



## 流體體積法應用於寬頂堰流之探討

## Investigation of the Fluid Volume Method Applied to Broad-Crested Weir Flow

計畫編號：NSC89-2211-E032-015

執行期間：88/8/1~89/7/31

主持人：施清吉 淡江大學水環系教授

計畫參與人員：許真逢、高全志(研究生)

## 一、中文摘要(關鍵詞：寬頂堰流、流體體積法、自由面)

本研究依據 Navier-Stokes 運動方程式與連續方程式，採用流體體積法探討流經一二維寬頂堰流的趨勢與傾向。流體體積法定義一流體函數  $F$ ，其值為  $0 \leq F \leq 1$ ，此法包括多種選擇，本計畫採用的計有：強制上游邊界條件、修正發散量、彌補自由面下表面晶格之  $F$  值、不同的初始上下游深度與不同的黏度。且於最適當的選擇下，展示並探討其速度場與發散量之分佈。

英文摘要 (Keyword: Broad-crested weir flow, Method of fluid volume, Free surface)

Based upon the Navier-Stokes equations of motion and the continuity equation, the method of the fluid volume is adopted to investigate the tendency and the trend of a two dimensional broad-crested weir flow. The method of the fluid volume defines a fluid function  $F$ ,  $0 \leq F \leq 1$ , and it consists of various options and selections. In this project options and selections studied are forcing upstream boundary condition, the divergence correction, the packing of the surface cell below the free surface, the various initial upstream and downstream depths, and the various viscosities. Finally, for the best outcome of the option and the selection, the velocity and dilatation fields are displayed and investigated.

## 二、計畫緣由與目的

本計畫採用以 MAC 法 (Marker and cell) 為架構的流體體積法 (Volume of fluid)，定義一流體函數  $F$ ，其值介於 0 與 1，包括等號，其程式為 NASA-VOF2D，此法極具彈性，同時也極靈活，適合應用於各種不同的流體問題。流體體積法提供了一個處理自由面 (Free surface) 的另一新途徑，不延用傳統的差分法 (Finite difference)，其功能相當強，足以克服目前數值模擬時常遭遇的困難。目前的流體體積法又可處理流域內任何形狀的阻礙物，本研究以寬頂堰 (Broad-crested weir) 為例。然而，流體體積法包括

多種選擇，例如是否修正發散量 (Dilatation)、是否彌補自由面下表面晶格 (Surface cell) 的  $F$  值、以及邊界條件之設定等等。故本計畫首先探討各種選擇對模擬的影響。另外，流體體積法的唯一判斷為每一晶格的速度均須滿足連續方程式，即發散量等於 0，或小於一個很小的數目；若不，則須進行多次的修正與疊代。然而，經過上萬次的運算後，是否所有晶格之發散量都非常小呢？發散量的分佈，以及形成發散量無法收斂的因素為本計畫的目的之一。

## 三、研究方法與成果

研究方法 流體體積法詳述於報告 NASA-VOF2D，為 SOLA-VOF 的第二版，分別發表於 1985 與 1980，兩者均由 MAC 法演變而來的。模擬技巧為顯性法，包括四個步驟：構建問題、計算下時段 (Advanced time step) 之暫時速度 (Temporary velocity) 或猜測速度、修正和疊代以符合連續方程式、與計算下時段流體函數  $F$  值。每一個時段的計算均包括後三個步驟。大體上，NASA-VOF2D 仍然採用 MAC 法的架構，但因下述的改進使 NASA-VOF2D 更合理、更具彈性與更靈活，使其更適宜應用於各類之渠流 (Channel flow)。改進之一，也是最大的特點就是引進了流體函數  $F$ ，其微分方程式的型式與自由面的機動條件 (Kinematic condition) 完全相同，只不過自由面高度改為流體函數  $F$  而已。然而，流體體積法並不採用一般的有限差分方法來處理這一道微分方程式，而是採用捐贈與接受通量近似 (Donor-acceptor flux approximation)。這種近似方法具有三個優點。一是可保留自由面的明確定義，自由面的一邊是水，另一邊為空氣，為不連續的界面。二是避免形成負指數，以減少形成數值不穩定的現象。三是捐贈晶格 (Donor cell) 流入接受晶格 (Acceptor cell) 的流體與空氣不能超過前者本身所有的。自由面的  $F$  值介於 0 與 1 之間 (不含 0 也不含 1)。自由面的位置除了決定於該晶體的  $F$  值外，尚決定於四周晶格的  $F$  值，所以流體體積法處理自由面的技巧就便為相當精準。改進

之二就是計算表面晶格 ( $1 > F > 0$ ) 的壓力, 其值仍然由充斥晶格 ( $F=1$ ) 與自由面的位置等相關因素, 利用線性內(或外)插法求得。可是充斥晶格可在表面晶格的任一邊, 左方、右方、下方或上方都有可能, 這一點就不同於以前的作法。流體體積法會準確地判斷出充斥晶格在表面晶格之哪一邊。易言之, 流體體積法比以前的方法更靈活, 更廣泛化。改進之三為計算網格內可置放任何形狀的阻礙物 (Obstacle), 阻礙物邊界用不著與晶格邊界吻合。

成果 上游福祿數 (Froude number)  $Fr$  設 0.1, 計算網格相當於 4.8 公尺  $\times$  0.4 公尺的流域, 寬頂堰設於  $x=2.995$  公尺, 寬為  $3.305-2.995=0.31$  公尺, 堰高為 0.18 公尺。採用非均勻晶格,  $\Delta x/\Delta y$  或  $\Delta y/\Delta x$  介於 2/3 與 5/3 之間, 最小的  $\Delta x$  與  $\Delta y$  都等於 0.01 公尺。在計算網格內, 沿  $x$  軸與  $y$  軸的晶格數分別為 373 與 36, 即  $IBAR=373$ ,  $JBAR=36$ , 且令  $IM1=IBAR+1$ ,  $JM1=JBAR+1$ ,  $IMAX=IBAR+2$ ,  $JMAX=JBAR+2$ , 總共的晶格數為  $373 \times 36=13428$ ; 另外, 再加一圈虛擬晶格 (Phantom cell)。初始深度以阻礙物 (寬頂堰) 左邊界為界, 分成上游初使深度  $H_{01}$  與下游初使深度  $H_{02}$ ,  $H_{01}$  將用三個值, 0.211、0.242 與 0.273 公尺; 同樣的,  $H_{02}$  也採用三個值, 0.211、0.18 與 0.12 公尺。機動黏度 (Kinematic viscosity)  $\nu$  值分別為  $0.1 \times 10^{-5}$ 、 $0.1 \times 10^{-3}$  與  $0.1 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ 。NASA-VOF2D 提供了兩個選擇, 一為是否考慮發散量修正, 若是, 以  $IDIV=1$  表之, 否則  $IDIV=0$ ; 二為是否彌補最上面表面晶格之下的表面晶格之, 由  $F \neq 1$  改為  $F=1$ ; 若是, 以  $NPACK=1$  表之, 否則  $NPACK=0$ 。此外本計畫又提供了另一選擇, 是否要強制上游邊界條件, 即任何時段計算網格的最左二行晶格都維持為原來的初始情況。

#### 四、 結果與討論

NASA-VOF2D 為了求得速度的猜測值, 故須引進時段間距  $\Delta t$ 。但若流況為定流量 (Steady flow), 只能以時段增加流況保持不變的觀點來處理。可是「保持不變」的著眼點並不適宜於針對瞬時值 (Instantaneous value), 以針對空間的平均值較為妥當。因此, 本計畫定義了  $q_{ave} = 1/(IM1-1) \sum_{i=2}^{IM1} q_i$ , 式中  $q_i$  代表各行的流量, 自計算網格的最左邊一行 ( $i=2$ ) 至最右邊一行 ( $i=IM1$ )。如圖一所示, 隨著時間  $t$  的增加  $q_{ave}$  呈遞減趨勢, 實線與虛線分別代表採用與沒採用強制上游邊界條件。若沒採用強制上游邊界條件, 則  $q_{ave}$  將會一直遞減, 甚至減為一個相當不合理的很小值。但採用了強制上游邊界條件, 則遞減變緩; 甚至可能會趨近於某

一定值, 若配合適當的計算網格下游邊界條件。目前本計畫係採用連續流出 (Continuative outflow) 為其下游邊界條件。其次, 流體體積法利用運動方程式計算下時段之猜測速度, 並修正之, 使其滿足連續方程式。今定義發散量  $DIV = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ , 式中  $x$  與  $y$  分別為水平座標軸與垂直座標軸, 對應的分量速度分別為  $u$  與  $v$ 。理論上, 所有晶格的發散量都將等於 0, 實際上只有充斥晶格才修正與疊代, 並使其值小於 0.001。但是對於表面晶格, 只利用連續方程式與剪應力消失來設定表面晶格與空晶格間的速度, 並未如充斥晶格一樣地予以修正與疊代。故本計畫採用發散量的平均值  $DIV_{ave}$  (只針對  $DIV > 0.001$  的晶格, 求其絕對值之和及其平均值) 作為判斷模擬結果好壞的指標之一。圖二為不同時刻  $t$  的  $DIV_{ave}$ 。很明顯的, 採用強制上游邊界條件的  $DIV_{ave}$  遠小於不採用強制上游邊界條件的  $DIV_{ave}$ , 故而後的模擬均採用強制上游邊界條件。

通常判斷各行晶格自由面的位置都是根據最上面表面晶格的  $F$  值, 以其值做為自由面的垂直高度, 另以該行晶格左右邊界的中心點做為自由面的水平位置。每一行晶格都可求得對應的一點  $(x_s, y_s)$ , 以代表自由面的位置, 其沿流向的連線即構成一般所謂的自由面剖面, 為一條平滑曲線。而今 NASA-VOF2D 並不採用這種方式, 改以表面晶格及其四周晶格的  $F$  值來求該行自由面的位置  $(x_s, y_s)$ , 可能落在表面晶格, 也可能落在充斥晶格。此外, 每一行晶格自由面的位置往往不只一個。因此, 自由面剖面往往不再是一條平滑曲線, 而是一條鋸齒狀折線, 如圖三至圖五所示。NASA-VOF2D 所採用的方法之優點, 除了較準確求得各行晶格自由面的位置外, 尚可標示出由多個空晶格所構成的空白區及其位置。這或許代表因流動而捲入的空氣, 即俗稱的夾氣, 尤其是高速水流, 這種現象是相當普通的。展示於圖三至圖五的自由面剖面分別代表不同的初始上游深度  $H_{01}$ , 不同的黏度  $\nu$  與不同的初始下游深度  $H_{02}$ 。這三圖的自由面剖面均不考慮發散量修正, 同時也不彌補最上面表面晶格之下其他表面晶格之  $F$  值, 即  $IDIV=0$ ,  $NPACK=0$ 。本計畫發現若採用發散量修正, 即  $IDIV=1$ , 模擬結果略受影響,  $DIV_{ave}$  值將會稍微增加。但是若彌補最上面表面晶格之下其他表面晶格之  $F$  值, 即  $NPACK=1$ , 不但會明顯地增加  $DIV_{ave}$  值, 而且有些晶格極易出現無法滿足  $courant$  條件的現象。故不採用  $IDIV=1$  與  $NPACK=1$  的選擇。如圖二所示,  $DIV_{ave}$  值隨著時間  $t$  的增加呈現相當不規則的變化。展示於圖三至圖五的自由面剖面均自取於  $DIV_{ave}$  為最小的時刻。

本段的討論先針對圖三至圖五的共同特徵, 而後再針對各圖

予以討論。這三圖的共同特徵有三。一是介於計算網格左邊界至寬頂堰上游面( $2.995\text{m} \geq x \geq 0$ )為一鋸齒狀的自由面剖面，沿流向自由面先保持水平而後再略略上升，水平段為已知的初始流況，而後的上升段系受寬頂堰阻礙的影響。自由面剖面之下並未顯示有其他的表面晶格。二是沿寬頂堰之上游面，堰頂與下游面( $3.305\text{m} \geq x \geq 2.995\text{m}$ )凝聚了甚多的表面晶格；易言之，沿這三面除了充斥晶格外，還有部分的表面晶格，只不過這些表面晶格相當零散，並未聚集成一明顯的空白區。呈現於寬頂堰上游面的表面晶格似乎不太合理，因為其附近的流速相當慢，但是呈現於堰頂與下游面的表面晶格是相當合理的，因為其附近的流速相當快，再加上水注入的影響。三是自寬頂堰下游面至計算網格右邊界( $4.8\text{m} \geq x \geq 3.305\text{m}$ )的自由面剖面之走向先下降，而後上升，最後趨近於初始下游深度  $H_{02}$ 。自由面下降係來自堰頂而下的流速增快，而上升是受制於計算網格右邊界條件為自由出流與初始下游深度的影響。此外，在緊接下游面很明顯地形成了由數個表面晶格所圍成的空白區，略顯夾氣現象。除了上述的共同特徵外，個別的特徵討論於下。圖三展示不同的初始深度  $H_{01}$  對自由面剖面的影響。初始上游深度  $H_{01}=0.211\text{m}$  與  $0.242\text{m}$  時；相當於自堰頂起算的水位分別為寬頂堰寬度的  $0.1$  與  $0.2$ 。圖三顯示這兩種初始上游深度均於堰頂形成一斜率幾乎為水平的自由面，寬頂堰流的主要特徵就是於堰頂必須有一水平段的自由面。但是，若初始上游深度提高為寬頂堰寬度的  $0.3$  時，相當於  $H_{01}=0.273\text{m}$ ，水平的自由面消失了，變為一路傾斜的自由面，有一點類似銳角堰流的上自由面。當初始上游深度  $H_{01}=0.211\text{m}$ 、 $0.242\text{m}$  與  $0.273\text{m}$  時， $DII_{min}$  呈現為最小分別發生於  $t=0.8809$ 、 $0.7850$  與  $0.5341$ ，單位為秒，對應的最小  $DII_{min}$  值分別為  $4.055703$ 、 $2.755351$  與  $3.908129$ ，單位為  $1/s$ 。從上面三個不同初始上游深度的最小  $DII_{min}$  值，以及上述寬頂流自由面剖面所具有的特徵看來，初始上游深度  $H_{01}=0.242\text{m}$  時的流況最接近寬頂堰。所以，圖四的  $H_{01}$  改以  $0.242\text{m}$  為例子以討論。參閱圖四，當黏度  $\nu=1.0 \times 10^{-4}$ 、 $1.0 \times 10^{-4}$  與  $1.0 \times 10^{-2}$  時，單位為  $\text{m}^2/\text{s}$ ， $DII_{min}$  為最小分別發生於  $t=0.7850$ 、 $1.1758$  與  $0.156$ ，單位為秒，對應的最小  $DII_{min}$  值分別為  $2.755351$ 、 $2.729849$  與  $3.876683$ ，單位為  $1/s$ 。以圖四自由面剖面的趨勢與分佈而言，黏度的影響非常小。另從上面三個不同黏度的最小  $DII_{min}$  值而言，黏度太小與太大都不適當。目前，本計畫只是探討流體體積法應用寬頂堰流的初步研究，故只採用三個不同定值的黏度。確實情況有待而後採用更精緻的阻力公式。由於  $\nu=1.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$  時的最小  $DII_{min}$  小於其他兩種不同  $\nu$  值的結果。故圖五的  $\nu$  設為  $1.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ 。參閱圖五，當初始下游深度  $H_{02}=0.211$ 、 $0.180$  與  $0.120$  時，單位為  $\text{m}$ ， $DII_{min}$  出現最小分別發生於  $t=0.64$ 、 $0.538$  與  $1.1758$ ，

單位為秒，對應的最小  $DII_{min}$  值分別為  $1.817934$ 、 $1.962438$  與  $2.729848$ ，單位為  $1/s$ 。初始下游深度  $H_{02}$  為控制下游流況的已知邊界條件，並不像前述的影響因子，可以針對最小  $DII_{min}$  值予以討論與篩選。不過最小  $DII_{min}$  值隨著  $H_{01}$  與  $H_{02}$  的差距之增加而遞減是可理解的，差距愈小，均勻程度愈大，則最小  $DII_{min}$  值就愈小。初始下游深度  $H_{02}=0.211\text{m}$  時，其差距遠小於其他兩種初始下游深度，故其最小  $DII_{min}$  為三種情況中的最小。

圖六與圖七分別為寬頂堰上游與下游的速度分佈，兩圖都含蓋部分堰頂。箭頭長度標示大小，其指向為流向，所示的位置為晶格中心。最上面的箭頭位於表面晶格，其上為空氣(空晶格)，但速度並不等於零。以趨勢與傾向而言，示於圖六與圖七的速度分佈，其方向是相當合理的，與一般的認知頗吻合。如圖六所示，在堰之上游，速度大小由底沿高度方向逐漸增加，同時流向也逐漸由水平變為傾斜，其變化幅度隨著接近堰上游面的距離之減小，而逐漸擴大與明顯。一旦流入堰頂，流向又漸漸恢復為水平，同時速率也確實增加了相當大的幅度，這是由於深度減少了好多。如圖七所示，越過寬頂堰之下游端點後，靠近堰頂的水，其流況頗類似自由跌水(free overfall)，沿堰之下游面向下注入，碰到渠底後改為快速水平流(有一點像射流)，最後遇到流速較慢的下游，又折回形成一渦流(vortex)。另外，遠離堰頂的水，其流況倒類似於堰流(weir flow)，自堰頂向下傾斜流入，並與上述折回的渦流混合，故其附近的的分佈極為複雜，其範圍大致為  $3.44\text{m} \geq x \geq 3.34\text{m}$ ， $0.13\text{m} \geq y \geq 0.07\text{m}$ ，參閱圖七。

圖八至圖十為位於寬頂堰右上角、右邊與遠離寬頂堰之下游等三處的等發散量線之分佈圖。發散量以  $DII (= \partial u/\partial x + \partial u/\partial y)$  表之，其值愈大與愈小均表示對應之晶格四邊，其速度愈不符合連續方程式。等發散量線共分成十五等級，自 '1' 到 'F'，其中以 '1' 為最小，而以 'F' 為最大，分別等於  $-35.5581$  與  $22.8481$ ，單位為  $1/\text{sec}$ ，如圖八至圖十的附表所示。圖八顯示以絕對值計，最大發散量有兩個中心，其位置分別為  $x=3.15503\text{m}$ 、 $y=0.21507\text{m}$  與  $x=3.05\text{m}$ 、 $y=0.22526\text{m}$ ， $|DII|$  值以中心點為最大，由此向四周遞減，大致減為等級 'A' 或 '9'。除了右上方外，另一較顯著的中心就是在寬頂堰右邊，其位置為  $x=3.40767\text{m}$ 、 $y=0.1218\text{m}$ ，如圖九所示，但是最大  $|DII|$  只等於  $18.8706$ ，小於右上方的最大  $|DII|$ 。此外，遠離寬頂堰之下游尚呈現數個中心，大部分當  $p$  位於表面晶格(並不是每一個表面晶格都有)，最大  $|DII|$  都比較小，減為  $6.16063$  單位為  $1/\text{sec}$ ，其等發散量線之分佈如圖十所示。由於繪圖並不是取所有的晶格，大致只取全

部晶格的八分之一，所以示於圖八至圖十的數據較稀疏，其連線較容易成折線。

計算結果顯示除了寬頂堰之附近，其餘的地方均呈現靜水壓分佈。圖十一與圖十二為寬頂堰上游面、寬頂堰下游面的等壓線之分佈，其曲線之走向足以顯示壓力分佈相當複雜並非線性型分佈，然而，在堰底上游的附近，等壓線幾乎成等距垂直走向，即其附近的壓力分佈沿流向  $x$  幾乎為線性型變化。另外，堰頂上方也略呈等距水平走向，故其壓力也幾乎為靜水壓分佈，相當符合寬頂堰的特徵。

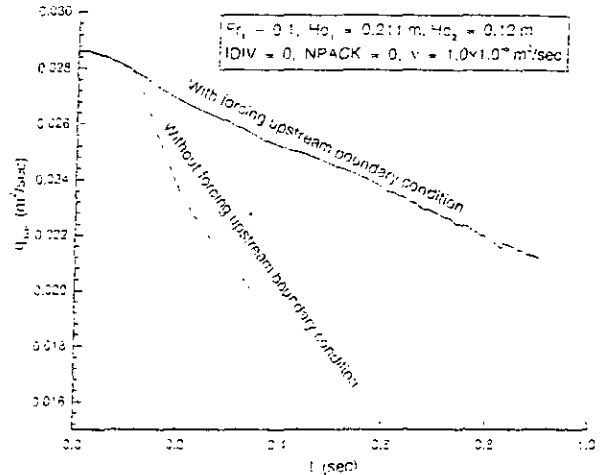


Fig. 1 Variation of  $q_{ave}$  with  $t$

### 五、參考文獻

Nichols, B.D., Hirt, C.W. and Hotchkiss, R.S., "SOLA-VOF: A solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries", Los Alamos Scientific Laboratory report LA-8355, 1980.

Torrey, M.D., Cloutman, L.D., Mjolsness, R.C. and Hirt, C.W., "NASA-VOF2D: A Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces", Los Alamos National Laboratory report LA-10612-MS, 1985.

Subramanya, K., Flow in Open Channel, Tata Mc Graw-Hill Pub. Co. Limited, 1997.

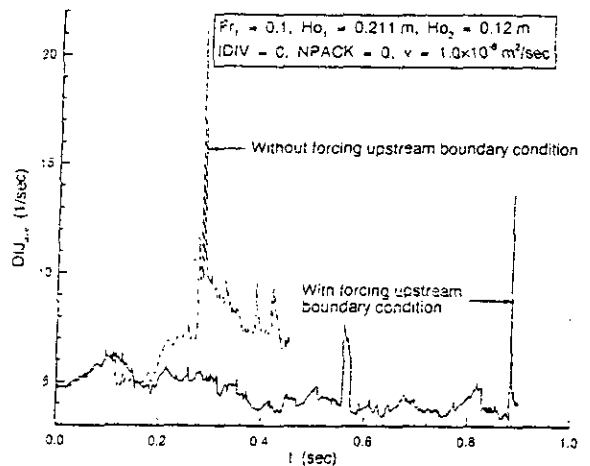


Fig. 2 Variation of  $DIJ_{ave}$  with  $t$

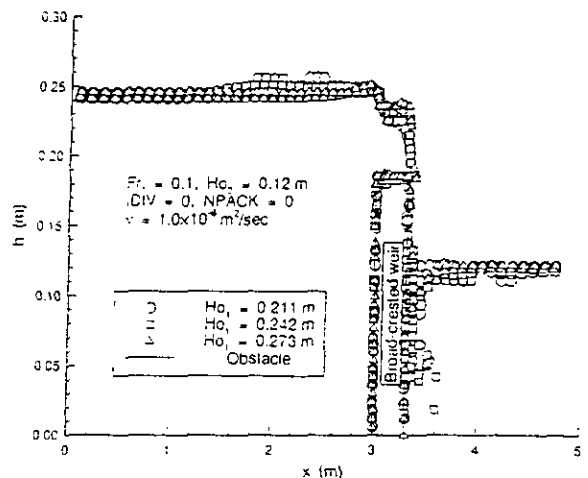


Fig. 3 Free Surface Profile with Various  $Ho_1$

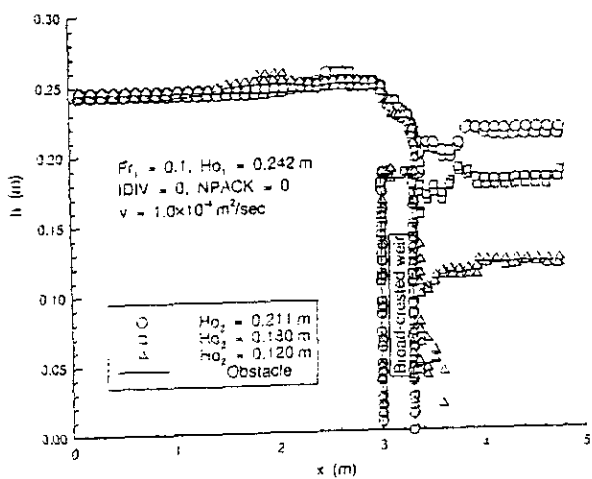


Fig. 5 Free Surface Profile with Various  $Ho_2$

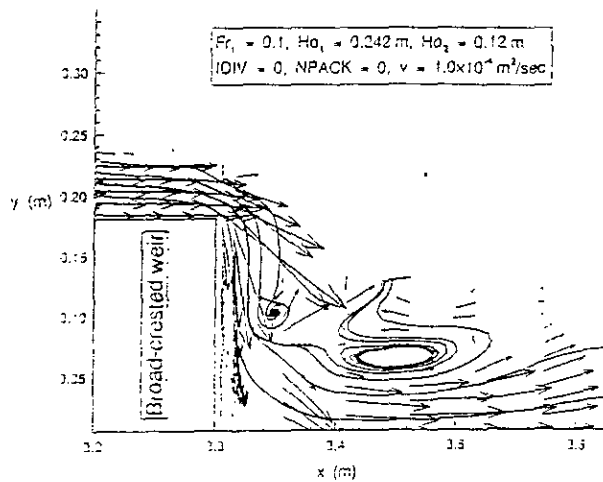


Fig-7 Weir Downstream Velocity Profile

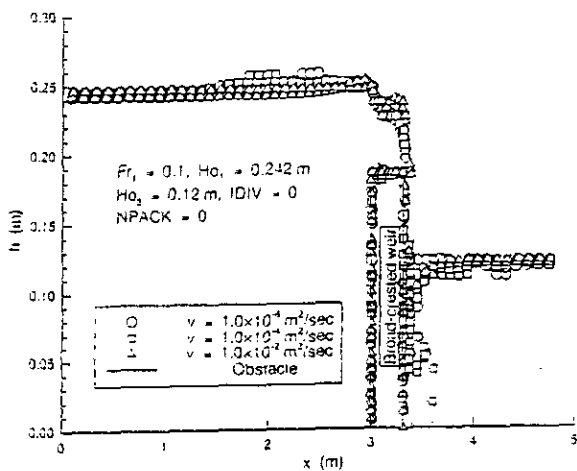


Fig. 4 Free Surface Profile with Various Viscosity  $v$

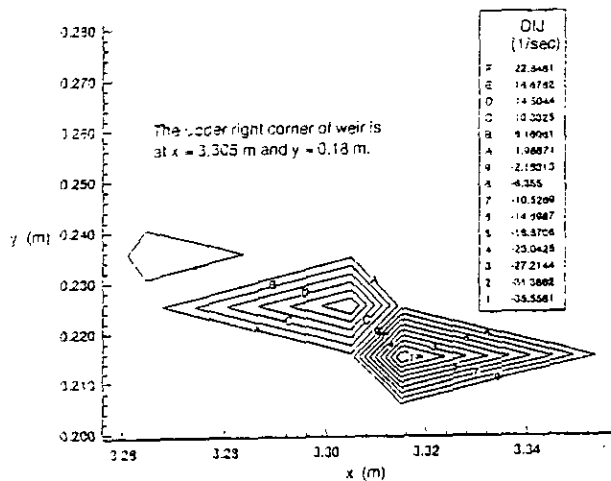


Fig. 8 Contour for DIJ Near Upper Right Corner of Weir

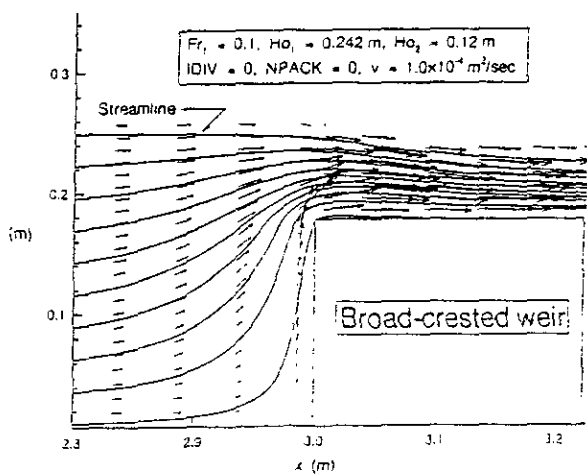


Fig-6 Weir Downstream velocity field

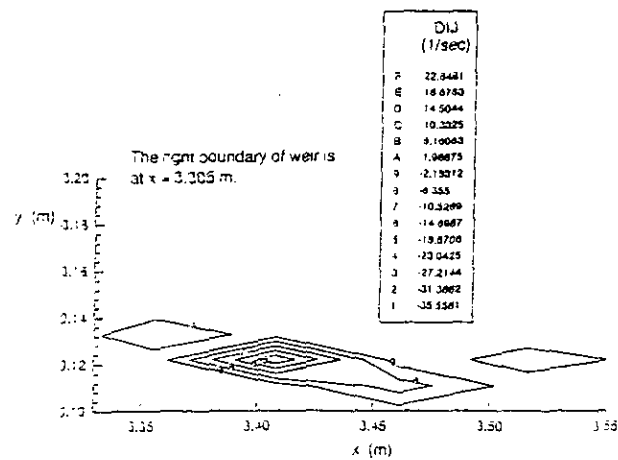


Fig. 9 Contour for DIJ Near Right Boundary of Weir

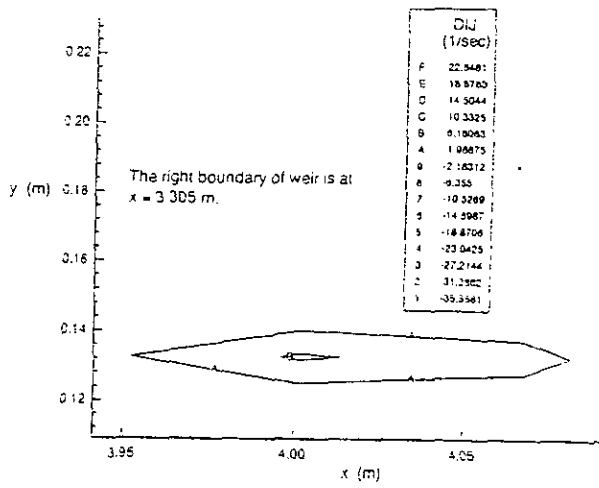


Fig. 10 Contour for D1J Downstream of Weir

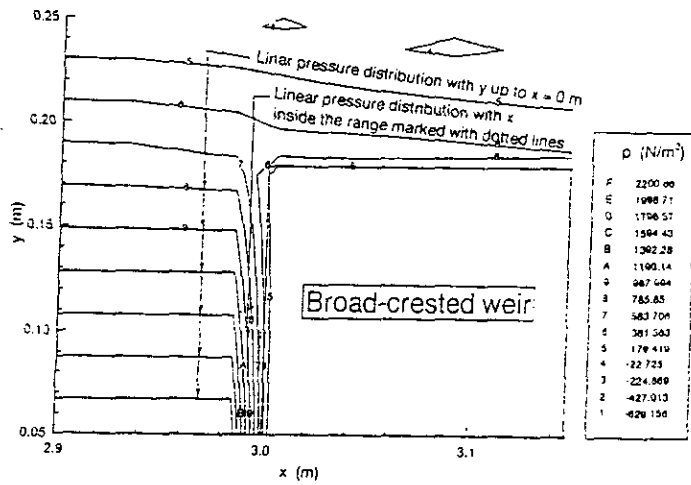


Fig. 11 Contour for Pressure  $p$  Upstream of Weir

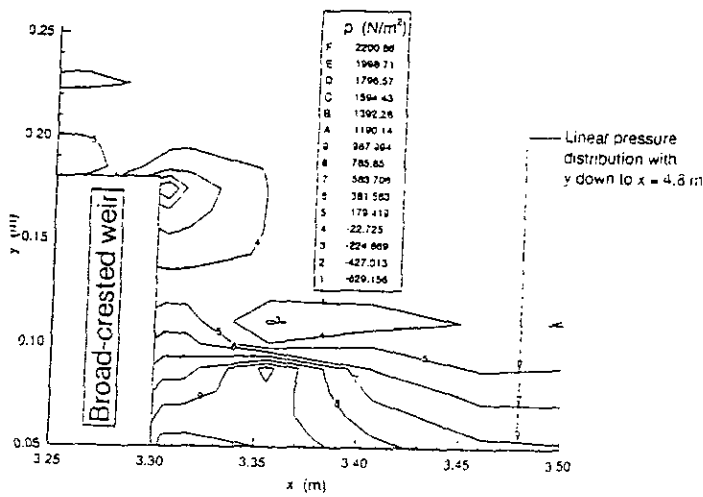


Fig. 12 Contour for Pressure  $p$  Downstream of Weir