

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

應用移動漸近線法於壓電複材層板結構最佳化設計之研究 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 97-2221-E-032-012-
執行期間：97年08月01日至98年07月31日
執行單位：淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人：應宜雄
共同主持人：張永康
計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：余智瑋
碩士班研究生-兼任助理人員：林世達
碩士班研究生-兼任助理人員：陳彥廷
碩士班研究生-兼任助理人員：林廷釗
碩士班研究生-兼任助理人員：陳景文

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 98 年 10 月 16 日

中文摘要

本研究應用移動漸近線法和最佳化方法於壓電複材層板結構最佳化設計。移動漸近線法的主要概念是將函數先以泰勒一階展開的倒數近似法，利用兩個中介變數轉換為近似原問題之函數。在每一次的迭代過程中，移動漸近線法將會產生一個近似凸狀函數的子問題，並依照轉換後函數的特性配合對偶法以求得最佳值。本研究藉由改變中介變數、移動限制等參數計算規則，以加快程式搜尋過程之收斂效率。數值範例中將針對壓電複材層板結構作輕量化設計、位移控制、振動控制等問題作探討。

關鍵詞：移動漸近線法，移動限制，壓電材料，最佳化。

Abstract

The method of moving asymptotes is used for piezoelectric laminated composite structures in this study. The concept of moving asymptotes is to use first order Taylor series expansion to approximate an original function, and then converting it to the similar function by intermediate variable. In each iteration, a convex approximate sub-problem will be generated and solved. According to the feature of the converted function and dual method, the optimum design can be solved. By using the move limit technique to change the intermediate variable, the searching process of optimization design can be improved and the design cycle was reduced. In this study, the minimum weight design, deflection control and vibration suppression of piezoelectric laminated composite structures will be discussed in numerical examples.

Keyword: method of moving asymptotes, move limit, piezoelectric material, optimum.

一、前言

結構最佳化的主要目的是在於達到設計者的需求與限制條件，藉由結構分析及改良設計來降低產品的製造成本。在改良設計方面一般常以結構的型態、結構尺寸這兩方面著手。傳統是依據工程師的經驗採用試誤法，逐步的改良設計參數直到符合需求為止。但是此方法可能會耗損相當的人力及物力，甚至可能無法達到預期的目標。產品的好壞完全取決於工程師的經驗，因此吾人時常想盡各種辦法來改善現有的狀況，希望產品能夠在效率、成本、與其他需考慮之因素中取得最佳的平衡點以獲得最佳的經濟效益。

一般結構最佳化常搭配有限元素法(finite element method)的使用，電腦科技的快速發展使電腦的處理及運算速度大幅提升，過去不易求解與分析之複雜結構，現今利用有限元素法就能快速求得分析值，再搭配一個合適的最佳化方法，就能快速的得到結構之最佳化設計。在處理結構最佳化問題中，一般較常用的最佳化方法是逐次線性規劃法(sequential linear programming)，但逐次線性規劃法處理多變數的結構類問題的計算效率不佳。而移動漸近線法(method of moving asymptotes)是一種能夠處理多變數、多個限制條件的理論，而且在處理最佳化問題時效率甚好。因此本文採用移動漸近線法配合改良式之移動限制概念來處理結構最佳化問題。

移動漸近線法理論由 Svanberg[1]在 1987 年提出，將其理論應用在樑與桁架結構最佳化上，由其範例中可以得知移動漸近線法的收斂速度的確比線性規劃法來的有效率。Bruyneel 與 Fleury[2-3]等學者利用移動漸近線法的概念應用在複合材料上，以複合材料的問題探討不同形式之漸近線展開方式與靈敏度的計算方式，可以得到局部最佳解，在工業上仍有進步的空間。Saldanha[4]等學者分別使用懲罰法(penalty method)與移動漸近線法兩種方法，以電磁鐵結構為範例改變線圈的形狀和位置為設計變數，求解螺線管所受的力與給定力之誤差最小化問題，並證實移動漸近線法比懲罰法更有效率且收斂速度較快。Carlsson 與 Thinnsten[5]同時將模擬退火法和移動漸近線法應用在小提琴上，利用對小提琴結構厚度的改變，以求取前

三個特徵頻率的最佳化問題，結果顯示移動漸近線法對於有限制條件的問題有較好的效率。陳匡佑[6]以不同之中介變數規則探討其收斂效率，並比較了毗連法與有限差分法對於收斂的影響，在多變數多限制條件情況下，毗連法的應用能有效的降低求解過程中繁複的計算。郭純孜[7]應用移動漸進線法搭配限元素分析軟體 ANSYS 進行結構最佳化研究。綜合以上之研究，吾人可知移動漸近線法為一可靠及收斂速率快的方法。所以本研究將應用改良式移動漸近線法於壓電複材層板結構之最佳化設計。

二、 移動漸進線法

移動漸近線法是由 Svanberg[1]所提出，能將原問題的函數 $f_i(x)$ 依下式作轉換：

$$f_i^{(k)}(x) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \quad (1)$$

$$r_i^{(k)} = f_i(x^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (2)$$

令

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j & \text{當 } \begin{cases} \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ \partial f_i / \partial x_j \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{當 } \begin{cases} \partial f_i / \partial x_j \geq 0 \\ \partial f_i / \partial x_j < 0 \end{cases} \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial x_j & \end{cases} \quad (4)$$

$$L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)} \quad (5)$$

求解過程通常依照以下的步驟反覆迭代：

步驟一選擇一個初始值 $x^{(k)}$ ，假設初始迭代次數 $k=0$ 。

步驟二利用 $x^{(k)}$ 作為計算 $f_i(x^{(k)})$ 和靈敏度值 $\nabla f_i(x^{(k)})$ 的迭代點。

步驟三產生一個子問題 $P^{(k)}$ 取代 P ，利用步驟二得到的結果建立函數 $f_i^{(k)}$ ，使函數 $f_i^{(k)}$ 近似函數 f_i 。

步驟四求解 $P^{(k)}$ ，得到此次子問題的最佳解 $x^{(k)}$ 。如果不能滿足收斂條件，則回到步驟二。

上述的求解過程，設計者可自行設定收斂條件，一般是以迭代點 $x^{(k)}$ 是否滿足設計所需而決定。依照 MMA 方法，能夠將最初較複雜的最佳化問題，轉換成較簡易的子問題，此子問題模型可採用對偶法求解。

對偶法(dual method)是將原先求解 A 的問題，經過轉換後求解 B 的問題，利用 Lagrangian multipliers 將其結合，求解出答案 B 之後再經轉換的到 A 之答案[8]。對偶法能將原先的設計問題轉換成凸性與可分離的子問題，每的子問題都是簡單的代數結構，因此能快速的求解。將離散後的子問題 $P^{(k)}$ 利用 Lagrangian 函數將目標函數與限制條件合成一式，如下所示[7]：

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \quad (6)$$

λ_i 即為 Lagrange multipliers，或是稱為對偶變數(dual variables)。接者可將對偶問題(dual problem)轉換成：

最大化

$$W(\lambda) = r_0 - \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^n W_j(\lambda) \quad (7)$$

其中

$$W_j(\lambda) = \frac{p_{0j} + \lambda_i p_{ij}}{U_j - x_j} + \frac{q_{0j} + \lambda_i q_{ij}}{x_j - L_j} \quad (8)$$

並滿足限制條件

$$\lambda_i \geq 0 \quad (9)$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad (10)$$

當求解得到 λ 時，也就能夠得到與之相對應的 $P^{(k)}$ 的解。

三、 移動限制概念之應用

由於不適當的移動限制可能會導致求不出答案或收斂不穩定的結果，因此選擇適當的移動限制對迭代的收斂效率是很重要的。吾人採用之移動限制的概念是將求解問題的限制條件以泰勒級數展開並忽略高次項，移動限制的推導方法如下[9]：

以泰勒級數展開的限制條件可表為下列型態：

$$g_{id} = g_i(x_{j0}) + \sum_{j=1}^{Nd} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (11)$$

其中 Nd 為設計變數的數目， g_i 為第 i 個限制件， g_{id} 為第 i 個限制條件數值。

$$\Delta g_i = \sum_{j=1}^{Nd} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (12)$$

其中

$$\Delta g_i = g_{id} - g_i(x_{j0}) \quad (13)$$

若假設 Δx_j 皆相同，並以 Δx_i 表示為下式：

$$\Delta x_i = \left| \frac{\Delta g_i}{\sum_{i=1}^{Nd} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}} \right| \quad (14)$$

如果第 i 個限制條件(constraint)中的靈敏度(sensitivity)都是同為正或同為負的話，則(14)式將會是合理之移動限制(move limit)。

令

$$\Delta x_c = \max(\Delta x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, Nc \quad (15)$$

其中 Nc 是限制條件的總數。

在 MMA 中，由於 $U_j^{(k)}$ 和 $L_j^{(k)}$ 永遠都為有限值，除了 $\partial f_i / \partial x_j = 0$ 之外(若 $\partial f_i / \partial x_j = 0$ ，則 $f_i^{(k)}$ 變為獨立函數，與 x_j 無關)，不論變數 x_j 為何， $f_i^{(k)}$ 皆為曲線函數。因此子問題 $P^{(k)}$ 可以表示為

最小化

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_o^{(k)} \quad (16)$$

並滿足限制條件

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)} \leq \hat{f}_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

$$\max \{ x_{j,\min}, \alpha_j^{(k)} \} \leq x_j \leq \min \{ x_{j,\max}, \beta_j^{(k)} \} \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (18)$$

其中參數 $\alpha_j^{(k)}$ 和 $\beta_j^{(k)}$ 在此代表著移動限制的意義，主要為了避免 x_j 的值與 $U_j^{(k)}$ 或 $L_j^{(k)}$ 相同，而導致分母為零的情況發生。

有關於中介變數 $U_j^{(k)}$ 與 $L_j^{(k)}$ 以及子問題的設計參數上下限 $\alpha_j^{(k)}$ 與 $\beta_j^{(k)}$ 的計算方式，吾人藉由改變參數的計算規則來改良原來移動漸近線法之效率。

本研究應用上節中所介紹的移動限制概念，改變參數規則計算方式。在中介變數 $U_j^{(k)}$ 與 $L_j^{(k)}$ 的規則方面，研究結果顯示 $U_j^{(k)}$ 與 $L_j^{(k)}$ 取大一點的數值對收斂速度有明顯的幫助。同時吾人應用移動限制概念來計算 $\alpha_j^{(k)}$ 與 $\beta_j^{(k)}$ 的範圍，應用此技術可使設計變數很快移動至最佳值附近。

新的參數計算中介變數 $U_j^{(k)}$ 與 $L_j^{(k)}$ 以及移動限制 $\alpha_j^{(k)}$ 與 $\beta_j^{(k)}$ ，規則表示如下：

(一) L_j 、 U_j 的計算方式：

(1) 迭代次數 $k \leq 3$

$$L_j^{(k)} = x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (19)$$

$$U_j^{(k)} = x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (20)$$

(2) 迭代次數 $k \geq 4$

$$L_j^{(k)} = x_j^{(k)} - s_j^{(k)}(x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (21)$$

$$U_j^{(k)} = x_j^{(k)} + s_j^{(k)}(x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (22)$$

其中 s_j 的規則如下

$$s_j^{(k)} = \begin{cases} 0.8 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0 \\ 1 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

(二) α_j 、 β_j 的計算方式：

吾人利用移動限制的概念所求出的 Δx_c

令

$$xmv_j^{(k)} = \Delta x_c / x_j^{(k)}$$

(1) 迭代次數 $k \leq 2$

$$\text{當 } xmv_j^{(k)} \leq 0.5$$

$$\text{令 } xmv_j^{(k)} = 0.5$$

$$\alpha_j^{(k)} = x_j^{(k)} \times (1 - xmv_j^{(k)}) \quad (24)$$

$$\beta_j^{(k)} = x_j^{(k)} \times (1 + xmv_j^{(k)}) \quad (25)$$

(2). 迭代次數 $k \geq 3$

$$\text{當 } xmv_j^{(k)} \leq 0.3$$

$$\text{令 } xmv_j^{(k)} = 0.3$$

$$\alpha_j^{(k)} = x_j^{(k)} \times (1 - xmv_j^{(k)}) \quad (26)$$

$$\beta_j^{(k)} = x_j^{(k)} \times (1 + xmv_j^{(k)}) \quad (27)$$

四、 數值分析

本研究將應用 ANSYS 有限元素分析軟體建立正確的有限元素模型來模擬各種壓電薄板結構，用來分析壓電薄板的結構問題。在求解結構最佳化問題時，必須把所求之問題數學化，訂定目標函數、限制條件與設計變數的範圍。本研究應用移動漸近線法來求解結構最佳化問題，藉由 ANSYS 軟體求得所需之參數，接者利用有限差分法進行靈敏度分析，再利用移動漸近線法來求得設計變數之最佳值。其中可利用靈敏度分析配合移動限制的概念訂定新的參數規則，加快收斂效率，最後將所求的最佳值代回 ANSYS 進行再分析，檢驗結果是否滿足收斂條件，若滿足收斂條件則表示所求得之新設計變數為最佳值，上述之整體流程如圖 1 所示。

範例一：三層壓電金屬複合層板結構之輕量化設計

本範例為三層壓電金屬複合層板結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖 2 所示[10]。上層與下層為壓電材料，上層壓電層負載電壓為-180V，下層壓電層負載電壓為+180V，中間層為鋁合金材料。懸臂板長度 $L = 250 \text{ mm}$ ，懸臂板寬度 $b = 10 \text{ mm}$ 。其限制條件是上層壓電層之端點在 z 方向之位移量 u_{tip} 不超過 2.0 mm 之要求。設計參數為每一層疊板的厚度 t_1 、 t_2 及 t_3 ，壓電層厚度參數 t_1 及 t_3 其參數上限為 0.2 mm 參數下限為 1.0 mm ，鋁合金層厚度參數 t_2 其參數上限為 2.0 mm 參數下限為 3.0 mm 。

此最佳化問題之數學模型定義如下：

$$\text{最小化} \quad Weight = \sum_{i=1}^3 Lbt_i\rho_i$$

並滿足限制條件

$$|u_{tip}| \leq 2.0 \text{ mm}$$

$$0.2 \text{ mm} \leq t_1 \leq 1.0 \text{ mm}$$

$$2.0 \text{ mm} \leq t_2 \leq 3.0 \text{ mm}$$

$$0.2 \text{ mm} \leq t_3 \leq 1.0 \text{ mm}$$

其中：

L ：懸臂板長度

b ：懸臂板寬度

t_i ：壓電層厚度(設計變數)

ρ_i ：材料密度

u_{tip} ：壓電層端點在 z 方向之位移量

壓電層之材質為陶瓷壓電材料 PXE-5，其材料特性為： $E_1 = E_2 = E_3 = 66.6 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 25.6 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$ ， $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ， $d_{31} = d_{32} = -215 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ ， $p_{33} = 2100 \times p_0$ ， $p_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ， p_0 為真空狀態下的介電常數。

中間層之鋁合金材料特性為：

$E_1 = E_2 = E_3 = 69 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 25.94 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.33$ ， $\rho = 2720 \text{ kg/m}^3$ 。

應用 ANSYS 軟體建立正確的有限元素模型，材料特性的輸入是相當重要的，本研究分析的問題有壓電材料與複合材料結構，相對於一般等向性材料所輸入之楊氏模數及蒲松比，壓電材料之材料特性以彈性韌性係數、壓電常數及介電常數之型態輸入。元素的選取上，若要建立三維空間的立體模型，一般均質且等向之金屬材料採用 SOLID 45 元素。而壓電材料

由於應力、應變、電壓及電場之轉換，必須選擇適當之耦合元素，故採用 SOLID 5 之三維塊狀耦合元素 (3-D coupled-field solid) 此元素種類有八個節點，而每個節點具有六個自由度。

為配合 ANSYS 有限元素分析軟體之壓電材料特性輸入方法，必須將楊氏係數轉換成彈性韌性係數以利分析。轉換後之彈性韌性係數矩陣如下：

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 15.015 & -4.504 & -4.504 & 0 & 0 & 0 \\ -4.504 & 15.015 & -4.504 & 0 & 0 & 0 \\ -4.504 & -4.504 & 15.015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.062 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 39.062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39.062 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2 / \text{N}$$

壓電常數矩陣為：

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -215 \\ 0 & 0 & -215 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ C} / \text{N}$$

上述之材料特性於 ANSYS 之輸入表格可參照文獻[7]。

表 1 為有限元素分析初始值與最佳值之比較，其結構總重量由 40.400 g 降至 22.355 g，設計變數 t_1 及 t_3 厚度由 0.600 mm 降至 0.200 mm， t_2 厚度由 2.500 mm 降至 2.140 mm，其端點位移 u_{tip} 為 2.00 mm 並滿足限制條件之要求，本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[10]佳。圖 3 為三層壓電金屬複合層板結構之收斂歷程圖，由圖 3 可知本範例經過 4 次迭代得到最佳值。

範例二: 四層壓電複合薄板結構之輕量化設計

本範例為四層壓電複合薄板結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖 4 所示[11]。上下層為壓電材料，中間兩層為複合材料。上層壓電層負載電壓為 -180V，下層壓電層負載電壓為 +180V。懸臂板的長度 $L = 250 \text{ mm}$ ，懸臂板寬度 $b = 10 \text{ mm}$ 。其限制條件為上層壓電層端點在 z 方向之位移量 u_{tip} 不超過 2.0 mm 之要求。設計參數為每一層疊板的厚度 t_1 、 t_2 、 t_3 及 t_4 ，壓電層厚度參數 t_1 及 t_4 的上下限分別為 0.2 mm 至 1.0 mm，而複合材料層厚度參數 t_2 及 t_3 的上下限分別為 1.0 mm 至 2.0 mm，其纖維排列方向為 $[0^\circ/90^\circ]$ 。

此最佳化問題之數學模型定義如下：

$$\text{最小化} \quad \text{Weight} = \sum_{i=1}^4 Lbt_i\rho_i$$

並滿足限制條件

$$|u_{tip}| \leq 2.0 \text{ mm}$$

$$0.2 \text{ mm} \leq t_1 \leq 1.0 \text{ mm}$$

$$1.0 \text{ mm} \leq t_2 \leq 2.0 \text{ mm}$$

$$1.0 \text{ mm} \leq t_3 \leq 2.0 \text{ mm}$$

$$0.2 \text{ mm} \leq t_4 \leq 1.0 \text{ mm}$$

其中：

L : 懸臂板長度
 b : 懸臂板寬度
 t_i : 壓電層厚度(設計變數)
 ρ_i : 材料密度
 u_{tip} : 壓電層端點在 z 方向之位移量

壓電層之材質亦為陶瓷壓電材料 PXE-5，其材料特性為： $E_1 = E_2 = E_3 = 66.6 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 25.6 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$ ， $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ， $d_{31} = d_{32} = -215 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ ， $p_{33} = 2100 \times p_0$ ， $p_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ， p_0 為真空狀態下的介電常數。

中間層之複合材料特性為：

$E_1 = 55 \text{ GPa}$ ， $E_2 = E_3 = 16 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7.6 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.28$ ， $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ 。

為配合 ANSYS 有限元素分析軟體之壓電材料特性輸入方法，必須將楊氏係數轉換成彈性韌性係數以利分析。轉換後之彈性韌性係數矩陣如下：

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 15.015 & -4.504 & -4.504 & 0 & 0 & 0 \\ -4.504 & 15.015 & -4.504 & 0 & 0 & 0 \\ -4.504 & -4.504 & 15.015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.062 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 39.062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39.062 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

壓電常數矩陣為：

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -215 \\ 0 & 0 & -215 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ C/N}$$

上述之材料特性於 ANSYS 之輸入表格可參照文獻[7]。

因為複合材料有層疊的特性，必須給定層疊的數目與每一層疊纖維方向之角度及厚度才能進行分析，故本範例在 ANSYS 軟體中複合材料的元素種類採用 SOLID 46 元素。

表 2 為有限元素分析初始值與最佳值之比較，最佳化之結果其結構總重量由 38.40 g 下降至 23.053 g，設計變數 t_1 及 t_4 厚度由 0.600 mm 分別降至 0.200 mm 及 0.213 mm， t_2 厚度由 1.500 mm 增至 2.000 mm， t_3 厚度由 1.500 mm 降至 1.000 mm，其端點位移 u_{tip} 為 1.999 mm 亦滿足端點位移之限制條件，本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[7,11]為佳。圖 5 為四層壓電複合薄板結構之收斂歷程圖，本範例經過 13 次迭代可得到最佳值。

範例三: 壓電複合梯形斜板結構之自然頻率最大化設計

本範例為壓電複合梯形斜板結構之自然頻率最大化設計，其目標為提高第一個自然振動頻率 f_1 ，其結構外型與尺寸如圖 6 所示[11]。上下層為壓電材料，中間四層為複合材料。其限制條件為第一個自然振動頻率超過 50 Hz。設計參數為每一疊層板的角度 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 及 θ_5 ，考慮複合材料的對稱關係，可將第二層與第五層的角度設為相同之設計參數 θ_{25} ，第三層與第

四層的角度設計參數設為 θ_{34} 。參數 θ_{25} 及 θ_{34} 的上下限分別為 0° 至 $+90^\circ$ 。複合材料層的厚度為每層 1.0 mm，壓電材料層的厚度為每層 0.5 mm。

此最佳化問題之數學模型定義如下：

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && f_1 \\ & \text{並滿足限制條件} && \\ & && f_1 > 50\text{Hz} \\ & && 0^\circ \leq \theta_{25} \leq 90^\circ \\ & && 0^\circ \leq \theta_{34} \leq 90^\circ \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} f_1 &: \text{結構第一模態之自然振動頻率} \\ \theta_i &: \text{疊板角度(設計變數)} \end{aligned}$$

壓電層之材質為陶瓷壓電材料 PZT 5H，其材料特性為： $E_1 = E_2 = 69 \text{ GPa}$ ， $E_3 = 106 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 26.3 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.31$ ， $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ ， $d_{31} = d_{32} = -171 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ， $d_{33} = 374 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ， $p_{33} = 1700 \times p_0$ ， $p_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ， p_0 為真空狀態下的介電常數。

中間層之複合材料特性為：

$E_1 = 145 \text{ GPa}$ ， $E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4.8 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$ ， $\rho = 1580 \text{ kg/m}^3$ 。

為配合 ANSYS 有限元素分析軟體之壓電材料特性輸入方法，必須將楊氏係數轉換成彈性韌性係數以利分析。轉換後之彈性韌性係數矩陣為：

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 14.493 & -4.493 & -2.923 & 0 & 0 & 0 \\ -4.493 & 14.493 & -2.923 & 0 & 0 & 0 \\ -2.923 & -2.923 & 9.434 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38.023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38.023 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38.023 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2 / \text{N}$$

壓電常數矩陣為：

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -171 \\ 0 & 0 & -171 \\ 0 & 0 & 374 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ C/N}$$

上述之材料特性於 ANSYS 之輸入表格可參照文獻[7]。

表 3 為有限元素分析初始值與最佳值之較。由表 3 可知，第一個自然振動頻率由 33.515 Hz 提高至 50.181 Hz，設計變數 θ_{25} 角度由 10.000° 轉至 71.484° ， θ_{34} 角度由 10.000° 轉至 71.477° ，達到提高自然振動頻率的目的。本範例之結果與文獻[7,11]相比，雖然 θ_{25} 及 θ_{34} 的角度皆有些改變，但所求的最佳振動頻率並無太大的改變。圖 7 為壓電複合梯形斜板結構之收斂歷程圖，由圖 7 中顯示經過 4 次迭代得到最佳值，而文獻[7]需經過 7 次迭代才可得到最佳值，改良後的移動漸近線法比原始的移動漸近線法收斂效率佳。

範例四:六層壓電複合薄板結構之輕量化設計

本範例為六層壓電複合薄板結構之輕量化設計，其結構外型與尺寸如圖 8 所示[11]。上下層為壓電材料，中間四層為複合材料。上層壓電層負載電壓為+160V，下層壓電層負載電壓為-160V。其中壓電薄層長度 $L_1 = 80 \text{ mm}$ ，複合材料薄層長度 $L_2 = 260 \text{ mm}$ ，懸臂板寬度 $b = 40 \text{ mm}$ 。其限制條件為複合材料層端點在 z 方向之位移量 u_{tip} 不超過 1.5 mm 之要求。設計參數為每一疊層板的厚度 t_1 、 t_2 、 t_3 、 t_4 、 t_5 及 t_6 ，由於考慮疊層薄板的對稱關係， $t_1 = t_6$ ， $t_2 = t_5$ ， $t_3 = t_4$ ，因此可將設計參數簡化為 t_1 、 t_2 及 t_3 。壓電層厚度及複合材料層厚度參數 t_1 、 t_2 及 t_3 的上下限分別為 0.2 mm 至 1.0 mm 。複合材料纖維排列方向為 $[45^\circ/-45^\circ]_s$ 。此最佳化問題之數學模型定義如下：

$$\text{最小化} \quad \text{Weight} = 2 \sum_{i=1}^1 L_1 b t_i \rho_i + 2 \sum_{i=2}^3 L_2 b t_i \rho_i$$

並滿足限制條件

$$|u_{tip}| \leq 1.5 \text{ mm}$$

$$0.2 \text{ mm} \leq t_i \leq 1.0 \text{ mm}, i = 1, 2, 3$$

其中：

L ：懸臂板長度

b ：懸臂板寬度

t_i ：壓電層及複合材料層厚度(設計變數)

ρ_i ：材料密度

u_{tip} ：複合材料層端點在 z 方向之位移量

壓電層之材質為陶瓷壓電材料 PXE-52，其材料特性為： $E_1 = E_2 = E_3 = 62.5 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$ ， $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ， $d_{31} = d_{32} = -280 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ ， $d_{33} = 700 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ ， $p_{33} = 3890 \times p_0$ ， $p_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ， p_0 為真空狀態下的介電常數。

中間層之複合材料特性為：

$E_1 = 76 \text{ GPa}$ ， $E_2 = E_3 = 5.5 \text{ GPa}$ ， $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 2.1 \text{ GPa}$ ， $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.34$ ， $\rho = 1380 \text{ kg/m}^3$ 。

為配合 ANSYS 有限元素分析軟體之壓電材料特性輸入方法，必須將楊氏係數轉換成彈性韌性係數以利分析。轉換後之彈性韌性係數矩陣為：

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 16.000 & -4.800 & -4.800 & 0 & 0 & 0 \\ -4.800 & 16.000 & -4.800 & 0 & 0 & 0 \\ -4.800 & -4.800 & 16.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 41.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41.667 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

壓電常數矩陣為：

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -280 \\ 0 & 0 & -280 \\ 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ C/N}$$

上述之材料特性於 ANSYS 之輸入表格可參照文獻[7]。

表 8 為有限元素分析初始值與最佳值之較，最佳化之結果其結構總重量由 64.396 g 降至 50.734 g，設計變數 t_1 及 t_2 厚度由 0.600 mm 分別降至 0.341 mm 及 0.244 mm， t_3 厚度由 0.600 mm 增至 0.929 mm，其端點位移 u_{tip} 亦小於所限制的 1.500 mm，本範例之結果達到輕量化設計的目的，其最佳值也較文獻[9,11]佳。圖 9 為六層壓電複合薄板結構之收斂歷程圖。

五、 結論

本研究利用移動限制概念加入移動漸近線法的參數訂定的規則中，的確使移動漸近線法的收斂效率變高。改變中介變數 L_j 和 U_j 會對漸近線的凸性性質有影響，而漸近線的凸性性質會影響到近似的準確性，本研究發現中介變數 L_j 與 U_j 的大小會影響程式之收斂速率。

參數 α_j 和 β_j 是子問題的設計變數上下限，若 α_j 與 β_j 的值訂定的越好，則可使新求得的設計變數快速移動至最佳值附近。 α_j 及 β_j 等規則是應用移動限制概念所制定的，能使設計變數很快速地移動至最佳值附近，如此可以減少迭代的次數進而增進程式收斂的效率。由各範例之結構最佳化之收斂圖可知，如此可改善最佳化迭代的收斂速率。

本研究以 ANSYS 有限元素分析軟體中的 APDL 語法 FORTRAN 程式結合成一系統程式，並使用有限差分法計算靈敏度以獲得執行移動漸近線法所需之數據。範例中驗證改良式移動漸近線法於結構之最佳化設計上可以得到比其他文獻更好的結果。

六、 計畫成果自評

本研究完成整合壓電複合材料理論、移動漸近線法和最佳化方法等觀念於壓電複材層板結構最佳化設計，研究內容與原計畫完全相符，已達成預期成果目標。研究成果具有應用價值，適合在學術期刊發表。目前已先投稿至 2009 中華民國航空太空學會/中華民用航空學會聯合學術研討會，並被接受。此整合性的研究，對於壓電複材層板結構和最佳化設計的研究將會是很好的參考；不但可提供一種有效且可靠的方法予以設計壓電複材層板結構，同時對移動漸近線法和對偶法的應用有更深一層的了解。

七、 誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會贊助，計畫編號 NSC 97-2221-E-032-012，特此致謝。

八、 參考文獻

- [1] Svanberg, K., "The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 359-373, 1987.
- [2] Bruyneel, M. and Fleury, C., "A family of MMA approximations for structural optimization," Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 24, pp. 263-276, 2002.

- [3] Bruyneel M. and Fleury C., "Composite structures optimization using sequential convex programming," *Advances in Engineering Software*, Vol. 33, pp. 697-711, 2002.
- [4] Saldanha, R., Pelissier, S., Kadded, K., Yonnet, Y. P. and Coulomb, J.-L., "Nonlinear optimization methods applied to magnetic actuators design," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1581-1584, 1992.
- [5] Carlsson, P. and Tinnsten, M., "A distributed computing system used for concurrent optimization methods on a violin top," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 25, pp. 453-458, 2003.
- [6] 陳匡佑，應用移動漸近線法於有限元素的最佳化設計，淡江大學機械與機電工程研究所碩士論文，2007。
- [7] 郭純孜，應用移動漸進線法於結構之最佳化設計，淡江大學航空太空工程研究所碩士論文，2008。
- [8] Fleury, C., "Mathematical Programming Methods for Constrained Optimization: Dual Methods," *Structural Optimization: Status and Promise*, Vol. 150, pp. 123-150, 1992.
- [9] 黃建翰，應用逐次線性規劃法結合移動限制技術於結構最佳化設計之研究，淡江大學航空太空工程研究所碩士論文，2007。
- [10] 陳俊瑋，壓電薄板結構之最佳化設計，淡江大學航空太空工程研究所碩士論文，2004。
- [11] 柯星竹，應用遺傳演算法與類神經網路於結構最佳化設計之研究，淡江大學航空太空工程研究所碩士論文，2006。

表 1 範例一有限元素分析初始值與最佳值比較

	初始值	文獻[10]	本研究
$t_1(mm)$	0.600	0.200	0.200
$t_2(mm)$	2.500	2.145	2.140
$t_3(mm)$	0.600	0.200	0.200
總重量(g)	40.400	22.400	22.355
$u_{tip} \leq 2.0(mm)$	0.872	1.992	2.000

表 2 範例二有限元素分析初始值與最佳值比較

	初始值	文獻[7]	文獻[11]	本研究
$t_1(mm)$	0.600	0.200	0.298	0.200
$t_2(mm)$	1.500	1.866	1.032	2.000
$t_3(mm)$	1.500	1.001	1.549	1.000
$t_4(mm)$	0.600	0.251	0.299	0.213
總重量(g)	38.400	23.131	24.600	23.053
$u_{tip} \leq 2.0(mm)$	0.918	1.999	2.000	1.999

表 3 範例三有限元素分析初始值與最佳值比較

	初始值	文獻[7]	文獻[11]	本研究
θ_{25} (度)	10.000	71.500	71.560	71.484
θ_{34} (度)	10.000	71.562	70.320	71.477
$f_1(Hz) > 50Hz$	33.515	50.181	50.181	50.181

表 4 範例四有限元素分析初始值與最佳值比較

	初始值	文獻[9]	文獻[11]	本研究
$t_1(mm)$	0.600	0.351	0.382	0.341
$t_2(mm)$	0.600	0.520	0.568	0.244
$t_3(mm)$	0.600	0.655	0.566	0.929
總重量(g)	64.396	51.300	51.600	50.734
$u_{ip} \leq 1.5(mm)$	0.943	1.500	1.499	1.500

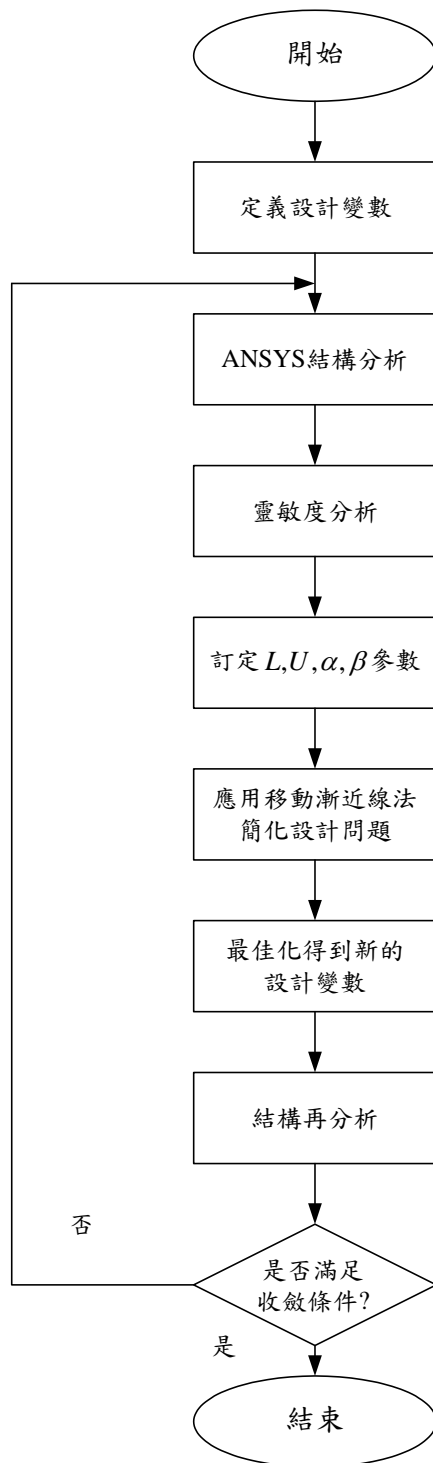


圖 1 執行流程圖

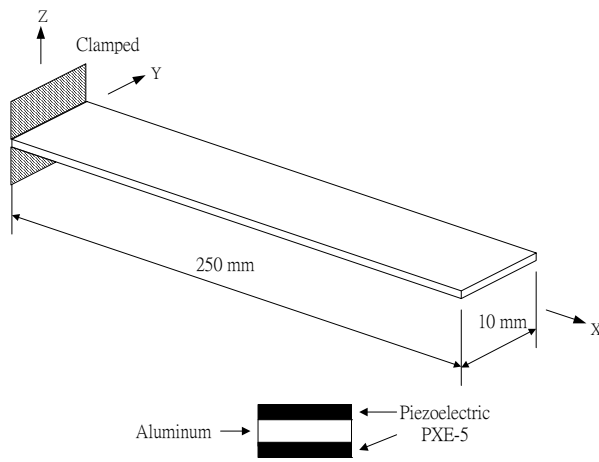


圖 2 三層壓電金屬複合層板結構外型圖

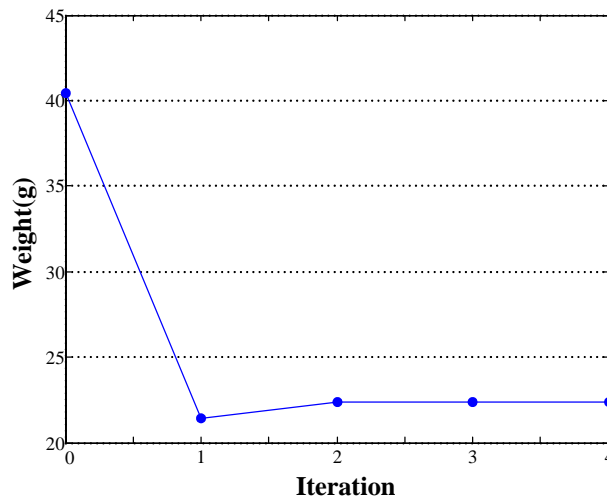


圖 3 範例一之收斂歷程圖

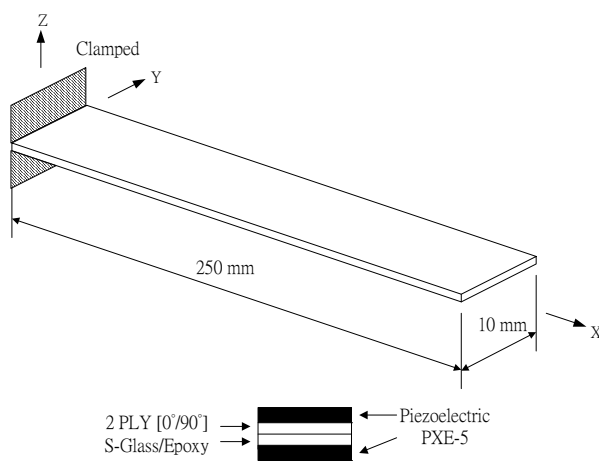


圖 4 四層壓電複合薄板結構外型圖

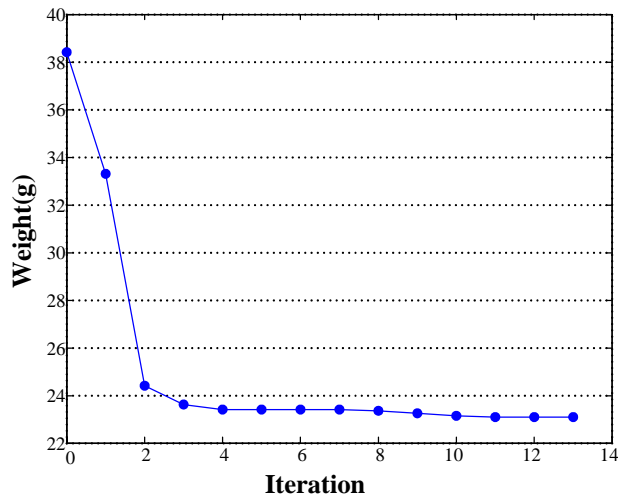


圖 5 範例二之收斂歷程圖

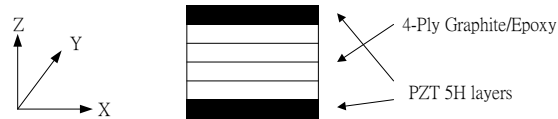
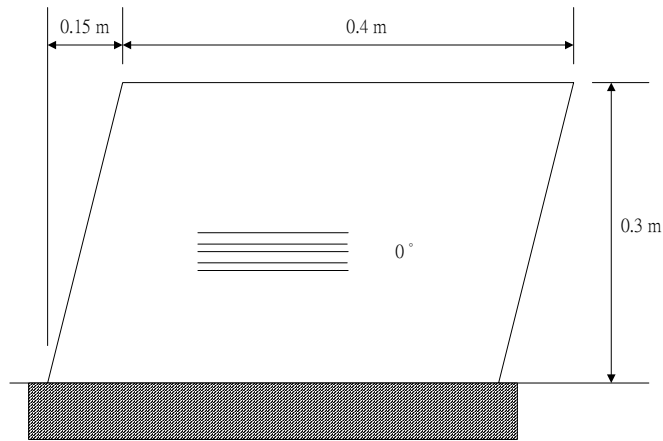


圖 6 壓電複合梯形斜板結構外型圖

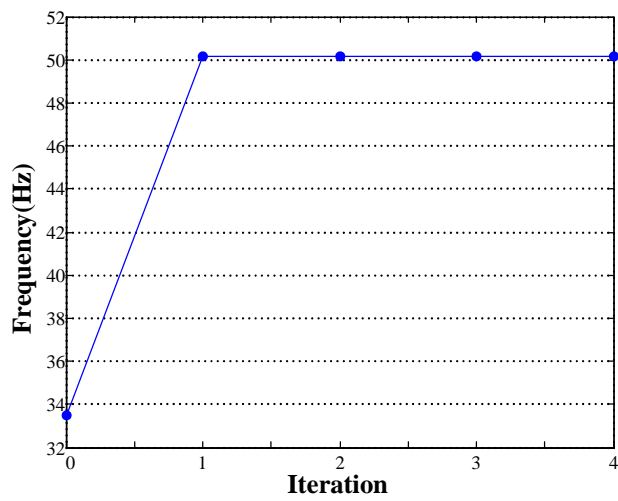


圖 7 範例三之收斂歷程圖

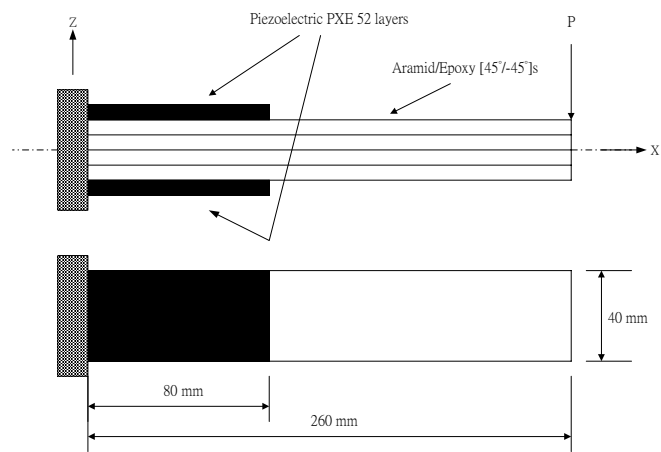


圖 8 六層壓電複合薄板結構外型圖

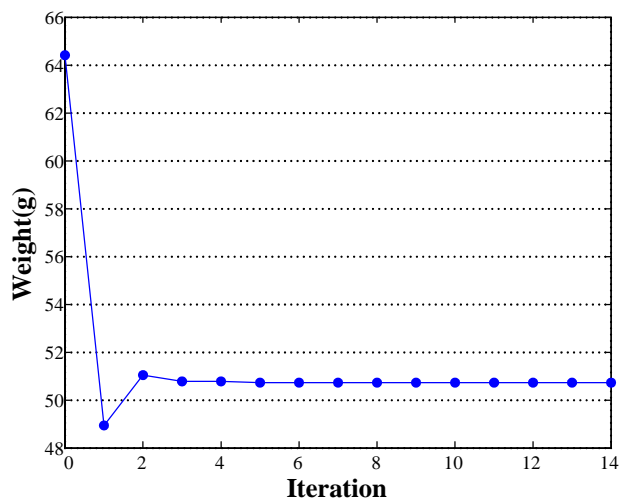


圖 9 範例四之收斂歷程圖