

行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

二維物體之影像重建(1/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2219-E-032-004-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：淡江大學電機工程學系(所)

計畫主持人：丘建青

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 5 月 13 日

二維物體之影像重建(1/3):

二維週期性物體之影像重建

Image Reconstruction of a Two-Dimensional Periodic Object

計劃編號: NSC -91-2219-E-032-004-

執行期間: 91年08月01日至92年07月31日

計劃主持人: 丘建青

淡江大學電機系教授

一、計劃中文摘要(關鍵詞: 週期性、基因法則、完全導體、非完全導體)

本計劃的目的在研究二維週期性完全導體與不完全導體之電磁成像問題。我們針對平面波入射的情況下，分別就週期性完全導體及不完全導體的逆散射進行探討。

首先探討週期性完全導體在自由空間的逆散射，接著配合表面阻抗的概念將逆散射法則推廣到非完全導體的情形。然後引入基因法則將逆散射問題轉化為求解最佳化的問題。藉以重建物體的週期大小、形狀函數與導電率。

不論初始的猜測值如何，基因法則總會收斂到整體的極值(global extreme)，因此在數值模擬顯示中，即使最初的猜測值遠大於實際值，我們仍可求得準確的數值解，成功的重建出物體的週期大小、形狀函數與導電率。

無論在完全導體以及非完全導體中，週期大小的收斂速度總是優於形狀函數。且在非完全導體中，另可發現形狀函數的收斂速度總是優於導電率，因此可知週期大小對散射場之貢獻最大，形狀函數對散射場的貢獻次之，導電率對散射場的貢獻最小。

英文摘要(Keywords: Periodic, Genetic algorithm, Perfect conductor, Imperfect conductor)

The project presents a computational approach to the imaging of a two-dimensional periodic perfectly and imperfectly conducting

cylinder. The image reconstruction of a two-dimensional periodic perfectly and imperfectly conductor by the genetic algorithm is investigated. A periodic perfectly and imperfectly conducting cylinder of unknown periodic length, shape and conductivity scatters the incident wave in free space and the scattered field is recorded outside. Based on the boundary condition and the measured scattered field, a set of nonlinear integral equations is derived and the imaging problem is reformulated into an optimization problem. The genetic algorithm is then employed to find out the global extreme solution of the cost function. As a result, the periodic length, the shape and the conductivity of the conductor can be obtained. Numerical results are given to demonstrate that even in the presence of noise, good reconstruction has been obtained.

二、計劃緣由與目的

本計畫係利用基因法則，重建出二維週期性完全導體與不完全導體之週期大小、形狀函數與導電率。所謂“電磁成像”(Electromagnetic imaging)，乃是利用電磁波照射於散射體上，然後測量散射體外的散射場，經由適當處理以反求散射體的形狀或其內部性質。由於此種方法不必將測量儀器與被測物體做直接接觸，因此，在工業上的非破壞檢測、遙測礦產資源和

醫學上做人體內部的影像處理方面，物理上亦常自散射資料反求散射區域的位能分布。然而，由於以下的原因而使得逆散射問題的解變得複雜而困難：

- (1) 因為逆散射的問題包含了兩個未知數的乘積，一個是物體的電性，另一個是物體內部的電場，此兩未知數的乘積使得此逆散射的問題成為一個非線性的問題。再加上積分方程式的核心(kernel)是一個平滑函數(smoothing function)，更導致其嚴重的不良情況(illposness) [1]-[3]。
- (2) 以複雜物體的逆散射問題而言，由於其同時包含了導體與介質物體，就我們所知，目前尚無嚴謹的理論來解決此類型的問題。

理論方面，利用嚴謹的理論，推導出非線性積分方程式。接著，將逆散射問題轉化成一最佳化問題，利用基因法則重建出其在自由空間中週期長度、形狀與導電率。基因法則是一種藉由隨機的選擇，在一編碼的參數空間中進行最佳化的搜尋法則；即使初始的猜測值與精確值相差很遠時，此法亦能避開區域極值而收斂到問題的整體極值。利用這種強韌的特性，就可重建出二維週期性完全導體與不完全導體的週期長度、形狀與導電率。

三、研究方法與成果

(一) 理論推導

讓我們考慮一週期長度為 d 排列於 x-direction 之二維週期性完全導體置於自由空間中，自由空間中的誘電係數(permittivity)和導磁係數(permeability)分別以 V_0 及 \sim_0 表示。為了簡單起見，假設該金屬物體於 Z 軸方向無限延伸，即該金屬的特性只隨著 X, Y 座標而變，與 Z 軸無關。因此其在 (x, y) 平面的截面積可用極座標方程式 $r = F(\rho)$ 表示，如圖 1 所示。假設入射波為 $e^{j\omega t}$ 形式之諧波(time harmonic)，並設入射電場是平行於 Z 軸的均勻平面波，即 TM(transverse

magnetic)極化波($\frac{\partial}{\partial z} = 0$)。以 \vec{E}_i 表示入射角為

W 之入射電場，如圖 1，則入射電場可表示為

$$\vec{E}_i(x, y) = e^{-jk(x \sin W + y \cos W)} \hat{z}, \quad k^2 = \tilde{S}^2 V_0 \sim_0 \quad (1)$$

其中 k 是自由空間的波數。

電磁場滿足 Maxwell 方程式，配合 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 及電場

只有 z 方向的分量，吾人可將散射電場 $\vec{E}_s = E_s \hat{z}$

視為由導體表面所感應的表面電流 J_s 在自由空間中的輻射，配合二維週期性格林函數，導體外任一點 (x, y) 之散射場 $\vec{E}_s = \vec{E} - \vec{E}_i$ 遂可表成

$$E_s = \int_0^{2\pi} G_i(x, y; x', y') J_s(\rho') d\rho' \quad (2)$$

中

$$G_i(x, y; x', y') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2r_l d} \exp(-r_l |y - y'|) \exp(-jk_l(x - x')) \quad (3)$$

$$J_s(\rho) = -j\tilde{S} \sim_0 \sqrt{F^2(\rho) + F'^2(\rho)} J_s(\rho) \quad (4)$$

$$r_l = \begin{cases} j\sqrt{k^2 - k_l^2}, & k^2 > k_l^2 \\ \sqrt{k_l^2 - k^2}, & k^2 \leq k_l^2 \end{cases}, \quad k_l = \frac{2\pi l}{d} + k \sin W \quad (5)$$

其中 $G_i(x, y; x', y')$ 是二維週期性格林函數 [4],[5]，方程式 (3) 是由 spatial domain 轉成 spectral domain 收斂較快的形式， $J_s(\rho)$ 是表面的感應電流密度，正比於導體表面的法線方向導數。

接下來，對於完全導體的邊界條件為導體表面總電場之切線分量為零，即

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (6)$$

\hat{n} 為垂直於導體並指向導體外的單位向量。基於此邊界條件，可得到 $J_s(\rho)$ 的積分方程式

$$E_i = -\int_0^{2\pi} G_i(x, y; x', y') J_s(\rho') d\rho' \quad (7)$$

E_i 為導體表面的入射電場值， $G_i(x, y, x', y')$ 是二維週期性格林函數。

對正散射而言，物體的週期長度和形狀已知，欲求散射場值。吾人先解方程式(7)中的 $J(\rho)$ ，再將 $J(\rho)$ 代入方程式(2)中計算散射場 E_s 。

對於非完全導體(導電率不為無限大之導體)，電磁波可以穿透散射體的內部，所以在導體表面上之總電場($\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s$)的切線分量並不為零。根據參考文獻[6]-[8]所述，對於不完全導體(t 甚大但為有限值)之邊界條件可藉由表面阻抗的概念，將導體表面上之總電場的切線分量和感應表面電流密度以下列關係式表示

$$\hat{n} \times \vec{E} = \hat{n} \times (Z_s \vec{J}_s) \quad (8) \text{ 其中}$$

$Z_s(\vec{S})$ 為表面阻抗，而 \hat{n} 代表垂直於導體表面並指向導體外之單位向量。在此我們想探討的物體為非磁性(nonmagnetic)，且其最小曲率半徑為 a 的不完全導體。由參考文獻[6]-[8]知，在 $|\text{Im}(N_c)ka| \gg 1$ 和 $t \gg \tilde{S}V_0$ 的條件下，即在物體導電率甚大且其形狀平滑的情況時，物體的表面阻抗可表為 $Z_s(\vec{S}) \cong \sqrt{j\tilde{S}_0/t}$ 。在此“Im”代表取複數的虛部，而 N_c 是導體的數折射指數，

其值為 $N_c = \sqrt{1 + \frac{t}{j\tilde{S}_0}}$ 。由方程式(8)所描述的

邊界條件，吾人可得到 $J(\rho)$ 的積分方程式為

$$E_i(F(\rho), \rho) = - \int_0^{2f} G_i(x, y, x', y') J(\rho') d_{\rho'} + j \sqrt{\frac{j}{w \sim_0 t}} \frac{J(\rho)}{\sqrt{F^2(\rho) + F'^2(\rho)}}$$

----- (9) 對正散射而言，物體的週期長度、形狀和導電率已知，欲求散射場值。吾人先解方程式(9)中的 $J(\rho)$ ，

再代入方程式(2)中計算散射場 E_s 。

經由上面理論推導，吾人即可求得完全導體與非完全導體的 E_s 。

接著，為了完成正散射的計算，對於 TM 波的入射情況，我們利用動差法(moment method)解方程式(2)和(9)的積分方程組。首先將物體邊緣分成 M_d 個小區段，每個區段必須足夠小，使得在每個小區段上的感應電流可視為常數。並採用脈波函數展開 $J(\rho)$

$$J(\rho) \cong \sum_{n=1}^{M_d} B_n P_n(\rho) \quad (10)$$

其中以脈波函數 $P_n(\rho)$ 為展開式中的基底函數，定義如下

$$P_n(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{in } \Delta C_n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

ΔC_i 代表物體從 $\rho = 2f(i-1)/M_d$ 至 $\rho = 2f/M_d$ 之第 i 個弧段。由於 $J(\rho)$ 係有限個脈波函數展開，所以已隱含了正則化作用。定義向量內積(inner product)

$$\langle f', g' \rangle = \int_0^{2f} f'(\rho) \cdot g'(\rho) d_{\rho}$$

同時選取 Dirac delta 函數作測試函數

$$V_m = \delta(\rho - \rho_m)$$

$$\rho_m = \frac{2fm}{M}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M$$

則方程式(2)可化為

$$\langle E_s, V_m \rangle = \langle \int_0^{2f} G_i(x, y, x', y') J(\rho') d_{\rho'}, V_m \rangle \quad (12-a)$$

或

$$E_s = \sum_{n=1}^{M_d} B_n \left[\int_{\Delta C_n} G_i(x, y, x', y') d_{\rho'} \right] \quad (12-b)$$

同理，方程式(7)可化為

$$E_i(F(\rho_m), \rho_m) = - \sum_{n=1}^{M_d} B_n \left[\int_{\Delta C_n} G_i(x, y, x', y') d_{\rho'} \right] \quad (13)$$

方程式(9)可化為

$$E_i(F_{(r_m)}, u_m) = -\sum_{n=1}^{M_d} B_n \left[\int_{\Delta x_n} G_i(x, y, x', y') d' + j \sqrt{\frac{j}{w_0 t}} \frac{U_{mn}}{\sqrt{F^2(r_m) + F'^2(r_m)}} \right] \quad (14)$$

上述之方程式皆為矩陣形式，可由代數法解之，如此一來我們就可解出正散射問題。

我們利用基因法則來解逆散射問題，並且選取下列展開式為形狀函數：

$$F(r) = \sum_{n=0}^{N/2} A_n \cos(nr) + \sum_{n=1}^{N/2} A'_n \sin(nr) \quad (15)$$

$$J(r) \cong \sum_{n=1}^M B_n P_n(r) \quad (16)$$

其中 A_n 和 A'_n 都是實數，共有 $(N+1)$ 個未知數，而 B_n 一般而言是複數。在此吾人展開正散射之 $J(r)$ 所用的點數並不同於逆散射所用之點數，即 $M_d \neq M$ 。在我們的研究中，正散射時的分割數是取逆散射問題的兩倍。而目標函數定為

$$OBF = \left\{ \frac{1}{M_i} \sum_{m=1}^{M_i} |E_s^{\text{exp}}(\bar{r}_m) - E_s^{\text{cal}}(\bar{r}_m)|^2 / |E_s^{\text{exp}}(\bar{r}_m)|^2 + \gamma |F(r)|^2 \right\}^{1/2} \quad (17)$$

其中 M_i 表示測量點的數目， $E_s^{\text{cal}}(\bar{r})$ 表示經由基因法則所計算出的散射場， $E_s^{\text{exp}}(\bar{r})$ 則為測量到的散射場。正規化因子 (regularization term) $\gamma |F(r)|^2$ ，是為了克服不良情況的發生，而 γ 值的範圍通常介於 0.0001 到 10 之間，最佳的 γ 值是與幾何形狀的維度有關。

(二) 數值模擬結果

在計劃裡，我們藉由數值模擬，讓我們探討所提出逆散射法則的可行性及對雜訊的敏感度。考慮一週期性完全導體或不完全導體置於自由空間中，一振幅為 1 的平面波照射在此物體上，如圖 1 所示。入射波的頻率為 3GHz，即波長為 0.1m。

為了重建導體的週期長度、形狀和導電率，吾人使用二個不同方向的入射波照射散射體，其入射角分別為 $\theta = 45^\circ$ 及 135° ，測量點等距的位於 $Y = \pm 2\text{m}$ ， X 從 -0.045 到 0.045m 的直線上且每條直線有 9 個測量點。在下列的模擬中，量測距離選擇為 2m 以對應遠場的散射量測。在此對於每個方向的入射波，共有 18 個測量點，所以在每次模擬中總共有 36 個測量點。正散射問題中展開表面電流所用之項數 M_d 為 100，而逆散射過程中，感應電流的展開項數 M 為 50。展開形狀函數的未知數為 9 個，加上一個未知的週期長度和導電率，總共有 11 個未知數。在基因法則的運算中，參數均被編碼成 16 位元所組成的字串：例子一與例子二的形狀函數未知係數 (A_n, A'_n) 範圍為 0 到 0.1，而所有例子的週期長度未知係數 d 的範圍為 0.05 到 0.1 且導電率未知係數 γ 範圍為 3×10^7 到 7×10^7 。字串的交配率和突變率分別是 0.8 和 0.04。族群的大小 (population size) 為 250。 γ 值是 0.001。

【例子一】週期長度 $d = 0.09\text{m}$ 、形狀函數為 $F(r) = (0.03 + 0.0025 \cos r + 0.005 \cos 2r + 0.005 \cos 3r) m$ ，這個例子其重建的圖形，週期長度的偏差量和形狀函數偏差量的變化分別示於圖 2(a) 及 2(b)。其中，週期長度偏差量 PD 和形狀函數偏差量 DFR 的定義如下：

$$PD = \frac{|d^{\text{cal}} - d|}{d} \quad (18)$$

$$DFR = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^{\text{cal}}(r_i) - F(r_i)]^2 / F^2(r_i) \right\}^{1/2} \quad (19)$$

此處 $N = 100$ 。參數 PD 及 DFR 分別提供 d^{cal} 和 d 、 $F^{\text{cal}}(r)$ 和 $F(r)$ 之相對誤差，很明顯的， PD 及 DFR 值越小，代表重建效果越好。由圖 2(b) 中可以看到重建的週期長度及形狀函數皆相當好。這個例子顯示吾人的基因法則在重建影像時，雖然初始猜測值遠大於精確值，其重建結果也依舊良好。由這個例子，我們可以瞭解到即使在大範圍的空間中進行參數值的搜尋，若使用基因法則，仍能獲的整體的最佳解，更加

說明了基因法則的適用性及強韌性。

【例子二】週期長度 $d = 0.09$ m，形狀函數為 $F(x) = (0.03 + 0.009\cos 3x + 0.009\sin 3x)$ m，材質為銅 $t = 5.8 \times 10^7$ s/m，我們所選取的物體形狀為三個凹形，對 x 軸及 y 軸不對稱，其重建的圖形，週期長度偏差量、形狀函數偏差量及導電率偏差量的變化分別示於圖 3(a) 及 3(b)。其中，導電率差偏量 $DSIG$ 的定義如下：

$$DSIG = \left| \frac{t^{cal} - t}{t} \right| \quad (20)$$

$DSIG$ 提供 t^{cal} 和 t 之相對誤差。這個例子顯示吾人的逆散射法則在處理形狀函數為凹形的物體依然有效。在此例吾人也將探討雜訊對影像的重建結果。我們加入雜訊量 $b + cj$ 至量測的散射場上，在此 b 與 c 分別表示獨立的隨機均勻分佈函數，其大小的範圍為負相對雜訊位準 (relative noise level) 乘以散射場的 R.M.S (root mean square) 值，至正相對雜訊位準乘以散射場的 R.M.S 值。模擬使用的相對雜訊位準包含： 10^{-5} ， 10^{-4} ， 10^{-3} ， 10^{-2} ， 10^{-1} ，數值結果繪於圖 3(c)。從圖 3(c) 中我們可以發現當雜訊達 10% 時，形狀函數和導電率重建的結果誤差大於 5%，但週期長度重建的結果誤差小於 1%；相對雜訊小於 0.1% 時，影像重建與週期長度重建幾乎與未加雜訊重建結果一樣好，但導電率重建的結果誤差仍大於 5%

四、結論

本計劃研究了二維週期性完全導體與不完全導體在自由空間中之逆散射。我們提出的逆散射法則是基於嚴謹的數學方法，利用接收的散射場及適當的邊界條件導出一非線性積分方程組，接著藉由動差法解非線性的積分方程，然後引入基因法則將逆散射問題轉化為求解最佳化的問題。對於週期性完全導體而言，從數值模擬中發現，此法則亦能重建出令人滿意的結果。吾人亦發現由於週期長度對散射場的貢獻遠大於形狀函數對散射場的貢獻。所以週期長度的收斂速度總是優於形狀函數。對於週期性

不完全導體而言，數值模擬中顯示對於凹形物體與形狀對 x 軸及 y 軸不對稱的物體的重建結果也令人滿意。至於所提基因法則抗雜訊的能力，從數值模擬中發現，量測的散射場即使加入均勻分佈的雜訊存在，週期長度與形狀函數的抗雜訊能力相當好，而導電率的抗雜訊能力則相對較差。本計劃所提逆散射法則，仍然有很大的發展空間。除了可以處理自由空間中的週期性完全導體與不完全導體外，還可以應用在掩埋於半空間 (half space) 或三層空間的週期性導體，只是數值工作將更為繁複。

五、參考文獻

- [1] A. G. Ramm, "Uniqueness result for inverse problem of geophysics: I," *Inverse Problems*, vol. 6, pp. 635-641, Aug. 1990.
- [2] H. P. Baltes, *Inverse scattering problems in optics*. New York: Springer-verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [3] M. M. Ney, A. M. Smith and S. S. Stuchly, "A solution of electromagnetic imaging using pseudo inverse transformation," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 3, pp. 155-162, Dec. 1984
- [4] R. E. Jorgenson and R. Mittra, "Efficient calculation of the free-space periodic Green's function," *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 38, pp. 633-642, May 1990.
- [5] G. S. Wallinga, E. J. Rothwell, K. M. Chen, and D. P. Nyquist, "Efficient computation of the two-dimensional periodic Green's function," *IEEE Tran. Antenna Propagat.*, vol. 47, pp. 895-897, May 1999.
- [6] F. B. Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall, 1965.
- [7] T. B. A. Senior, "Approximation boundary conditions," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, pp. 826-829, Sept. 1981.
- [8] F. M. Tesche, "On the inclusion of loss in time domain solutions of electromagnetic interaction problems," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-32, pp. 1-4, Feb. 1990.
- [9] A. Ishimaru, "Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering," *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, 1991.
- [10] I. T. Rekanos, T. D. Tsiboukis, "A finite element-based technique for microwave imaging of two-dimensional objects," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 49, pp. 234-239, April 2000.
- [11] O. M. Bucci, L. Crocco, T. Isernia, and V. Pascazio,

“Inverse scattering problems with multifrequency data: reconstruction capabilities and solution strategies,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 38, pp.1749-1756, July 2000.

[12]R. F. Harrington, “Field Computation by Moment Methods,” *New York: Macmillan*, 1968.

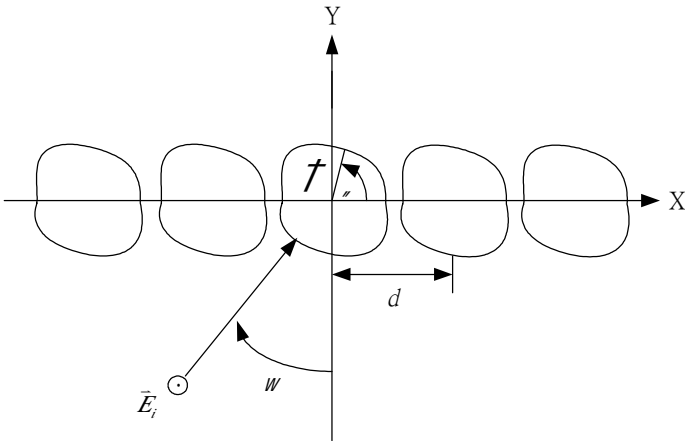


圖 1

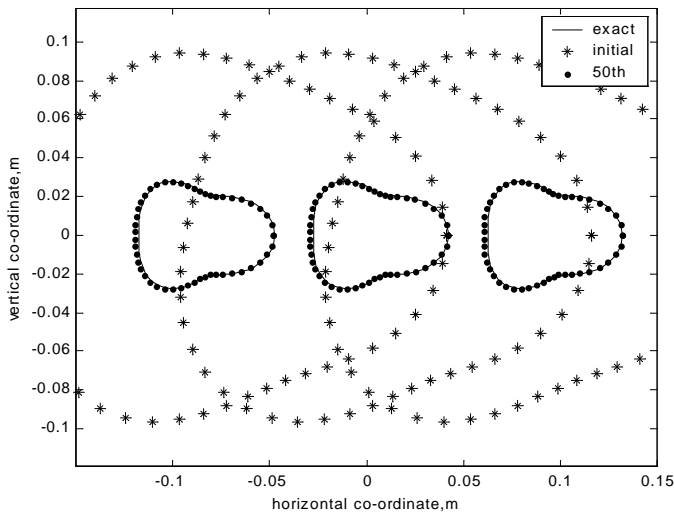


圖 2 (a)

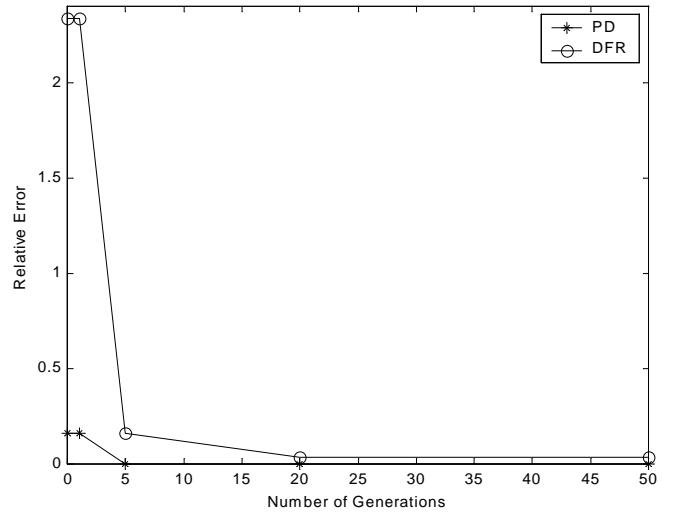


圖 2 (b)

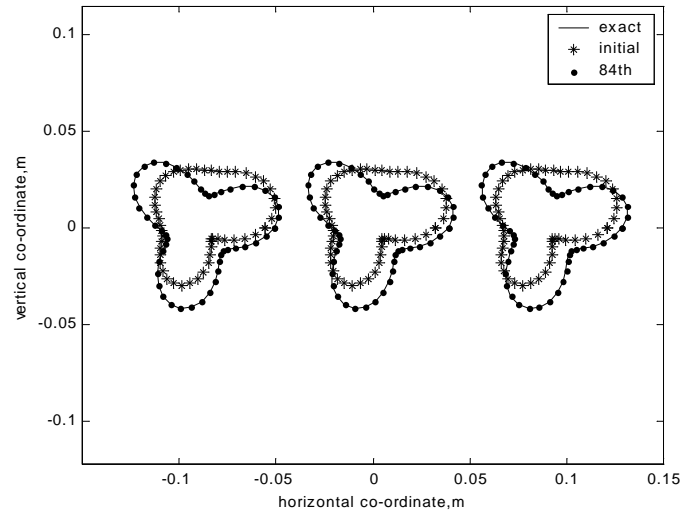


圖 3 (a)

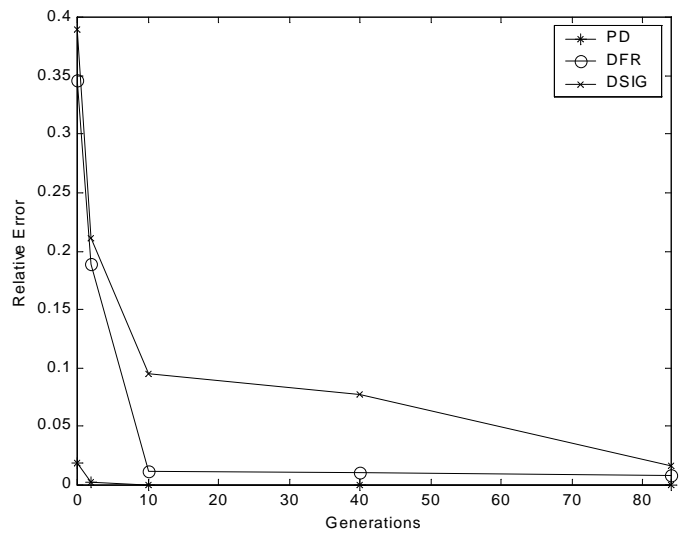


圖 3 (b)

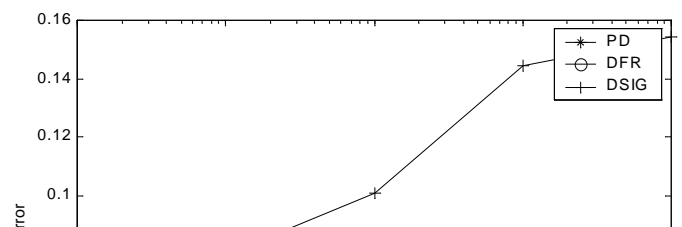


圖 3 (c)