



MAC 方法配合高度函數應用於寬頂堰之流動模擬

Application of the MAC Method with Height Function on Flow Simulation over a Broad-Crest Weir

計劃編號：NSC 87-2211-E-032-021

執行期間：86年08月01日-87年07月31日

主持人：施清吉 淡江大學水資源及環境工程學系 教授

共同主持人：

一、中文摘要(關鍵詞：MAC 方法，寬頂堰流，
自由面)

本研究根據 Navier-Stokes 運動方程式與連續方程式，使用 MAC 方法(Marker and Cell)，並配合高度函數(Height function)，以探討與分析流經寬頂堰(Broad-crested weir)的流動。寬頂堰之上游水深 H 與沿流向長度 L 間的比值 H/L 決定堰的種類，計有長堰(Long weir)，寬頂堰，狹頂堰(Narrow-crested weir)與銳角堰(Sharp crested weir)。若為寬頂堰，在限定之 H/L 比值範圍內，以數值模擬結果與理論值以及前人所做的實驗結果做一比較分析，例如流量係數(Discharge coefficient)，堰頂壓力分佈，速度剖面，剪應力分佈，自由面等。數值計算中之參數，如上游權重參數及鬆弛因子，若選擇得當，則數值模擬與實驗值之比較，有較好之結果。MAC 方法採用高度函數代表顆粒來追蹤自由面的變化，其條件為自由面坡度不能超過晶格對角線的斜率；換言之，自由面坡度不能太大。適宜引用此方法的渠流(Channel flow)並不多，例如堰流(Weir flow)，自由跌水(Free overfall)，洩水流(Sluice gate flow)，寬頂堰流等。

英文摘要 (Keyword : MAC method, Broad-Crested Weir, Free surface)

Based upon the Naiver-Stokes equations of motion and the continuity equation，the MAC method (Marker and Cell) coupled with a height function is used to investigate and analyze the flow over a broad-crested weir. There are four types of weir; i.e., long weir, broad-crested weir, narrow-crested weir, and sharp-crested weir, and the classification is based upon the ratio of upstream depth H to the longitudinal width of weir L . Within this range of ratio of a broad-crested weir flow, results of simulated flows will be compared with both theoretical predictions and previous works, such as the discharge coefficient, the pressure distribution, the velocity profile, the shear stress and the free surface etc. The agreement of comparisons has been found, if appropriate values are chosen for coefficients which are inherent in the numerical scheme, such as the upstream weighting coefficient and the relaxation factor. The MAC method adopts the height function instead of spreading particles to trace the location of the free surface, and the requirement of this technique is that the slope of the spreading particles to trace the location of the free surface must be less than

that of the diagonal of the cell. Channel flows which are suitable to be analyzed by making use of this technique are the weir flow, the free overfall, the sluice gate flow etc.

二、計畫緣由與目的

寬頂堰流之所以值得研究的原因有三：（一）寬頂堰流的幾何因素呈顯著的變化，水流由水平流向改為垂直流向，且產生離流（Separation）；（二）就實用觀點而言，可建立流量與上游水位間之關係，對量測流量有所幫助；（三）寬頂堰流同時具有緩變流與突變流等兩種流況。

本研究之目的，主要以數值模擬結果與理論值以及前人所做的實驗結果做一比較分析，例如流量係數（Discharge coefficient），堰頂壓力分佈，速度剖面，剪應力分佈，自由面，堰前漩渦長度，堰頂離流等。

由於 MAC 方法使用交錯格點，雖然造成了邊界在處理上的麻煩，但是也因此容許了更大的靈活性以適應各方面的需要。總而言之，MAC 方法的架構及執行步驟非常簡單且易於瞭解。所以，不但容易維護，而且易於應用於各種不同特徵的問題上。

三、研究方法與成果

研究方法 MAC 方法由四個步驟所組成。首先是構建問題與設定各相關變數的起始值。第二個步驟是利用沿 x 與 y 軸的 Navier-Stokes 運動方程式分別求得下時段的暫時速度（Temporary velocities），式中含一上游權重參數 α 。第三個步驟是迭代與修正，直到發散量（連續方程式之殘餘值）小於容許誤差為止，此時的壓力與速度才是下

時段的真正壓力與真正速度。這過程中含一鬆弛因子 ω ，介於 0 與 2 之間，及兩個壓力參數 C_x 與 C_y ，分別針對水平速度 u 與垂直速度 v 。因子與參數之引進均為了加快計算與修正。最後一個步驟就是利用自由面的機動條件（Kinematic condition）計算自由面高度。每一次迭代及最後一個步驟必須檢查邊界條件。這分成兩方面：一是計算網格（Computational mesh）外圍的虛擬晶格（Phantom cell），二是空晶格的周圍晶格。

成果 數值計算包括數個參數值的變化：壓力參數 C_y （另 C_x 不列入探討）、迭代鬆弛因子 ω 與上游權重參數 α ，採用的值分別為 C_y 自 0.6 至 2.4； ω 自 0.6 至 1.6， α 自 0.4 至 1。數值計算結果並與多人的實驗結果比較，以了解兩結果間的差距為最小時，參數值為若干。比較之項目計有：堰項及其上游之自由面、堰項壓力、水平速度剖面、堰項上游壓力、流量係數 C_d 。兩結果之差距係採用絕對差值之平均值。此外，並探討不同的參數值對迭代次數的影響。流動展示計有速度分佈與剖面、流線、壓力剖面、剪力分佈。最後且探討堰長與堰高的改變所導致的影響。

四、結果與討論

1. 參數之影響

不同參數 C_y 、 ω 與 α 值的計算結果與實驗結果間之比較依序分別展示於圖一至圖九，實驗結果係取 Willi 氏所發表之實驗。圖中，水平位置與垂直高度分別為 x 與 y ， h 代表自由面高度， H_0 為固定總水頭， u 為水平速度， p 為壓力，另 γ 為水的單位體積重。圖一至圖三為上自由面，圖四至圖六為在 $x/H_0=2$ 的速度剖面，圖七至圖九為堰頂壓力。這些圖顯現不同的 C_y 值與不同的 ω 值都不影響數值計算的結果；但是數值模擬結果卻受不同上游權重參數 α 值的影響。上自由面與堰頂壓

力的計算結果略受不同 α 值的影響，可是速度剖面就受不同 α 值的影響，如圖八所示。這或許早在意料中，因為 α 值的多寡代表中央差分法與上風法之間的權重，其值呈現於計算暫時速度的對流項。所以，不同的 α 值當然直接影響速度的模擬結果。另外，以與實驗結果之比較而言，模擬之上自由面相當接近實驗結果，如圖一、圖四與圖七所示，其絕對差距之平均值大致為 10 的負三次方。然而，堰頂壓力與速度剖面的差距就較明顯，比上述的絕對差距大十倍，大約為 10 的負二次方，不過模擬結果與實驗結果的趨勢都相當一致。總之，引用 MAC 方法配合高度函數來模擬寬頂堰流時，壓力修正參數 C_p 與迭代鬆弛因子 ω 用不著慎重選擇， C_p 值可以 1 計， ω 值只須介於 0.6 與 1.6 之間即可；但 α 值須慎重選擇，大致以介於 0.6 與 0.8 較為適當。

2、流量係數

流量係數 C_d 定義為 $C_d = q/(2ghH_0^3)^{1/2}$ ，式中 L 代表沿流向的寬頂堰長度，而 q 為單位寬度流量。Willi 氏採用上述定義，由實驗求流量係數，實驗範圍為 $0.1 < H_0/L < 0.4$ 。另一方面，Gorida 係以迴歸式表示， $C_d = 0.5 + 0.05 \times (H/L)^{0.2}$ ， $0.1 \leq H/L \leq 0.4$ ，式中， H 代表相對於堰頂之上游水深。流量係數之相對差距 Φ_{cd} 由 $(C_{dc} - C_{dm})/C_{dm} \times 100\%$ 求得，示於垂值座標，式中， C_{dc} 為流量係數之計算值，而 C_{dm} 為流量係數之實驗值。圖十與圖十一分別為模擬的流量係數與實驗值之比較， $C_p=1.8$ ， $\omega=0.6$ ，水平座標為上游權重參數。圖十與圖十一均顯示流量係數之相對差距隨著 α 值的增加而遞減。易言之，以流量係數而言，採用上風法遠比採用中央差分來得適當。

3、不同位置之速度剖面

同樣採用 Willi 氏的實驗數據，不同位置的速度剖面展示於圖十二至圖十六，這五圖均顯示水

平速度接隨著相對垂直高度 y/H_0 的增加而遞減，其趨勢與實驗值一致。在離流(Seporation)之附近，也同樣顯示反向流的存在，參閱圖十四相對水平速度 $u/\sqrt{2gh_0}$ 小於零的分佈，其相對垂直高度範圍大致為 0 至 0.1。比較圖十三、圖十四與圖十五所示之位置即可知，離流的相對水平座標範圍為 0 到 1， $x/H_0=0$ 代表堰頂之左端點。所以離流自寬頂堰之左端左端點開始形成，延續的長度約為 $1 \times H_0$ ，即一個總水頭高度。圖十三中，在 $y/H_0=0.003$ 之相對水平流速，其計算值與實驗值分別為 0.32182 與 0.30690。由圖十三與圖十四可知，水平流速實驗值減去計算值之差距，在 $x/H_0=0$ 至 $x/H_0=0.5$ 的範圍內為最大，換句話說，離流的左端至中間範圍內，計算值大於實驗值。除了在離流的範圍外，相對水平速度之差距都在 0.02 以下。

五、參考文獻

- Doeringsfeld, H. A. and Baker, C. L., "Pressure-Momentum Theory Applied to the Broad-Crested Weir," Trans. ASCE, vol. 106, pp. 934-969 (1941).
- Hirt, C. W., Nichols, B. D. and Romero, N. C., "SOLA Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows," Los Alamos Scientific Laboratory report La-5852 (April 1975).
- Harlow, F. H. and Welch, J. E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Phys. Fluids 8, pp. 2182-2189, (1965).
- Willi H. Hanger, "Broad-Crested Weir," Journal of Irrigation and Drainage Engineering, vol. 120 no. 1, pp. 13-26 (1994).
- Welch, J. E., Harlow, F. H., Shannon, J. P. and Daly, B. J., "The MAC Method; A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surfaces," Los Alamos Scientific Laboratory report, LA-3425

(March 1966).

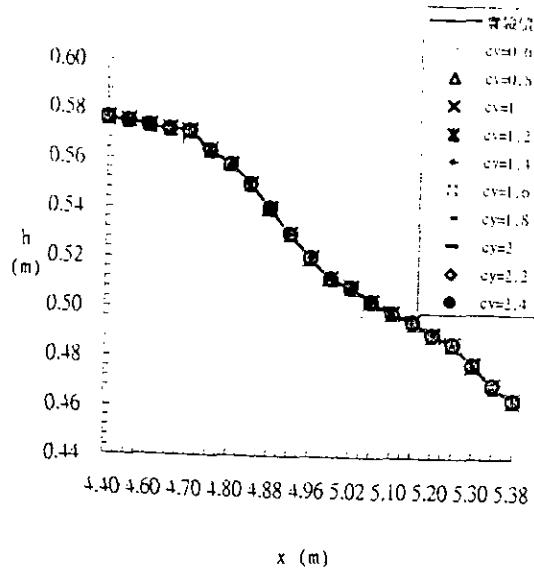
6.龍學之，”二維銳緣堰流之數值模擬”，私立淡江

大學碩士論文(1989)。

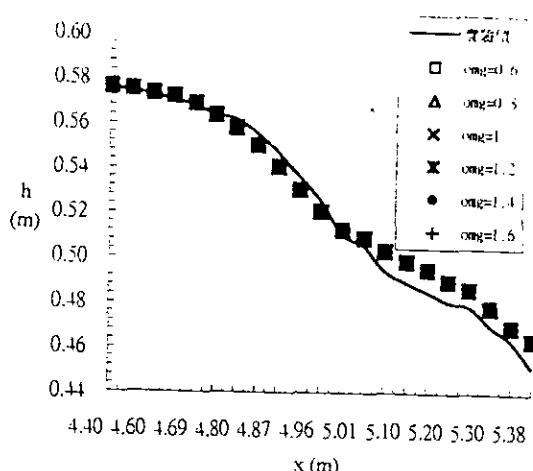
7.林富松，”應用 MAC 法於下射式閘門流況之數值

模擬”，私立淡江大學碩士論文(1993)。

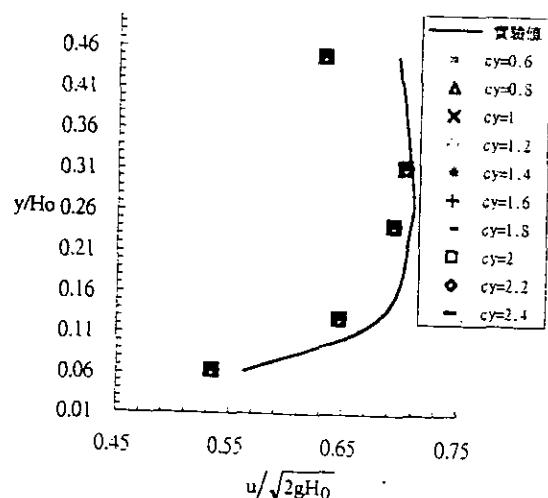
六、圖表



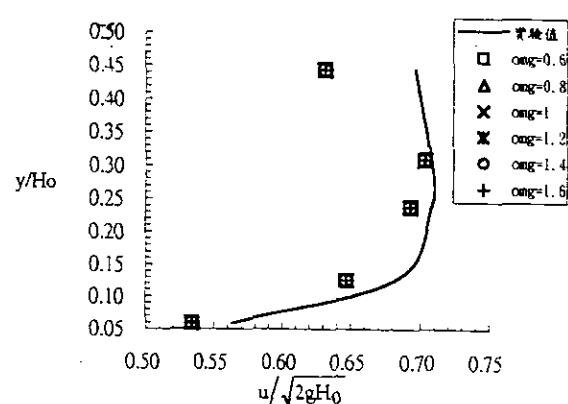
圖一 C_y 值改變上自由面計算值與實驗值之比較



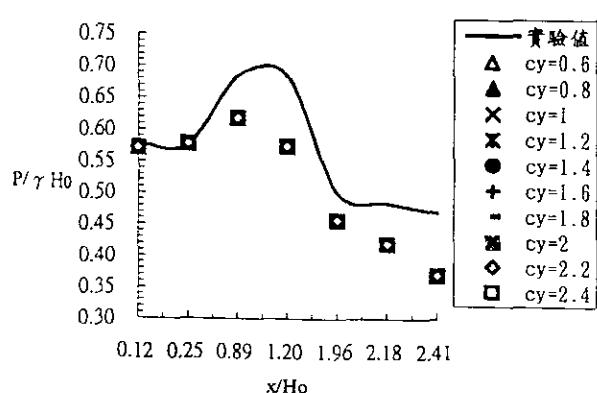
圖四 α 值改變上自由面計算值與實驗值之比較



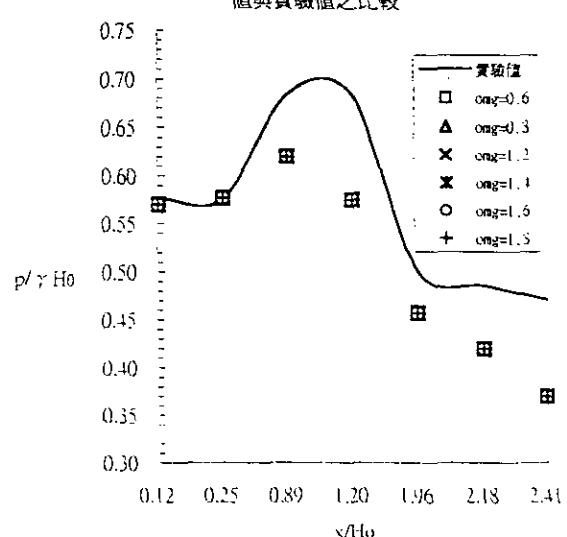
圖二 C_y 值改變 $\sqrt{H_o}=2$ 速度分量計算值與實驗值之比較



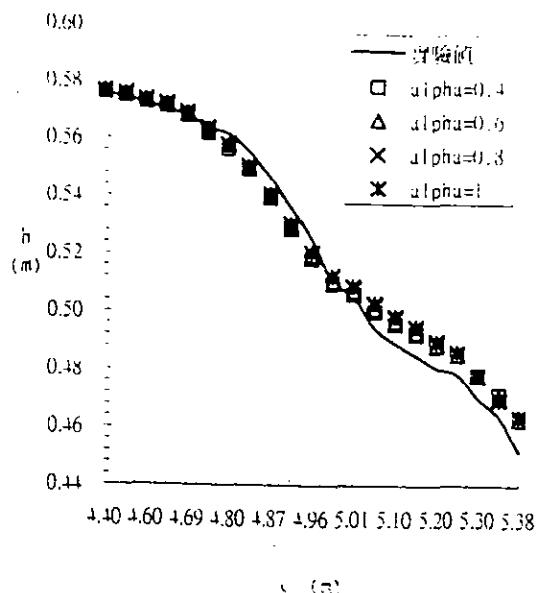
圖五 ω 值改變 $\sqrt{H_o}=2$ 速度分量u計算值與實驗值之比較



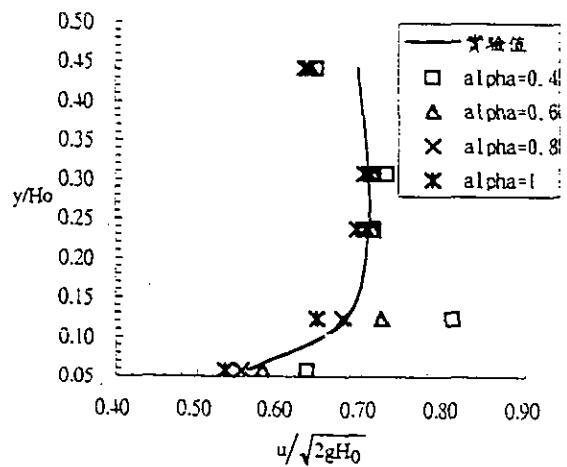
圖三 C_y 值改變寬頂堰頂壓力計算值與實驗值之比較



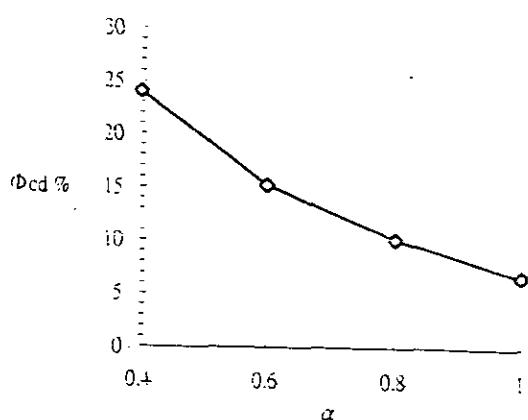
圖六 ω 值改變堰頂壓力計算值與實驗值之比較



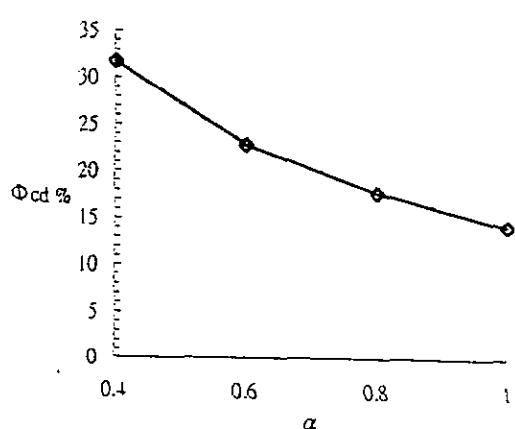
圖七 α 值改變上自由面實驗值與計算值之比較



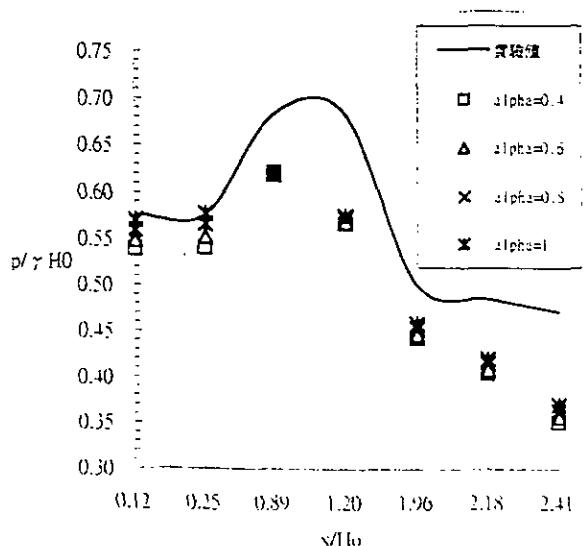
圖八 α 值改變 $x/Ho=2$ 速度分量 u 實驗值與計算值之比較



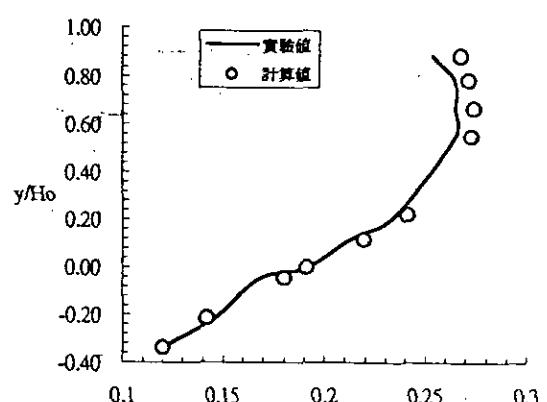
圖十 α 值改變流量係數之相對差距值 (Gorida)



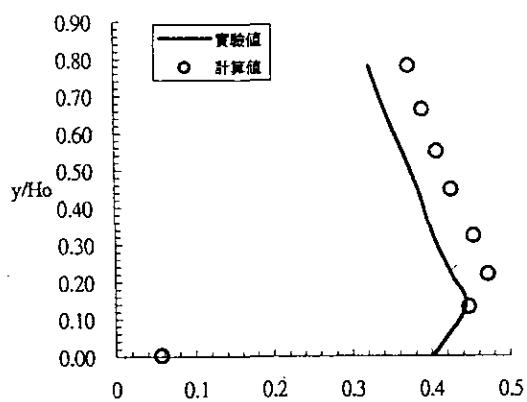
圖十一 α 值改變流量係數之相對差距值 (Willis)



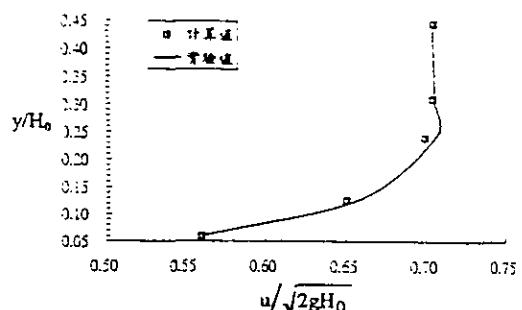
圖九 α 值改變底頂吸力壓力實驗值與計算值之比較



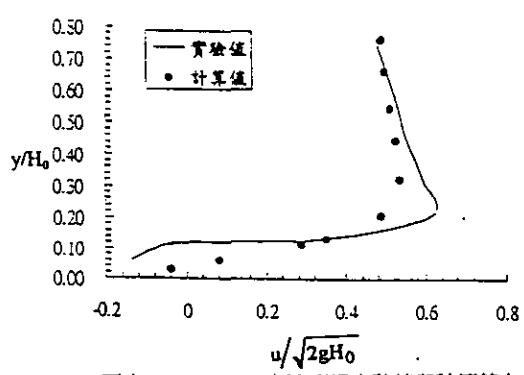
圖十二 $x/Ho= -0.5$ 之速度場實驗值與計算值之比較



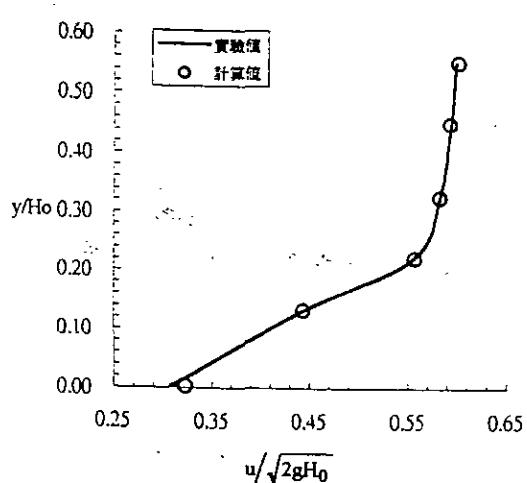
圖十三 $x/H_0=0$ 的速度場實驗值與計算值之比較



圖十六 $x/H_0=2$ 之速度場實驗值與計算值之比較



圖十四 $x/H_0=0.5$ 之速度場實驗值與計算值之比較



圖十五 $x/H_0=1$ 的速度場實驗值與計算值之比較