$AG_4(in^2)$	0.30	1.47	1.46
$AG_5(in^2)$	0.30	0.19	0.19
$AG_6(in^2)$	0.30	0.06	0.06
$AG_7(in^2)$	0.30	0.99	0.98
$AG_8(in^2)$	0.30	0.23	0.22
$AG_9(in^2)$	0.30	0.06	0.06
$AG_{10}(in^2)$	0.30	1.07	1.08
$AG_{11}(in^2)$	0.30	0.24	0.25
$AG_{12}(in^2)$	0.30	0.06	0.06
$AG_{13}(in^2)$	0.30	0.63	0.64
$AG_{14}(in^2)$	0.30	0.28	0.29
$AG_{15}(in^2)$	0.30	0.07	0.08
$AG_{16}(in^2)$	0.30	0.35	0.36
$AG_{17}(in^2)$	0.30	0.34	0.34
$AG_{18}(in^2)$	0.30	0.06	0.06
總重量(lb)	88.88	113.88	113.78
$f_1 \geq 29.000(Hz)$	21.27	33.68	33.24
$ u_{25,y}  \leq 0.5 in$	1.07	0.50	0.50