

1、前言

近年來關於智慧材料的開發已日趨熱門，其特別之處就是材料擁有類似生物能感受環境並做出適當反應的能力，而壓電材料即為其中之一種。壓電材料具有獨特的壓電效應特性，經常應用於振動的工作環境中，而且壓電材料大多是由脆性物質所構成（如壓電陶瓷、石英與水晶等），因此容易遭受破壞，一壞就無法修護，故在其設計與應用之初，壓電材料的力學破壞考量就顯得非常重要。

2、研究目的

本文研究之問題為採用半雙曲線近似下推導而得到的線彈性壓電控制方程式與本構方程式，解析一含裂紋之壓電材料受穩態簡諧載荷時的應力強度因子振幅大小及相位，並利用數值方法來分析應力強度因子振幅大小及相位，探討半雙曲線與穩靜態不同的近似對含裂紋之壓電材料破壞問題的影響。

3、文獻探討

研究線彈性壓電材料的破壞問題已經發展大約三十年，因為早期的壓電材料實驗與模型建構不易，所以在於理論解析時的線彈性壓電控制方程式與本構方程式皆使用穩靜態近似，來簡化壓電材料中應力與電場交互影響的複雜效應。Loeber and Sih[1]運用積分方程式與巧妙的積分轉換方法解出含有限裂紋的反平面純彈性材料受動力載荷的振動問題。而後 Chen and Yu[2]則是利用 Loeber and Sih[1]的結果，解析一含有限長度裂紋之無窮域壓電材料，於不可誘電邊界條件下反平面振動的問題。郭詮[3]研究一含有限長度裂紋之壓電材料，於真空邊界條件下受簡諧載荷的解析解，並且藉著調整真空介電常數來求得當其裂紋表面於不同程度的電位能轉移時，其應力強度因子振幅大小及相位的變化。但 Chen and Yu[2]與郭詮[3]所採用的壓電材料控制方程式與本構方程式皆為穩靜態近似下所得的。Li[4]研究一半無窮域橫向等向性(transversely isotropic)壓電材料的暫態波傳問題，他發現過去壓電材料的假設大都採用穩靜態近似法，也就是假設光速為無限大，如此雖可將問題簡化，但實際上會發現有部分的特性不符合實際的物理現象。因此，Li[4]提出半雙曲線近似，目的為保留壓電控制方程式中電場與位移的半雙曲線特性，並保留有限光速的影響來求得與物理現象中較合理的解析解。

4、研究方法

4.1 基本理論

在本文中考慮的是受反平面載荷及平面電位移，而討論材料為六角晶系壓電陶瓷(6mm 點群, C_{6v})，由麥斯威爾方程式(Maxwell's equation)、電場和電位能關係式、線彈性理論(linearly elastic theorem)之運動方程式、能量守恆與熱力學第一定律，並利用 Li [4] 所提出的半雙曲線近似，進而推導出含有限光速影響的線彈性壓電控制方程式及本構方程式。

壓電控制方程式可以表示如下

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_\ell^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

其中

$$\psi = \phi - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^s} C_f w, \quad (3)$$

$$C_f = \frac{c_\ell^2}{c_\ell^2 - c_s^2}, \quad (4)$$

$$c_s = \left(\frac{\bar{c}_{44}}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$\bar{c}_{44} = c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^s}. \quad (6)$$

w 為 z 方向的位移、 ϕ 為電位能、 c_{44}^E 為彈性係數、 e_{15} 為壓電常數、 ϵ_{11} 為介電常數、 ρ 為材料密度、 E 為電場強度、 c_ℓ 為壓電材料內的光波波速。

本構方程式可表示如下

$$\tau_{yz} = \tilde{c}_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (7)$$

$$D_y = e_{15} (1 - C_f) \frac{\partial w}{\partial y} - \epsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (8)$$

其中

$$\tilde{c}_{44} = \bar{c}_{44} - (1 - C_f) e_{15}^2 / \epsilon_{11}^s. \quad (9)$$

4.2 含裂紋之壓電材料之穩態問題分析

解析一無窮域之 C_{6v} (6mm) 壓電材料，內含一長度為 $2a$ 之裂紋，且裂紋位於 $y=0$ 、 $-a \leq x \leq a$ ，假設其裂紋面上，使用不可誘電的邊界條件，即是在裂紋面不導通電流，在有限光速的假設下受一反平面簡諧載荷的穩態問題，其幾何結構示意圖(如圖 1)所示。

本問題於 $y=0$ 線上的機械以及電場邊界條件可表示如下：

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -\tau_0 \exp(i\omega t) \quad |x| < a, \quad (10)$$

$$D_y(x, 0, t) = -D_0 \exp(i\omega t) \quad |x| < a, \quad (11)$$

$$\phi(x, 0, t) = 0 \quad |x| > a, \quad (12)$$

$$w(x, 0, t) = 0 \quad |x| > a. \quad (13)$$

所受之負載為一簡諧型式，故可以假設通解為：

$$w(x, y, t) = w^*(x, y) \exp(i\omega t), \quad (14)$$

$$\psi(x, y, t) = \psi^*(x, y) \exp(i\omega t), \quad (15)$$

其中 $w^*(x, y)$ 、 $\psi^*(x, y)$ 分別代表 $w(x, y, t)$ 與 $\psi(x, y, t)$ 的振幅大小與時間無關， ω 為振動頻率。

由線性壓電控制方程式，可以化簡為荷姆荷茲程式 (Helmholtz equation) 的型式如下：

$$\left[\nabla^2 + \alpha_s^2 \right] w^*(x, y) = 0, \quad (16)$$

$$\left[\nabla^2 + \alpha_\ell^2 \right] \psi^*(x, y) = 0, \quad (17)$$

其中

$$\alpha_s = \frac{\omega}{c_s}, \quad (18)$$

$$\alpha_\ell = \frac{\omega}{c_\ell}. \quad (19)$$

因此表示位移及 ψ 空間域的通解如下：

$$w^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) \exp(-\beta_s y) \cos(sx) ds, \quad (20)$$

$$\psi^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(s) \exp(-\beta_\ell y) \cos(sx) ds, \quad (21)$$

其中

$$\beta_s = \sqrt{s^2 - \alpha_s^2}, \quad (22)$$

$$\beta_\ell = \sqrt{s^2 - \alpha_\ell^2}. \quad (23)$$

則位移的通解可以表示為：

$$w(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) \exp(-\beta_s y + i\omega t) \cos(sx) ds, \quad (24)$$

電位能的通解可以表示為：

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = & \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^s} C_f \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) \exp(-\beta_s y + i\omega t) \cos(sx) ds \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(s) \cdot \exp(-\beta_\ell y + i\omega t) \cos(sx) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

位移與電位能滿足本構方程式可知其剪應力的通解為：

$$\tau_{yz}(x, y, t) = -\tilde{c}_{44} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\beta_s) A(s) \exp(-\beta_s y + i\omega t) \cos(sx) ds$$

$$-e_{15} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\beta_{\ell}) B(s) \exp(-\beta_{\ell} y + i\omega t) \cos(sx) ds. \quad (26)$$

電位移的通解：

$$\begin{aligned} D_y(x, y, t) = & -e_{15}(1-C_f) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\beta_s) A(s) \exp(-\beta_s y + i\omega t) \cos(sx) ds \\ & + \varepsilon_{11}^s \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\beta_{\ell}) B(s) \exp(-\beta_{\ell} y + i\omega t) \cos(sx) ds. \end{aligned} \quad (27)$$

滿足邊界條件，由剪應力、電位移、電位能及位移關係可以整理得到下列積分方程組：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(s) \cos(sx) ds = 0, & \quad |x| > a, \end{aligned} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\beta_s) A(s) \cos(sx) ds = \frac{1}{\tilde{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right), & \quad |x| < a, \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(s) \cos(sx) ds = 0, & \quad |x| > a, \end{aligned} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\beta_{\ell}) B(s) \cos(sx) ds = \frac{\tau_0 e_{15} (1-C_f) - D_0 \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}}, & \quad |x| < a, \end{aligned} \right. \quad (31)$$

經過多次的積分技巧轉換，可求得：

$$A(s) = \frac{\pi a^2}{2\tilde{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15} D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \int_0^1 \sqrt{\xi} \Phi_1(\xi) J_0(sa\xi) d\xi, \quad (32)$$

$$B(s) = \frac{\pi a^2}{2} \frac{\tau_0 e_{15} (1-C_f) - D_0 \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \int_0^1 \sqrt{\xi} \Phi_2(\xi) J_0(sa\xi) d\xi, \quad (33)$$

其中弗萊德積分方程式(Fredholm integral equation)關係如下：

$$\Phi_1(\xi) + \int_0^1 \Phi_1(\eta) F_1(\xi, \eta) d\eta = \sqrt{\xi}, \quad (34)$$

$$\Phi_2(\xi) + \int_0^1 \Phi_2(\eta) F_2(\xi, \eta) d\eta = \sqrt{\xi}, \quad (35)$$

$$F_1(\xi, \eta) = \sqrt{\xi\eta} \int_0^{\infty} s \left[f_s \left(\frac{s}{a} \right) - 1 \right] J_0(s\xi) J_0(s\eta) ds, \quad (36)$$

$$F_2(\xi, \eta) = \sqrt{\xi\eta} \int_0^{\infty} s \left[f_{\ell} \left(\frac{s}{a} \right) - 1 \right] J_0(s\xi) J_0(s\eta) ds, \quad (37)$$

$$f_s(s) = \frac{\beta_s(s)}{s}, \quad (38)$$

$$f_{\ell}(s) = \frac{\beta_{\ell}(s)}{s}. \quad (39)$$

由所求得的 $A(s)$ 與 $B(s)$ ，則可以得知剪應力的解：

$$\tau_{yz}(x, y, t) = \exp(i\omega t) \left\{ -\int_0^\infty \frac{a\beta_s}{s} \left(\frac{\tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \right) \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \Phi_1(1) J_1(as) \exp(-\beta_s y) \cos(sx) ds \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{a\beta_\ell}{s} \left[\frac{\tau_0 e_{15}^2 (1-C_f) - D_0 e_{15} \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \right] \Phi_2(1) J_1(as) \exp(-\beta_\ell y) \cos(sx) ds \right\}, \quad (40)$$

電位移的解：

$$D_y = \exp(i\omega t) \left\{ -\int_0^\infty \frac{a\beta_s}{s} \left[\frac{e_{15}(1-C_f)}{\bar{c}_{44}} \right] \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \Phi_1(1) J_1(as) \exp(-\beta_s y) \cos(sx) ds \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{a\beta_\ell}{s} \left[\frac{\tau_0 e_{15} (1-C_f) - D_0 \tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \right] \Phi_2(1) J_1(as) \exp(-\beta_\ell y) \cos(sx) ds \right\}. \quad (41)$$

應力強度因子的振幅大小：

$$|K_3^\tau(t)| = \left\{ \left\{ \frac{\tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \operatorname{Re}[\Phi_1(1)] + \left[\frac{\tau_0 e_{15}^2 (1-C_f) - D_0 e_{15} \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \right] \operatorname{Re}[\Phi_2(1)] \right\}^2 \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \operatorname{Im}[\Phi_1(1)] + \left[\frac{\tau_0 e_{15}^2 (1-C_f) - D_0 e_{15} \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \right] \operatorname{Im}[\Phi_2(1)] \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi a}. \quad (42)$$

相位關係：

$$\tan \delta = \left\{ \frac{\frac{\tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \operatorname{Im}[\Phi_1(1)] + \left[\frac{\tau_0 e_{15}^2 (1-C_f) - D_0 e_{15} \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \right] \operatorname{Im}[\Phi_2(1)]}{\frac{\tilde{c}_{44}}{\bar{c}_{44}} \left(\tau_0 + \frac{e_{15}D_0}{\varepsilon_{11}^s} \right) \operatorname{Re}[\Phi_1(1)] + \left[\frac{\tau_0 e_{15}^2 (1-C_f) - D_0 e_{15} \tilde{c}_{44}}{e_{15}^2 (1-C_f) + \varepsilon_{11}^s \tilde{c}_{44}} \right] \operatorname{Re}[\Phi_2(1)]} \right\}. \quad (43)$$

4.3 數值計算方法

本問題解析解中的弗萊德積分方程式是我們必須要求解的積分方程式，針對其中方程式積分的部份本文利用高斯積分法(Gaussian quadrature)運算，再配合 LU 法(LU decomposition)解聯立方程組，以計算本問題的應力強度因子。

4.3.1 高斯積分法

高斯積分法常用來求解積分方程式，原理為將積分式轉換成為級數形式，為求 Φ_1 、 Φ_2 函數值

$$\Phi_1(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i F_1(\eta_j, \eta_i) \Phi_1(\eta_i) = \sqrt{\eta_j}. \quad (44)$$

其中 n 為高斯積分點的數量，本文使用高斯 24 點積分， w_i 為高斯積分的權重因子， t_i 為高斯積分點的函數值。

4.3.2 L. U.法

L.U.法是將聯立方程組轉換成為矩陣形式，再利用矩陣運算求得聯立解 $\Phi_1(\eta_1) \sim \Phi_1(\eta_{24})$ 可以得到 $\Phi_1(1)$ ，同理也可解得 $\Phi_2(1)$ 。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}w_1F_1(\eta_1,\eta_1)+1 & \frac{1}{2}w_2F_1(\eta_1,\eta_2) & \cdots & \frac{1}{2}w_{24}F_1(\eta_1,\eta_{24}) \\ \frac{1}{2}w_1F_1(\eta_2,\eta_1) & \frac{1}{2}w_2F_1(\eta_2,\eta_2)+1 & \cdots & \frac{1}{2}w_{24}F_1(\eta_2,\eta_{24}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}w_1F_1(\eta_{24},\eta_1) & \frac{1}{2}w_2F_1(\eta_{24},\eta_2) & \cdots & \frac{1}{2}w_{24}F_1(\eta_{24},\eta_{24})+1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_1(\eta_1) \\ \Phi_1(\eta_2) \\ \vdots \\ \Phi_1(\eta_{24}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\eta_1} \\ \sqrt{\eta_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\eta_{24}} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

分別將得到的 $\Phi_1(1)$ 、 $\Phi_2(1)$ 解代回解析解，進而得知此含裂紋壓電材料受簡諧振動負載時的應力強度因子振幅大小以及相位關係圖(如圖 2、圖 3)。由兩圖中可發現穩靜態與半雙曲線近似的數值結果幾乎沒有差別，這是因為雖然我們考慮了光速的影響，但光速實在太大了，因此我們可知於此問題而言以穩靜態近似來分析即以足夠。由圖 2 中可以發現應力強度因子的最大振幅大約發生在 $a\alpha_s = 1$ 附近，即約在振動頻率 $\omega = c_s/a$ 時。相同地，由圖 3 也可發現相位約在 $a\alpha_s = 2$ 時會發生最大值，即是振動頻率 $\omega = 2c_s/a$ 。

圖 4 及圖 5 則是考慮在壓電材料中，對裂紋面施加不同大小之平面電位移負載所得到的應力強度因子振幅大小及相位與振動頻率之關係圖，即分別考慮 $e_{15}D_0/(\tau_0\varepsilon_{11}^s) = 0.0$ 、 0.1 、

0.2 及 0.5 之狀況，由於我們將 τ_0 設為無因次化參數，而 e_{15} 及 ε_{11}^s 為材料常數，因此

$e_{15}D_0/(\tau_0\varepsilon_{11}^s)$ 之值可代表電位移負載大小之改變，亦可代表不同材料常數 $e_{15}/\varepsilon_{11}^s$ 比值之改

變。由圖 4 可以得知在無因次化頻率 $a\alpha_s \leq 2.5$ 時，施加於裂紋面的平面電位移負載增加，而應力強度因子振幅大小也會隨之加大，而無因次化頻率 $a\alpha_s > 2.5$ 時，平面電位移負載大小與應力強度因子振幅大小則未必具有正比的關係存在，此外由圖 4 中，我們可知施加不同電位移負載時，應力強度因子振幅的最大值都約產生在 $a\alpha_s = 1$ 附近。另外在相位結果圖 5 中，可知當施加於裂紋面的平面電位移負載增加時，相位最大值會產生於 $a\alpha_s = 2$ ，且相位的最大值隨著負載加大而增大，而 $a\alpha_s = 3.5$ 時會有相位曲線有轉折向上的趨勢。

可以得知應力強度因子振幅大小與相位受到不同平面電位移負載時，鋒值會與振動頻率有關，因此圖 6 與圖 7 為在半雙曲線近似下，含裂紋之壓電材料於負載之振動頻率增加時，所得到的應力強度因子振幅大小及相位之關係圖。從圖 6 中發現，應力強度因子振幅大小會隨著振動頻率改變而有震盪的現象產生，而隨著負載之振動頻率增加應力強度因子振幅大小的鋒值則有漸小並且曲線趨於平緩的趨勢，其最大值會發生在第一次峰值的位置

約在 $a\alpha_s = 1$ 。圖 7 可以知道相位的峰值也會隨著負載之頻率而有震盪的現象產生，而第一次的峰值則為所有峰值中最小的一個。

由以上結果可以發現穩靜態與半雙曲近似下，其應力強度因子振幅的最大值，大約發生在振動頻率等於剪力波波速除以裂紋長度的時候；相位關係的第一個峰值則約是發生在振動頻率等於兩倍剪力波波速除以裂紋長度之時，而且對於不同壓電材料的材料參數做無因次化時，可發現我們放大電的效應時，壓電材料的應力強度因子振幅大小與相位會明顯的增加，且與振動頻率有關，此外，由圖 2 與圖 3 中亦可以發現兩種不同的假設下之應力強度因子振幅大小與相位都非常接近，所以使用有限光速的假設對於受簡諧負載之含裂紋壓電材料的應力強度因子振幅大小與相位並沒有顯著的影響。

5、結果與討論

5.1 結論

含裂紋之壓電材料的解析問題，以往的研究都由於建立壓電材料模型不易，而且其機械應力與電場間的交互影響甚為複雜，因此分析研究時都採用穩靜態的近似，即是忽略光波對於壓電材料與裂紋的影響，近年來由於壓電材料研究已經具有相當深厚的基礎，因此本文進一步研究當光波波速為有限值的影響時，對含裂紋之壓電材料受簡諧負載的穩態問題作分析，並比較與穩靜態近似下的解析解與數值解，發現其解析過程變得較為繁雜，且數值計算也不容易收斂，但是應力強度因子振幅大小與相位的計算結果只產生極小的變化。

6、計畫成果自評

本計畫成果解析出在半雙曲線近似假設下含裂紋壓電材料之動力破壞問題，所計算的結果比起文獻中的資料要精確，且能計算更長時間的響應，因此本研究結果可資未來發表。本研究成功地完成了原申請計畫第一年部分，關於功能性梯度部分（原第二年計畫未獲補助）將待後續計畫繼續研究。

6、參考文獻

- [1]. Loeber, J. F. and Sih, G. C. (1968) "Diffraction of Antiplane Shear Waves by a Finite Crack," *The Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 44, pp.90-98.
- [2]. Chen, Z. T. and Yu, S. W., (1998) "Anti-plane vibration of cracked piezoelectric materials," *Mechanics Research Communication*, Vol. 25, No.3, pp. 321-327.
- [3]. 郭詮 (2004) "含裂紋壓電材料受簡諧載荷之動態解析," 淡江大學航太工程學系碩士論文
- [4]. Li, S., (2000) "Transient wave propagation in a transversely isotropic piezoelectric half space," *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 51, pp.236-266.

7、圖表彙整

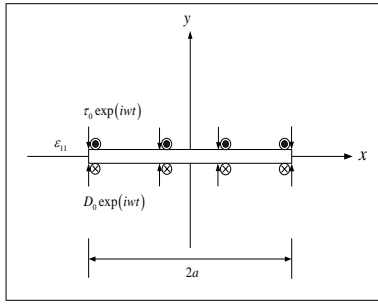


圖 1 幾何結構圖

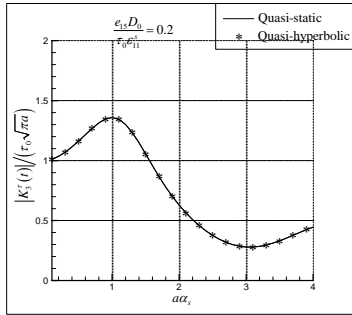


圖 2 含裂紋之壓電材料分別於穩靜態近似以及半雙曲線近似下，其應力強度因子的振幅大小關係圖

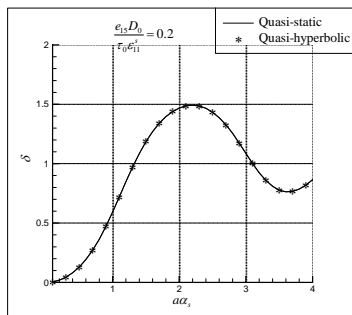


圖 3 含裂紋之壓電材料分別於穩靜態近似以及半雙曲線近似下，其相位關係圖

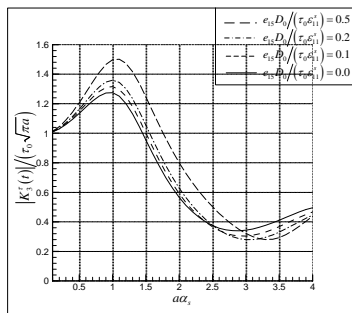


圖 4 含裂紋之壓電材料於半雙曲線近似下，於不同平面電位移負載所得到的應力強度因子振幅大小關係圖

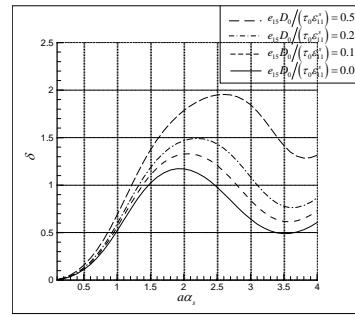


圖 5 含裂紋之壓電材料於半雙曲線近似下，於不同平面電位移負載所得到的相位關係圖

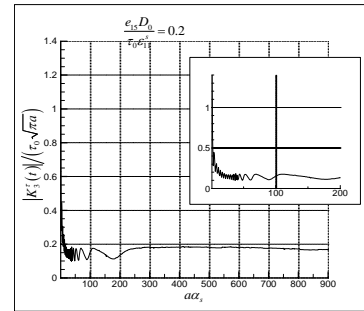


圖 6 含裂紋之壓電材料於半雙曲線近似下，於較大振動頻率時所得到的應力強度因子振幅大小關係圖

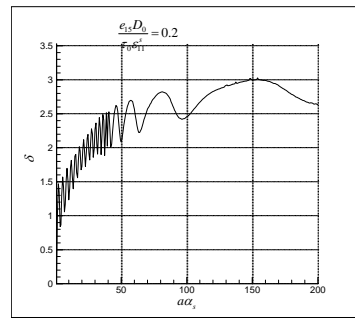


圖 7 含裂紋之壓電材料於半雙曲線近似下，於較大振動頻率時所得到的相位關係圖