

流體體積法應用於水躍之探討

Investigation on Application of the VOF Method in a Hydraulic Jump

計畫編號：NSC 88-2218-E-032-006

執行期限：87年08月01日至88年07月31日

主持人：施清吉 淡江大學水資源及環境工程學系 教授

共同主持人：

一、中文摘要 (關鍵詞：水躍、VOF 方法、自由面)

本研究利用 NASA-VOF2D 法模擬水躍 (hydraulic jump)。因水躍為一明顯的亂流現象，故運動方程式採用雷諾運動方程式 (Reynolds equations of motion)，式中，渦度黏滯係數 ϵ_{tx} 、 ϵ_{ty} 的計算採取 Fisher 的經驗公式，由深度、斷面平均速度與模擦因子等值求得。NASA-VOF2D 法為一採取尤拉格點 (Eulerian grid) 的有限差分 (finite difference) 數值技巧，以流體體積比函數 F 展示自由面之所在。流體體積比函數的處理並不採用一般的數值技巧，而是利用捐贈接受通量近似法 (Donor-Acceptor Flux Approximation Method) 以能夠更符合自由面所需的條件。本文採用 Subramanya 與 Rajaratnam 的實驗結果為計算自由面的比較對象，前者為一時間平均的自由面，非瞬時自由面；而後，再根據兩者的差距變化較小與較穩定時，取三個時刻的模擬結果之平均值予以分析，分析的項目有：躍後水深、水躍長度、表面漩渦長度、自由面的變化與漩渦的形成。計算結果發現數值模擬所得的躍後水深與理論接近，但數值模擬所得的水躍長度與表面漩渦長度有明顯過長的情形。另外，較大的 ϵ_{tx} 值模擬而得的自由面變化較小、較穩定，而 Fr_1 值較大的自由面變化較大。模擬中本文也能展現不同時段漩渦的形成與變化，頗符合前人結果。

英文摘要 (keywords : hydraulic jump, VOF method, free surface)

In this study the method of NASA-VOF2D is adopted to simulate a hydraulic jump that is essentially a turbulent flow. Thus, the Reynolds equations of motion are used, in which values of eddy viscosities ϵ_{tx} and ϵ_{ty} are calculated from the Fisher's empirical formula based the flow depth, the sectional mean velocity and the friction factor. The method of NASA-VOF2D is of finite difference scheme based upon the Eulerian grid with a flow volume function F to locate the free surface; the treatment of the flow volume function is utilized by a Donor-Acceptor Flux Approximation method in stead of the commonly used finite scheme. Simulated free surfaces are compared with the Subramanya and Rajaratnam's empirical results which are time-averaged rather than instantaneous. Numerical results at three steps with rather small deviations of the comparison of the free surface are averaged and are analyzed further, items of which are the conjugate depth, lengths of the hydraulic jump and the surface roller, variation of the free surface and the formation of the vortex. Results of calculated conjugate depth are in

good agreement to the theoretical prediction, while lengths of the hydraulic jump and the surface roller are remarkably longer. In addition, the simulated free surface with large value of ϵ_{α} will result in a small variation of deviation as compared with the above empirical results. Furthermore, the present investigation does display the formation and evolution of vortexes, which are coincided in tendency with previous results.

二、計畫原由與目的

水躍的發生是當流況由超臨界流 (supercritical flow) 轉變為次臨界流 (subcritical flow)。在此過程中會發生水位突升、表面漩渦 (surface roller) 產生、強大的混合、空氣被捲入水中與能量消散等現象。也正因這些特性，水躍常被用作來消能、混合化學物品、打氣或用以提高下游水位。其中最常被利用的是作為溢洪道、堰與閘門等水工結構物下游消能之用。本文利用 NASA-VOF2D 來模擬水躍，因水躍為一明顯的亂流現象，故運動方程式採用雷諾運動方程式 (Reynolds equations of motion)，式中，渦度黏滯係數 ϵ_{α} 、 ϵ_{β} 的計算採取 Fisher 的經驗公式，由深度、斷面平均速度與摩擦因子求得。依此模擬水躍，探討模擬結果之好壞。

三、研究方法與成果

研究方法 「NASA-VOF2D」其主要設計為模擬含有自由面 (free surface) 的不可壓縮二維流的流況 (incompressible two-dimensional flow)。其包括四大步驟：首先是構建問題。第二步驟為利用沿 x 與 y 軸的雷諾運動方程式分別求得下時段的速率，兩運動方程式各含一深度平均渦度平均黏滯係數 (eddy viscosity coefficient) ϵ_{α} 與 ϵ_{β} ；所採用的公式為

$\epsilon_{\alpha} = 0.45hU^*$ 與 $\epsilon_{\beta} = 0.067hU^*$ ，另外還分析了兩個 ϵ_{α} 值，即 $\epsilon_{\alpha} = 0.20hU^*$ 與 $\epsilon_{\alpha} = 0.80hU^*$ ，式中 U^* 為剪力速度，h 為水深。另一方面， $U^* = \sqrt{f/8}U$ ，式中 f 為摩擦係數，U 為斷面平均係數。上述渦度平均黏滯係數即以摩擦係數間接求得。第三步驟為利用壓力迭代技巧，對第二步驟中所計算出來的下時段暫時速度加以迭代與修正使之滿足連續方程式。至於第四步驟則是以流體體積函數 F 來決定自由面，為了對自由面做一個良好的定義，NASA-VOF2D 對於函數 F 的數值演譯方法並不採用一般的數值方法，而是採用捐贈接受通量近似法 (Donor-Acceptor Flux Approximation Method)，採用此法的原因是為了能夠處理下面三點：(1) 能明確的定義出自由面，(2) 避免負值的捨去誤差，以致數值擴散而產生不合乎物理現象的結果，(3) 自一晶格輸入其他晶格的流體與空白不超過其本身所擁有的。這正是 NASA-VOF2D 的特點。

成果 上游福祿數 Fr_1 共計有 2.0、2.5、3.0、3.5、4.0、5.0、6.0 及 7.0 八種，而 ϵ_{α} 共有三種， $\epsilon_{\alpha} = 0.20hU^*$ 、 $\epsilon_{\alpha} = 0.45hU^*$ 及 $\epsilon_{\alpha} = 0.80hU^*$ ，所以總共分析了 24 種情況。摩擦因子根據 Karman-Prandtl eq. 給定。網格採用非均勻網格並採用了兩種不同的網格，在此將此兩種不同的網格，分別稱之為網格 A 與網格 B。這兩種網格的晶格數 (包含虛擬晶格) 皆為 72 (行) × 27 (列) = 1944 個，但網格 A 中，最小的 δx 值位於 $x=2.0$ (m) 處 (第 21 行)，其值為 0.08 (m)，上游福祿數等於 2.0、2.5 與 3.0 的情形使用此種網格，而網格 B 中的最小 δx 值位於 $x=10.0$ (m) 處 (第 21 行)，其值為 0.5 (m)，上游福祿數等於 3.5、4.0、5.0、6.0 與 7.0 的情形使用此種網格。本文採用 Subramanya 與 Rajaratnam 的實驗結果為計算自由面的比較對象，前者為一時間平均的自由面，非瞬時自由面；而後，再根據兩者的差距變化較小與較穩定時的模擬結果予以分析，模擬結果

計有：躍後水深、水躍長度、表面漩渦長度、自由面的變化與漩渦 (vortex) 的形成。

四、結果與討論

1. 水躍長度

本文採用 Bradley 與 Peterika 的實驗結果來比較計算水躍長度。表 (1) 為水躍長度相對百分比，由表中可發現數值模擬的水躍長度比起 Bradley 與 Peterika 的實驗結果所推測的有過長的現象，而且最少都超過 2 倍以上。另外亦可發現 $\varepsilon_{\alpha}=0.20hU^*$ 的情況中所得的水躍長度為最長， $\varepsilon_{\alpha}=0.45hU^*$ 的情況次之， $\varepsilon_{\alpha}=0.80hU^*$ 最小。這意味著或許提升 ε_{α} 可以使數值模擬得到較好的結果。

2. 表面漩渦長度

由表 (2) 與圖 (1) 可知數值模擬而得的表面漩渦長度比起 Rouse 等人所作的結果有過長的現象，而且福祿數越大則差距亦越大。另外由表 (2) 與圖 (1) 中也不難發現 $\varepsilon_{\alpha}=0.20hU^*$ 的情形中所得的表面漩渦長度為最長， $\varepsilon_{\alpha}=0.45hU^*$ 的情況次之， $\varepsilon_{\alpha}=0.80hU^*$ 最小，這是因為阻力越大，水躍範圍也就越短。

3. 躍後水深

由表 (3) 中可發現數值模擬所得到的躍後水深與 Belanger 動量方程式所得的躍後水深二者之間的相對百分比差距並不明顯，算是接近，但可發現 $\varepsilon_{\alpha}=0.20hU^*$ 的情況中所模擬得到的躍後水深比起 $\varepsilon_{\alpha}=0.45hU^*$ 與 $\varepsilon_{\alpha}=0.80hU^*$ 的情況中所得到的結果要來得小， $\varepsilon_{\alpha}=0.45hU^*$ 的情況中次之， $\varepsilon_{\alpha}=0.80hU^*$ 的情況中最大。

4. 水面線變化

本文採用 djp 一值用以表示程式模擬的水面線高度與由 Subramanya 與 Rajaratnam 的實驗結果而得的水面線高度之差距，其定義為各行的高度差平方和再

除以計算網格沿 x 軸的行數。由數值模擬的 24 種情況中觀察 djp 歷線的變化，並參考數值模擬所得的水面發現在 Fr_1 較大或 ε_{α} 較小的情形中，水面線的變化較大且與由 Subramanya 與 Rajaratnam 的實驗結果而得的水面線差距較大。

5. 漩渦的形成

Long 指出水躍的表面漩渦是由一些小漩渦組合而成，且這些小漩渦是形成於水躍的早期，並會經由漩渦對 (vortex pairing) 的過程最後形成一個大漩渦。在本研究，可發現表面漩渦內包含了小漩渦，而且較小的 Fr_1 的情形中發現類似 Long 所提的現象，例如圖 (2)， $Fr_1 = 3.0$ 、 $\varepsilon_{\alpha} = 0.30hU^*$ 。由圖中可發現在 $t = 2.0$ 秒時有三個小漩渦，而在 $t = 4.4$ 秒時有兩個小漩渦，最後在 $t = 9.4$ 秒與 $t = 14.4$ 秒時就只有一個大漩渦。由於當初數值結果的輸出時刻間距較大，所以並無法如 Long 以很短的時間間距來觀察漩渦對的過程。因此，若欲進一步探討表面漩渦的形成過程，則在時間間距上須進一步的考量。另外，本研究中亦發現在較大的 Fr_1 或 ε_{α} 較小的情形中卻發現經過一段時間後，在表面漩渦裡面仍然可發現到許多小漩渦的存在，並不如 Long 所指最後形成一個大漩渦，如圖 (3)， $Fr_1 = 3.5$ 、 $\varepsilon_{\alpha} = 0.20hU^*$ 。 Fr_1 較大與 ε_{α} 較小在本研究所得的水躍長度都是較長的，那麼在躍體處所涵蓋的晶格數勢必也就較多，或許也就是晶格數較多，所以才有辦法展現出躍體內的情形，以致於看到了不同於 Long 以實驗觀察所得的結果。當然也有可能是數值的結果與實際的水躍現象有所差距。本研究也能展現漩渦的形成與演化，頗符合前人結果。

五、參考文獻

1. Nichols, B. D., Hirt, C. W. and Hotchkiss, R. S., "SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple

- Free Boundaries", Los Alamos. Scientific Laboratory report LA-8355, 1980.
2. Fisher, H. B., List, E. J., Koh, R. C. Y., Imberger, J. and Brooks, N. H., "Mixing in Inland and Coastal Waters", Academic Press, Inc., 1979.
 3. Henderson, F. M. "Open Channel Flow", Prentice-Hall, Inc, 1966, page 99.
 4. French, R. H., "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Co., 1986.
 5. Long, D., Rajaratnam, N., Steffler, P. M., Smy, P. R., "Structure of Flow in Hydraulic Jumps", J. Hydraulic Research, 29, 2, 207-218, 1991.

六、圖表

表一 水躍長度相對百分比

Fr ₁	ε _{tx} *	L _j (m) (數值)	L _j (m) (Bradley &Peterika)	相對百分比** (%)
2.0	I	9.82	4.73	207.62
	II	10.13		214.16
	III	10.41		220.08
2.5	I	15.16	7.142	212.27
	II	16.12		225.71
	III	36.50		511.06
3.0	I	19.05	9.563	199.21
	II	22.31		233.30
	III	36.50		381.68
3.5	I	23.16	11.985	193.24
	II	34.11		284.61
	III	49.47		412.77
4.0	I	29.58	14.414	205.22
	II	35.19		244.14
	III	大於 50		大於 346.88
5.0	I	26.72	12.724	210.00
	II	40.73		320.10
	III	46.60		366.24
6.0	I	39.47	14.766	267.30
	II	49.69		336.52
	III	大於 50		大於 338.62
7.0	I	49.07	19.154	256.19
	II	大於 50		大於 261.04
	III	***		***

* I : ε_{tx} = 0.80hU^{*} II : ε_{tx} = 0.45hU^{*} III : ε_{tx} = 0.20hU^{*}

** 相對百分比 (%) = [L_j (數值) / L_j (Bradley&Peterika)] × 100

*** 程式執行時間只有 0.534 秒，所以不予以比較。

表二 表面漩渦長度相對百分比

Fr ₁	ε _{tx} *	L _{rj} (m) (數值)	L _{rj} (m) (Rouse)	相對百分比** (%)
2.0	I	4.47	3.32	134.64
	II	4.51		135.84
	III	7.32		220.48
2.5	I	7.04	5.37	131.10
	II	9.44		175.79
	III	26.48		493.11
3.0	I	11.73	7.92	148.11
	II	16.19		204.42
	III	27.00		340.91
3.5	I	18.00	10.74	167.60
	II	24.49		228.03
	III	46.57		433.61
4.0	I	20.48	12.69	161.39
	II	28.84		227.27
	III	大於 50		大於 394.01
5.0	I	20.48	11.74	174.45
	II	33.81		287.99
	III	39.33		335.01
6.0	I	32.44	14.78	219.49
	II	43.43		293.84
	III	大於 50		大於 338.29
7.0	I	37.13	18.01	206.16
	II	大於 50		大於 277.62
	III	***		***

* I : ε_{tx} = 0.80hU^{*} II : ε_{tx} = 0.45hU^{*} III : ε_{tx} = 0.20hU^{*}

** 相對百分比 (%) = [L_{rj} (數值) / L_{rj} (Rouse)] × 100

*** 程式執行時間只有 0.534 秒，所以不予以比較。

表 3 躍後水深相對百分比

Fr ₁	ε _{tx} *	h ₂ (m) (數值)	h ₂ (m) (理論)	相對百分比** (%)
2.0	I	1.44	1.186	121.42
	II	1.31		110.46
	III	1.19		100.34
2.5	I	1.74	1.535	113.36
	II	1.64		106.84
	III	1.73		106.84
3.0	I	2.12	1.886	112.41
	II	1.99		105.51
	III	1.85		98.09
3.5	I	2.33	2.237	104.16
	II	2.27		101.48
	III	2.27		101.48
4.0	I	2.69	2.589	103.90
	II	2.56		98.88
	III	***		***
5.0	I	2.21	2.174	101.66
	II	2.15		98.90
	III	***		***
6.0	I	2.73	2.640	103.41
	II	2.64		100.00
	III	***		***
7.0	I	3.15	3.106	101.42
	II	***		***
	III	****		****

* I : ε_{tx} = 0.80hU* II : ε_{tx} = 0.45hU* III : ε_{tx} = 0.20hU*

** 相對百分比 (%) = [h₂(數值) / h₂(理論)] × 100

*** 水躍長度大於網格 x 軸長度 50 公尺，所以 h₂ 無法決定。

**** 程式執行時間只有 0.534 秒，所以不予以比較。

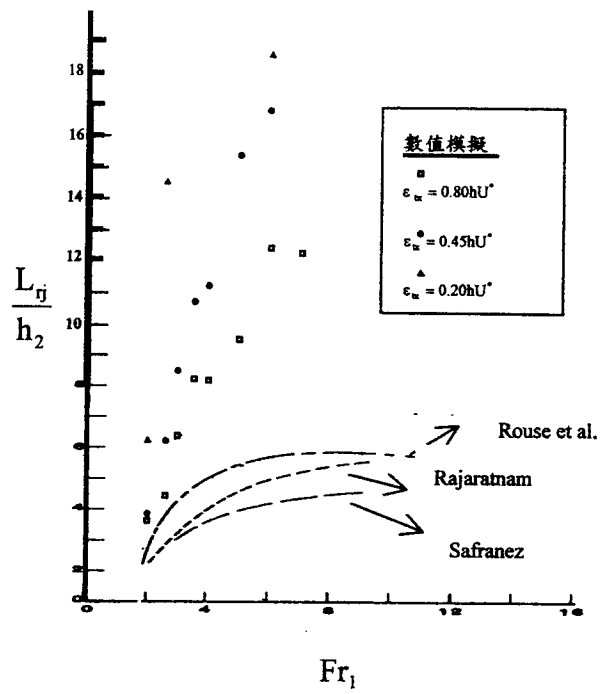


圖 1 表面漩渦長度

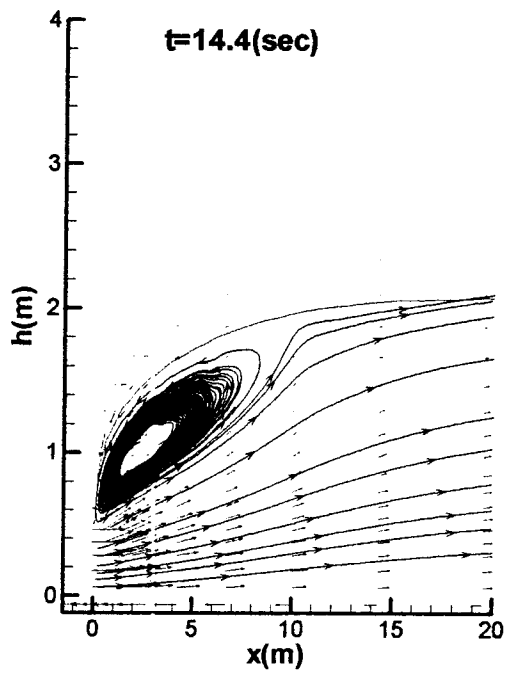
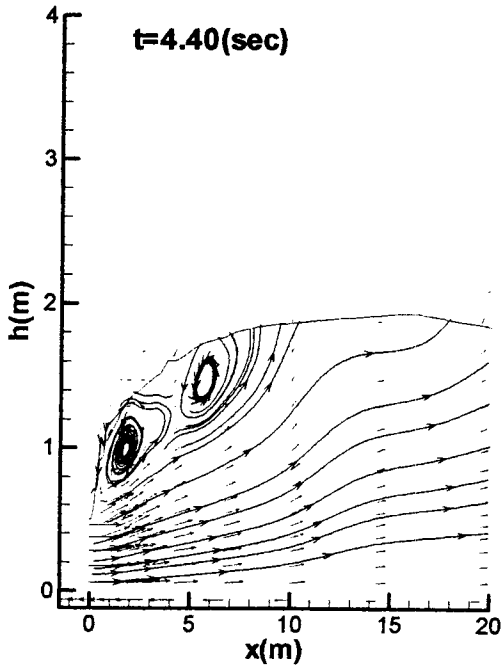
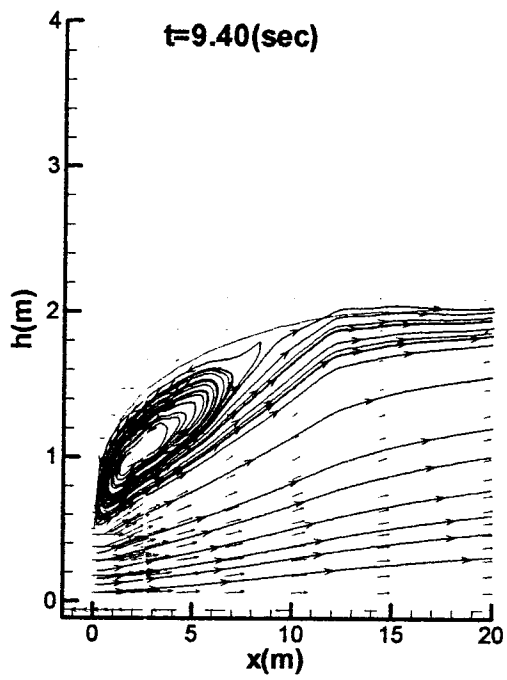
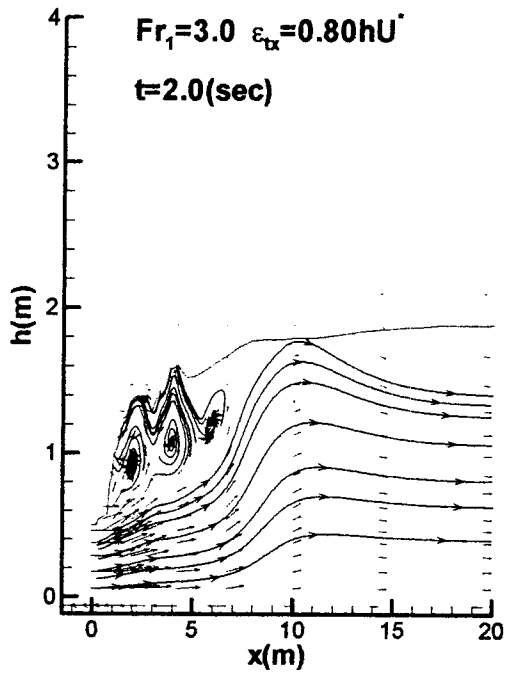


圖 2 $Fr_1 = 3.0$ 、 $\epsilon_{bx} = 0.80hU^*$ 旋渦的過程

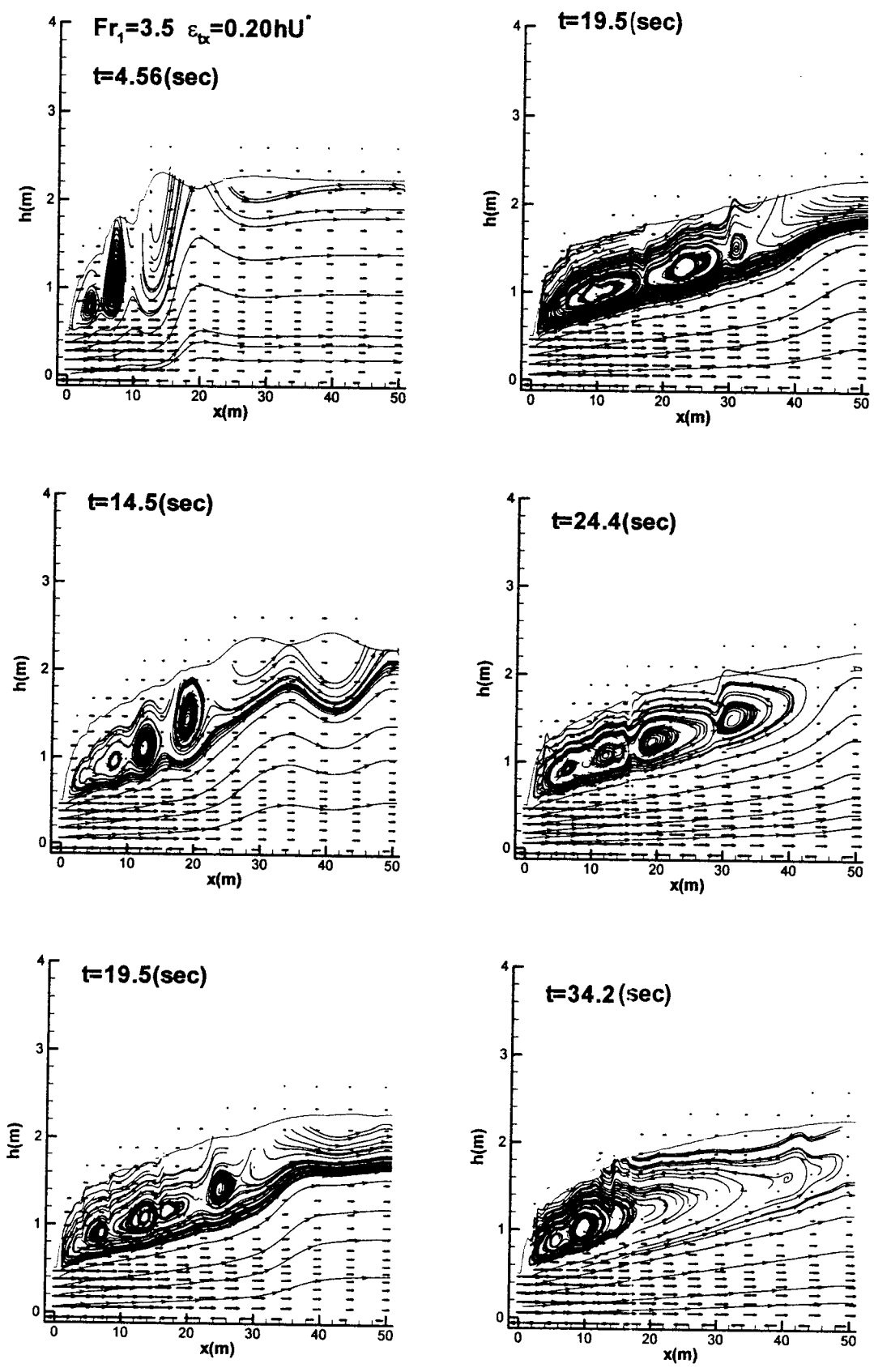


圖 3 $Fr_1 = 3.5$ 、 $\epsilon_{bx} = 0.20hU^*$ 漩渦的過程