拉普拉斯轉換有限差分法應用於地層下陷

Application of Laplace Transformation Finite Difference Method to Land Subsidence

計畫編號：NSC 89-2211-E-032-040

執行期間：民國 89 年 08 月 31 日至民國 90 年 07 月 31 日

主持人：施清吉 淡江大學水資源及環境工程學系 教授

共同主持人：

一、 中文摘要（關鍵詞：拉普拉斯轉換有限差分法，地層下陷，擴散方程式）

本研究根據擴散方程式加上一代表抽水量的「源」(Source) 所得到的地層下陷量的非線性微分方程式，使用拉普拉斯轉換有限差分法 (Laplace Transform Finite Difference Method，LTFD) 來計算方程式的解。

拉普拉斯轉換有限差分法是一種新的數値方法，其被發展來解決通過多孔介質 (Porous media) 之暫態流 (Transient flow) 的偏微分方程式。拉普拉斯轉換有限差分法係利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform)，將有關時間的微分項轉換至拉普拉斯空間 (Lapalce space) 上，消掉了對時間的微分。在借助拉普拉斯空間及數値方法來反轉那些轉換於空間中所得到的「解」〔Moridis et al.,1991〕。所以拉普拉斯轉換有限差分法提供的「解」，對時間而言是半解析的 (Semi-analytical)；但對空間而言爲數値的 (Numerical)。對於一般傳統的數値方法，在達到所考慮的時刻 t 前，往往必須經過非常多次累積計算，而每一次只增加一個時間間距 Δt，這不但費時也更容易造成累積誤差，影響到了「解」的準確性 (Accuray) 及穩定性 (Stability)。而在拉普拉斯轉換有限差分法中，不但避免了時間微分項所造成的影響，只要一個時間間距便可得到任意時間的解，而且最多只須 8 次矩陣的反轉換便可求得更精確的答案。

英文摘要（Key word：Laplace Transformation Finite Difference method（簡稱爲 LTFD），Land Subsidence，Diffusion Equation）

This study is based upon the nonlinear difference equation representing the land subsidence coupled with a "source" to denote the pumping discharge, and the Laplace transformation finite difference method is adopted for numerical calculations.

A new numerical method, the Laplace transformation finite difference (LTFD) method, was developed to solve the partial differential equation (PDE) of transient flows through the porous media. The LTFD method provides a solution which is semi-analytical in time and numerical in space by solving the discretized PDE in the Laplace space and numerically inverts the transformed solution vector. The effects of the traditional treatment of the time derivative on accuracy and stability are rendered irrelevant because time is no longer a consideration. The problem in standard FD format may require several hundred time steps and between the initial condition

and the desired solution time . The LTFD method requires only one time step and on more than eight matrix inversions to achieve a more accurate result.

二、 計畫緣由與目的

數值模式採用拉普拉斯轉換有限差分法，是一種較新的數值差分法。其法乃利用拉普拉斯轉換先將時間的微分項轉換到拉普拉斯空間（Laplace space）而後再進行差分。優點之一是把可能的截尾誤差（Truncation error）和遞迴誤差（Round-off error）侷限在空間座標，減少了誤差的累積。最後再運用統計的方法轉回到原來的座標空間上。

一般傳統的數值方法須分別對空間座標和時間離散。在計算某時刻 t 的現象時，必須經過一連串的時間間距來趨近，直到時間間距總和等於所求的時刻。本文中所採取的拉普拉斯有限轉換差分法，在對於空間座標的離散方面同樣採用傳統的有限差分法；但在時間方面則利用拉普拉斯轉換去掉時間的微分項，改以拉普拉斯空間自變數 s 代替時間 t，最後再利用統計方法轉回在拉普拉斯空間下得到的「解」，所以此法可以直接計算任意時刻的現象。

三、 研究方法與成果

研究方法

解析解　採取〔Polubarinova-Kochina, 1962；施, 1997(1)； Carslaw, 1969；Amosov,1937；施，1998〕

$$H' = \frac{w'_p R}{D_0} F(\xi,\tau)$$

$$F(\xi,\tau) = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)J_1(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda - \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)J_1(\lambda)}{\lambda^2} \exp\left(-\tau\lambda^2\right) d\lambda$$

式中

$$\tau = \frac{D_0 t}{R^2}$$

$$\xi = \frac{r}{R}$$

其中，r 爲極座標之半徑，R 爲抽水井之管徑。J_0與 J_1爲第一類 Bessel 函數，右下註腳爲函數之階次(order)。

數値解　拉普拉斯轉換有限差分法由四個步驟所組成。

1.　偏微分方程式的拉普拉斯轉換：

將欲分析的偏微分方程進行拉普拉斯轉換，即

$$\Psi(s,r) = L\{H'(t,r)\} = \int_0^\infty e^{-st} H'(t,r) dt$$

式中 s 爲 Laplace 空間下的自變數，相對應於原來空間下的自變數時間 t。H' 則與 Ψ 相對應，分別爲原來空間（t,r）與拉普拉斯空間（s,r）下的因變數。經此步驟後，空間座標始終保持不變，而時間 t 已由 s 取代。

2.　Laplace 空間下的有限差分系統（FD scheme）：

轉換後的偏微分方程式，只包含對空間座標 r 的微分項，可以利用一般傳統的有限差分技巧予以離散化。本文採用非均勻格點，如圖一所示。此種格點系統係在變化極快的區域，以更小的空間間距來離散，不必如等間距格點系統般的，必須增加格點才能較準確的模擬。

3.　拉普拉斯空間的「解」：

空間座標離散化後，將系統中全部有限差分式整理成爲一矩陣形式如下：

$$\{M\}\{\Psi\} = [D]$$

式中 $\{M\}$爲係數矩陣；$\{\Psi\}$爲地層下陷量經轉換後在拉普拉斯空間下的未知向量；$[D]$則爲已知的常數向量。其中 $\{M\}$和 $[D]$的計算都與 Laplace 空間下的變數 s 有關，而 s 的定義可由 Stehfest[1970]的演繹法（Algorithm）中第一部分得知，即

$$s = \frac{\ln 2}{t} i \ , \qquad i = 1,2,\text{K}\ ,N_S$$

其中 N_S爲演繹法的累加次數，且須爲一偶數，對於每一個 N_S値都會產生一組對應之解向量$\{\Psi\}$，即

$$[\Psi]_i = [\Psi(s_i)] = \{M(s_i)\}^{-1}[D(s_i)] \ , \ i = 1,2,K,N_S$$

所以欲得到在時間 t 的解，$[H']$，必須對所模擬的方程式解 N_S 次始可得到。

4. 拉普拉斯「解」的數值反轉換：

在任意時刻 t 的解，$[H']$，可以利用 Stehfest[1970]的演繹法將上一步驟中得到之 Laplace「解」，$[\Psi]_i$，予以數值轉換而得到。其過程可以下列方程式來描述。

$$[H'(t,r)] = \frac{\ln 2}{t}\sum_{i=1}^{N} V_i[\Psi(s,r)]_i$$

式中

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \times \sum_{k=[(i+1)/2]}^{\min(i,N/2)} \frac{k^{\frac{N}{2}}(2k)!}{(N/2-k)!k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!}$$

成果 數值模式的計算例本文採用雲林地區大溝村的數據來估計，不同的是本文在抽水時間 t 上採取比較長的的 3 個月來估計。也比較了一些參數值的變化：其中有擴散係數 D0=253.98(m^2/s)，採 100～1500 為比較範圍、孔隙率 n=0.3846，採 0.1～0.4、抽水速率 wp=2.36 (m/sec)，採 1～5 倍與透水係數 K=0.01 (m/sec) 採 $1\sim10^{-5}$。不變的參數值計有：抽水係數 No=6.070257314、土壤壓縮係數 α=1.0E-8 m^2/N、水的壓縮係數 β=0.4651163E-9 m^2/N、孔隙壓 p=141.69215 N/m^2、抽水管半徑 R=0.1m、水的單位重 γ=9810 N/m^3、蓄水係數 S=5.0E-4 與通流係數 T=1200 m^2/d，以及由蓄水係數 S 與通流係數 T 所估算出的最大影響半徑 r=25000m。分別討論參數值改變的時候對於地層下陷的影響。

四、 結果與討論

數值解

模擬結果繪於圖二～圖十。首先必須說明的是：在許多不同格點間距計算下發現能真正影響曲線趨勢，都是以距離抽水中心點附近的格點間距為主，所以圖二～圖三表示了總共 5 組的非均勻格點來模擬，每組分別只有兩種格點間距，為距離水井中心點 30 公尺之內的內部格點與 30 公尺至最外緣邊界的外部格點兩種。分別為第一組：0.5 m、500 m；第二組：0.45 m、300 m；第三組：0.4 m、200 m；第四組：0.35 m、150 m與第五組：0.3 m、100 m。圖二與圖三分別為大範圍（0 至 2.5*10^4公尺）與局部範圍（0 至 100 公尺）之沈陷情況。而特別的是，當所有組別的內部格點間距都調整為一樣時，5 組曲線的走勢居然接近重合，如圖四～圖五所示。同樣的，圖四與圖五分別為大範圍（0 至 2.5*10^4公尺）與局部範圍（0 至 100 公尺）之沈陷情況。故本人可以大膽的推斷在數值模擬上我們應著重於找出距離水井中心點前一小段距離適當的的格點間距。於是再將原先 5 組曲線重新與解析解作一比較，可以發現的是解析解的走向與第三組，也就是距中心點 30 公尺格點為 0.4 m的曲線十分雷同，如圖六所示。

而第一段內部格點的長度距離中心點取 30 公尺是否適合呢？圖七將此段間距由 5～100 公尺做了比較，發現了雖然以不同的距離做比較，但其實造成的影響不大，放大觀察局部範圍後，以 30 公尺與解析解最為接近。雖然在此點上為與外部格點相連時並不為圓滑，如圖三與圖五在 100 公尺銜接處的情形，乃因為格點間距相差太大的關係，並且曲線還可能會產生震盪，但是相對以大尺度大範圍來觀察時，並不會有太大的影響。故後面的數值模擬，我們便以此第三組曲線、且第一段距離為 30 公尺的格點模式作為基準。圖八～圖十一則為各項重要參數對於地層下陷量之影響。

其中在比較擴散係數與透水係數時，因為影響垂直軸的地層下陷量變化太大，為了容易觀察，故圖表採取半對數繪成，分別展示與圖八與圖九。觀察曲線的走向，在最後有忽然下降的趨勢，代表了在接近最遠邊界的時候，地層下陷量 H' 趨近於 0，即相當於沈陷量很小很小時，對數的特有現象。

拉普拉斯轉換有限差分法的準確度雖然會隨著 N_S 值的增加而增加，但是由 Stehfest [1970]的研究指出了此法的精度在最初會隨著 N_S 值的增加而呈線

性的增加，但隨後卻由於遞迴誤差（Round off error）的影響，使得精度隨著 N 值的增加而呈線性的遞減。在 Stehfest 測試了 50 組方程式後，得到了最佳化為 $N=8$（單精度有效位數為 8）以及 $N=18$（雙精度有效位數為 16）。根據 Moridis [1987]的研究及本人的測試，N 值在 8～12 時對於拉普拉斯轉換有限差分法的精度影響很小，故本文中採用的 N 值為 10。

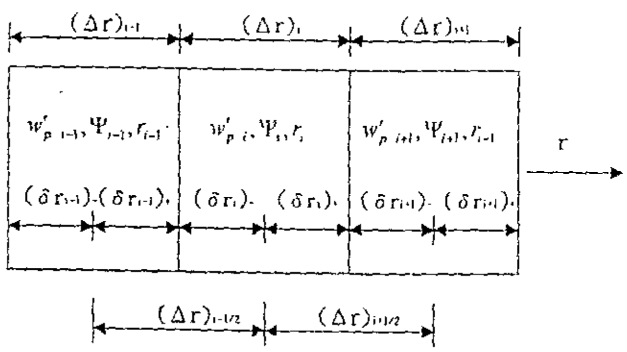
採用非均勻格點系統的拉普拉斯轉換有限差分法結果充分說明了已經消除了以往有限差分法在準確度以及穩定性上的問題。不但誤差不易累積，又可以直接計算任意時刻的地層下陷情況。因此拉普拉斯轉換有限差分法是一個值得推廣應用的數值方法。

五、 參考文獻

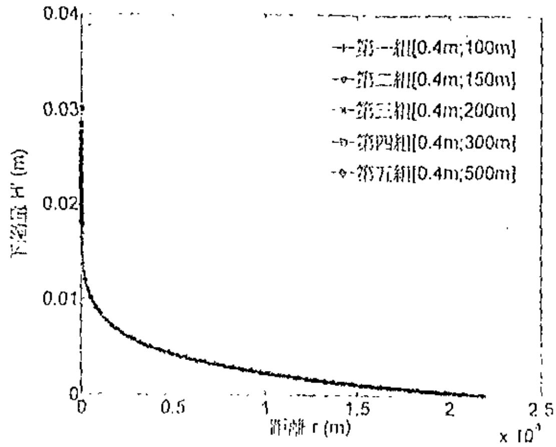
1. Al-Khafaji and Andersland, "Geotechnical engineering & soil testing", Saunders College Publishing Fort Wouth, 1992.
2. A. R. Mitchell, "Computational methods in partial differential equations", 1969.
3. Bruce R. Munson, Donald F, Young and Theodore H. Okiishi, "Fundamentals of fluid mechanics", John Wiley & Sons, Inc., 1990.
4. Curtis F. Gerald and Patrick O. Wheatley, "Applied Numerical Analysis", 5th Edition, 1994.
5. David Keith Todd, "Ground water hydraulics", Wiley New Your, 1959.
6. Genevi`eve Se`gol, "Classic groundwater simlutions: Proving and improving numical models", Bechtel Group, Inc., San Francisco, California, pp.11-75, 1994.
7. Geroge J. Moridis and Donald L. Reddell, "The Laplace Transform Finite Difference method for simulation of flow through porous media", Water Resource Research, Vol.27. No.8. pp.1873~1884, August 1991.
8. G. N. Smith, "Elements of soil mechanics for civil and mining engineers", 3rd Edition Metric, Crosby Lockwood Staples London, 1974.
9. H. S. Carslaw, "Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids, 2nd ed., p.152, 1921".
10. Jacob Bear, "Dynamics of fluids in porous media", Dover Publications, Inc, New York.
11. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, "Jandbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables", Dover Publication, New York, 1965.
12. Moridis, George Julius, "An implicit two-phase flow numerical simulator for modeling secondary water recovery by air injection", Ph.D. Texas A & M University, 1987
13. Recoe Mass Company, "Handbook of ground water development", Wiley New York, 1959.
14. Wilhelm Magnus and Fritz Oberhettinger, "Formulas and theorems for the functions of mathematics physics", Chelasea Publishing Company, New York, N.Y., 1954.
15. W. L. Schroeder, "Soil in construction", 3rd Edition. Wiley New York, 1984.
16. 周志芳，"地下水抽取引起地盤下陷之研究"，淡江大學水資源及環境工程研究所論文，台北，1984。
17. 施清吉，"地盤下陷與超額地下水抽取量間之關係分析"，土木水利季刊，第三卷第二期，1976。
18. 施清吉，"地盤下陷之漸解"，中國農業工程學報，第二十九卷第二期，1983。
19. 施清吉，"地盤下陷與超額抽取地下水關係之研討"，經濟部水利司，1993。
20. 溫理仁，"地下水利用與地盤下陷防止政

策”，地下水調查分析與保育管理研討會論文集，
1992。
21、劉賢淋，”大地工程學(一)(二)(三)”，天佑
出版社，1994。

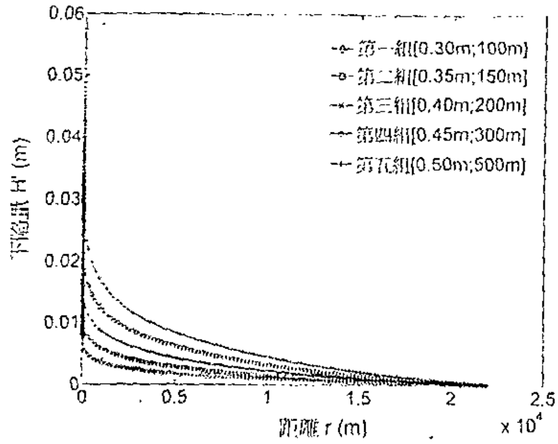
六、圖表



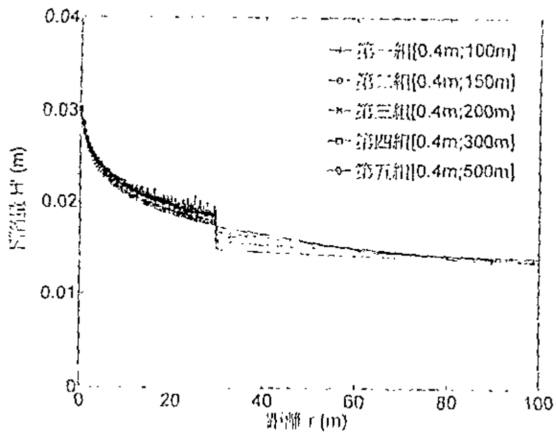
圖一　格點示意圖



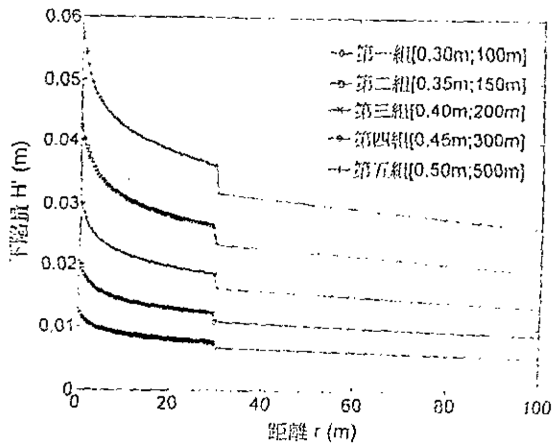
圖四　數值解比較-2(大範圍)



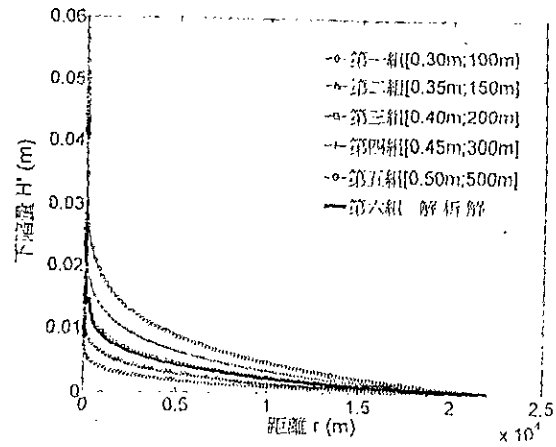
圖二　數值解比較-1(大範圍)



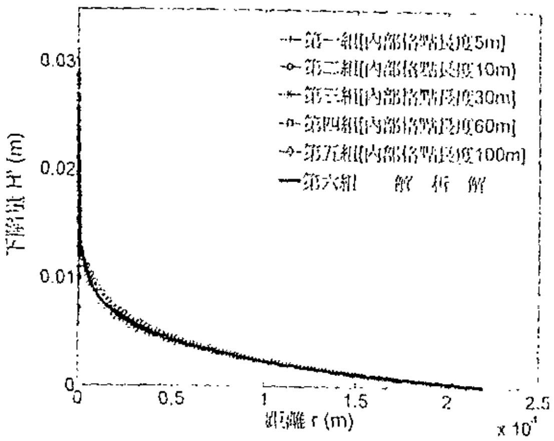
圖五　數值解比較-2(局部範圍)



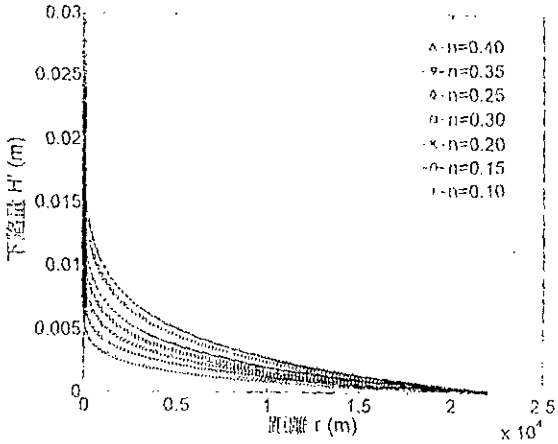
圖三　數值解比較-1(局部範圍)



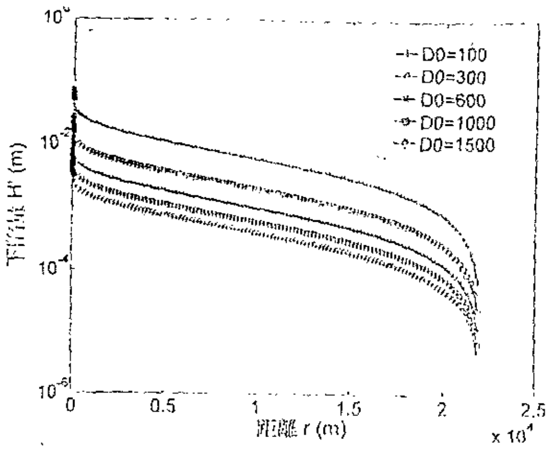
圖六　解析解與數值解之比較



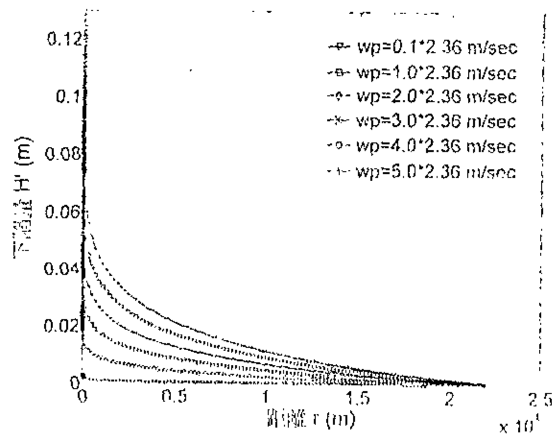
圖七 數值解 格點間距改變點之比較



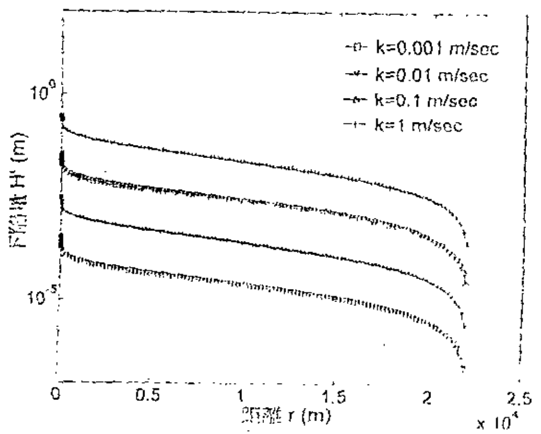
圖十 n 值對地層下陷的影響



圖八 D0 值對地層下陷的影響



圖十一 wp 值對地層下陷的影響



圖九 K 值對地層下陷的影響