

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

純彈與壓電複合材料脫層問題之暫態分析與研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-032-003-

執行期間：94年08月01日至95年07月31日

執行單位：淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：蔡忠翰、黃俊元、吳盈稷

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 11 日

摘要

本文研究內含界面層裂紋之彈壓電複合材料的動力破壞問題，解析一含半無限長電極型界面裂紋之彈壓電複合材料，於裂紋面上施加一對反平面動力點載荷之暫態效應。本文使用積分轉換法及 Wiener-Hopf 技巧推導彈壓電複合材料在一次拉氏轉換域中，於裂紋面受空間指數型應力分佈的基本解，並利用所求得之基本解來解析此包含特徵長度的複合壓電材料動力破壞問題，接著使用 Cagniard-de Hoop 方法來做拉氏逆轉換得到時域中的解。最後，針對應力與電位移強度因子等解析解做詳細的數值計算與討論。

關鍵字：彈壓電複合材料、界面裂紋、應力強度因子、動力破壞

一、前言

壓電材料發現至今已超過一百餘年，其獨特的壓電性近年來已被工業界所廣泛的使用。一般以陶瓷類作為壓電材料，如鈦酸鋇(BaTiO₃)、鈦酸鉛鋅(PZT)；其他的壓電材料有單晶類，如石英(quartz)、電氣石、羅德鹽、鉍酸鹽、鉍酸鹽等，或薄膜類如氧化鋅(ZnO)以及複合壓電材料等。其中陶瓷材料因有製造容易、可製成任何形狀、且其特性可隨組成做多樣性的變化等優點，目前已經成為壓電元件的主流。而尤以 PZT 系列之壓電材料在一般民生及產業應用中最具代表性。尤其是在高科技的電子電機與精密機械工業上有十分廣泛的應用，例如濾波器(filter)、感測器(sensor)、轉換器(transducer)、致動器(actuator)、聲納系統(sonar system)、超音波產生器(ultrasonic generator) 與點火元件等方面。但因為壓電材料大多是由脆性物質所構成，本身容易遭受破壞，且應用時多處於振動狀態，故其相關動力破壞問題的研究已不容忽視。

複合壓電材料，即壓電與壓電材料之複合層板或彈性材料與壓電陶瓷之複合層板，其獨特壓電行為在這幾年已被工業界所重視，如運用獨特之複合壓電體與電極構造，可發展出高耐熱性、高感度之感壓感測器以及多層感測器(multilayer sensor)等，於是複合壓電材料所衍生的界面裂紋問題亦是目前著重的課題。

因為數學上的困難，壓電材料的動力破壞分析較少被注重，直到 Shindo and Ozawa[1]首次研究含裂紋

之壓電材料受平面簡諧波的穩態解析，在此之後壓電材料的動力破壞研究才迅速的發展起來，而壓電複合材料的破壞問題亦隨著壓電材料的研究發展而逐漸受到重視，但由於數學上的困難，剛開始大多的學者都是搭配數值的方法來求得裂紋問題的解。直到 Li and Mataga[2-3]首度求得六角晶系壓電材料含擴展裂紋的應力與電位移強度因子以及能量釋放率的暫態解析解。

本文首先利用積分轉換法與 Wiener-Hopf 技巧推導出拉氏轉換域下的解，再利用 Cagniard-de Hoop[4]方法作拉氏逆轉換求得全場解析解，並針對應力及電位移強度因子做數值討論。

二、理論基礎

在本章中將介紹線彈性壓電材料與純彈性之控制方程式及本構方程式等。

(一)、線彈性壓電控制與本構方程式

壓電材料之控制方程式是由線彈性理論與麥斯威爾方程式以及電場與電位移之關係式推導而得，本文所討論之壓電材料為六角晶系壓電陶瓷(6mm 點群， C_{6v})，本文考慮受反平面動力載荷，所以壓電控制方程式可表示如下

$$c_{44}\nabla^2 w + e_{15}\nabla^2 \phi = \rho \ddot{w}, \quad (1)$$

$$e_{15}\nabla^2 w - \varepsilon_{11}\nabla^2 \phi = 0, \quad (2)$$

其中 w 為 z 方向的位移、 ϕ 為電位能、 c_{44} 為彈性係數、 e_{15} 為壓電常數、 ε_{11} 為介電常數、 ρ 為材料密度。其本構方程式可表示如下

$$\tau_{xz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (6)$$

(二)、純彈性材料控制與本構方程式

$$\nabla^2 w^{(e)} = \frac{\rho^{(e)}}{\mu^{(e)}} \ddot{w}^{(e)}, \quad (7)$$

$$\tau_{xz}^{(e)} = \mu^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\tau_{yz}^{(e)} = \mu^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (9)$$

三、半無限長界面裂紋受反平面指數型應力之基本解

我們首先探討一含半無限長界面裂紋之無窮域壓電複合材料，承受反平面機械負載時在拉氏域中之基本解，此基本解對我們日後研究複雜問題時有相當大的助益。首先考慮一由半平面壓電材料 ($y \geq 0$) 及半平面純彈性材料 ($y \leq 0$) 所構成之複合材料，有一半無限長之界面裂紋位於 $y = 0$ 、 $-\infty < x < 0$ ，其中壓電材料結晶點群特性為六角結晶系。假設在時間 $t < 0$ ，此結構處於無曳引力之平衡狀態，當時間 $t = 0$ 時，施加一拉氏域中之指數分佈的反平面曳引力於裂紋面上，本研究使用電極型式之裂紋邊界條件，即在 $y = 0$ 、 $x < 0$ 之界面裂紋上鍍上一層極薄的導電金屬，並且完美接地，而在 $y = 0$ 、 $x > 0$ 之界面上，因所搭配之純彈性材料為導電材質，且假設電阻極小，壓電材料界面之電位能可隨及讓彈性材料導離界面，所以我們可以假設在 $y = 0$ 、 $x > 0$ 之界面亦為完美接地，其幾何結構示意圖如圖 1 所示。其邊界條件可表示如下述三式

$$\bar{\tau}_{yz}^{(e)}(x, 0, s) = \bar{\tau}_{yz}^{(e)}(x, 0, s) = e^{s\eta x}, \quad -\infty < x < 0, \quad (10)$$

$$w(x, 0, t) = w^{(e)}(x, 0, t), \quad 0 < x < \infty, \quad (11)$$

$$\phi(x, 0, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (12)$$

其中 s 為拉普拉斯轉換域參數、 η 為一常數、 w 為壓電材料之位移、 $w^{(e)}$ 為純彈性材料之位移。

首先利用 $\psi = \phi - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w$ 做變數變換將式(1)與式

(2)轉換為如下所示的壓電控制方程式

$$\nabla^2 w(x, y, t) = \frac{\rho}{\bar{c}_{44}} \ddot{w}(x, y, t), \quad (13)$$

$$\nabla^2 \psi(x, y, t) = 0, \quad (14)$$

其中 $\bar{c}_{44} = c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}$ 為壓電剛性彈性常數，且壓電本構方程式也可變換如下

$$\tau_{xz}(x, y, t) = \bar{c}_{44} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\tau_{yz}(x, y, t) = \bar{c}_{44} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad (16)$$

$$D_x(x, y, t) = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (17)$$

$$D_y(x, y, t) = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad (18)$$

且可以由材料的控制方程式(7)、(13)、(14)三式分別對時間 t 與位置 x 做兩次拉普拉斯轉換，即可求得其通解型式如下

$$\bar{w}^*(\lambda, y, s) = A(s, \lambda) e^{-s\alpha(\lambda)y}, \quad (19)$$

$$\bar{\psi}^*(\lambda, y, s) = B(s, \lambda) e^{-s\beta(\lambda)y}, \quad (20)$$

$$\bar{w}^{(e)*}(\lambda, y, s) = A^{(e)}(s, \lambda) e^{s\alpha^{(e)}(\lambda)y}. \quad (21)$$

其中

$$\alpha(\lambda) = \sqrt{b^2 - \lambda^2} = \sqrt{b + \lambda} \sqrt{b - \lambda} = \alpha_+(\lambda) \alpha_-(\lambda), \quad (22)$$

$$\alpha^{(e)}(\lambda) = \sqrt{b^{(e)2} - \lambda^2} = \sqrt{b^{(e)} + \lambda} \sqrt{b^{(e)} - \lambda} = \alpha_+^{(e)}(\lambda) \alpha_-^{(e)}(\lambda) \quad (23)$$

$$\beta(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon^2 - \lambda^2}. \quad (24)$$

$A(s, \lambda)$ 、 $B(s, \lambda)$ 、 $A^{(e)}(s, \lambda)$ 為待定系數可由邊界求得。將邊界條件取兩次拉普拉斯轉換如下

$$\bar{\tau}_{yz}^*(\lambda, 0, s) = \bar{\tau}_{yz}^{(e)*}(\lambda, 0, s) = \frac{1}{s(\eta - \lambda)} + \bar{\tau}_+^*(\lambda, s) \quad (25)$$

$$\bar{w}^*(\lambda, 0, s) = \bar{w}^{(e)*}(\lambda, 0, s) = A_+, \quad 0 < x < \infty. \quad (26)$$

其中 $\text{Re}[\eta] > \text{Re}[\lambda]$ ，且 A_+ 為裂紋前端延長線之位移函數。此種邊界條件為混合型的邊界值問題，為求解此類型問題，本研究採用 Wiener-Hopf 技巧在 $\text{Re}[\eta] > \text{Re}[\lambda]$ 的限制下求解。

首先利用(19)、(21)、(25)、(26)四式可得在 $y = 0$ 時兩次拉氏域下的位移函數及剪應力如下

$$\bar{w}^*(\lambda, 0, s) = A = A_- + A_+, \quad (27)$$

$$\bar{w}^{(e)*}(\lambda, 0, s) = A^{(e)} = A_-^{(e)} + A_+, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(e)} s \alpha^{(e)}(\lambda) A^{(e)} &= \left[\frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}} s \beta(\lambda) - \bar{c}_{44} s \alpha(\lambda) \right] A \\ &= \frac{1}{s(\eta - \lambda)} + \bar{\tau}_+^*(\lambda, s). \end{aligned} \quad (29)$$

其中 A_- 與 $A_-^{(e)}$ 分別為轉換域中壓電材料與純彈性材料於裂紋面上 ($x < 0$) 的位移函數。

由(27)、(28)兩式代入(29)式消去 A_+ 整理可得如下

$$\mu^{(e)} \alpha^{(e)}(\lambda) G(\lambda) \tilde{A}_- = N(\lambda) \left[\frac{1}{s^2(\eta - \lambda)} + \frac{\bar{r}_+^*}{s} \right], \quad (30)$$

其中

$$G(\lambda) = \alpha(\lambda) - k_e^2 \beta(\lambda), \quad (31)$$

$$N(\lambda) = \alpha(\lambda) + \frac{\mu^{(e)}}{\bar{c}_{44}} \alpha^{(e)}(\lambda) - k_e^2 \beta(\lambda). \quad (32)$$

$$\text{且 } \tilde{A}_- \equiv A^{(e)} - A = A_-^{(e)} - A_-.$$

在使用 Wiener-Hopf 技巧拆解(30)式前,須將(31)及(32)兩式拆解為正負函數相乘,本研究使用柯西積分定理拆解函數 $G(\lambda)$ 及 $N(\lambda)$ 。利用柯西積分定理拆解 $G(\lambda)$ 函數可得

$$G(\lambda) = (1 - k_e^2) \sqrt{b_{bg}^2 - \lambda^2} S_1(\lambda), \quad (33)$$

其中

$$S_1(\lambda) = S_{1+}(\lambda) \times S_{1-}(\lambda), \quad (34)$$

$$S_{1+}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{bg} + \lambda}{b + \lambda}} Q_{1+}, \quad (35)$$

$$S_{1-}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{bg} - \lambda}{b - \lambda}} Q_{1-}, \quad (36)$$

且

$$Q_{1+}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^b \tan^{-1} \left[\frac{k_e^2 z}{\alpha(z)} \right] \frac{dz}{z + \lambda} \right\}, \quad (37)$$

$$Q_{1-}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^b \tan^{-1} \left[\frac{k_e^2 z}{\alpha(z)} \right] \frac{dz}{z - \lambda} \right\}. \quad (38)$$

其中 b_{bg} 為壓電材料 BG 表面波之慢度。

利用柯西積分拆解 $N(\lambda)$, 但在複合材料內壓電材料與純彈性材料剪力波波速之快慢不同拆解所得的 $N(\lambda)$ 亦不同, 且因為 $N(\lambda)$ 會因為複合材料內材料的搭配而會有有根及無根兩種情況, 所以我們可藉由複變參數定理歸納出

1. 壓電剪力波波速大於純彈性剪力波波速:

$$c^{(e)} > c \sqrt{1 - \left(\frac{e_{15}^2}{\bar{c}_{44} \varepsilon_{11}} \right)^2} = c_{bg}, \quad (39)$$

即純彈性材料剪力波波速大於 BG 表面波波速時函數會有兩實根。

2. 壓電剪力波波速小於純彈性剪力波波速:

$$c > c^{(e)} \sqrt{1 - \left(\frac{e_{15}^2}{\mu^{(e)} \varepsilon_{11}} \right)^2}. \quad (40)$$

即壓電材料剪力波波速大於某個含數值時時函數會有兩實根, 且 $N(\lambda)$ 函數所求得之兩實根為 $\pm b_{mt}$, 我們定義為 MT 表面波[5]。

所以本文在此將分為四種情況來做拆解: $c > c^{(e)}$ 且材料界面產生 MT 表面波、 $c < c^{(e)}$ 且材料界面產生 MT 表面波、 $c > c^{(e)}$ 且材料界面無 MT 表面波、 $c < c^{(e)}$ 且材料界面無 MT 表面波。

當壓電複合材料為第一種情況時, 即壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速且材料界面產生 MT 表面波時, 我們利用柯西積分定理拆解 $N(\lambda)$ 函數可得如下

$$N(\lambda) = \left(1 + \frac{\mu^{(e)}}{\bar{c}_{44}} - k_e^2 \right) \sqrt{b_{mt}^2 - \lambda^2} S_2(\lambda), \quad (41)$$

其中

$$S_2(\lambda) = S_{2+}(\lambda) \times S_{2-}(\lambda), \quad (42)$$

$$S_{2+}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{mt} + \lambda}{b^{(e)} + \lambda}} Q_{2+}, \quad (43)$$

$$S_{2-}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{mt} - \lambda}{b^{(e)} - \lambda}} Q_{2-}, \quad (44)$$

當壓電複合材料為第二種情況時, 即壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速且材料界面產生 MT 表面波時, 我們利用柯西積分定理拆解 $N(\lambda)$ 函數可得如下

$$N(\lambda) = \left(1 + \frac{\mu^{(e)}}{\bar{c}_{44}} - k_e^2 \right) \sqrt{b_{mt}^2 - \lambda^2} S_3(\lambda), \quad (45)$$

其中

$$S_3(\lambda) = S_{3+}(\lambda) \times S_{3-}(\lambda), \quad (46)$$

$$S_{3+}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{mt} + \lambda}{b + \lambda}} Q_{3+}, \quad (47)$$

$$S_{3-}(\lambda) = \sqrt{\frac{b_{mt} - \lambda}{b - \lambda}} Q_{3-}, \quad (48)$$

當壓電複合材料為第三種情況時, 即壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速且材料界面沒有產生 MT 表面波時, 此時我們必須將(30)式做變換可得如下

$$\mu^{(e)}G(\lambda)\tilde{A}_- = V(\lambda)\left[\frac{1}{s^2(\eta-\lambda)} + \frac{\bar{\tau}_+^*}{s}\right], \quad (49)$$

其中

$$V(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\alpha^{(e)}(\lambda)}, \quad (50)$$

接著利用柯西積分定理拆解 $V(\lambda)$ 函數可得如下

$$V(\lambda) = \left(1 + \frac{\mu^{(e)}}{\bar{c}_{44}} - k_e^2\right)Q_4(\lambda), \quad (51)$$

其中

$$Q_4(\lambda) = Q_{4+}(\lambda) \times Q_{4-}(\lambda), \quad (52)$$

當壓電複合材料為第四種情況時，即壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速且材料界面沒有產生 MT 表面波時，此時我們必須將(30)式做變換可得如下

$$\frac{\mu^{(e)}\alpha^{(e)}(\lambda)G(\lambda)\tilde{A}_-}{\alpha(\lambda)} = J(\lambda)\left[\frac{1}{s^2(\eta-\lambda)} + \frac{\bar{\tau}_+^*}{s}\right], \quad (53)$$

其中

$$J(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\alpha(\lambda)}, \quad (54)$$

接著利用柯西積分定理拆解 $J(\lambda)$ 函數可得如下

$$J(\lambda) = \left(1 + \frac{\mu^{(e)}}{\bar{c}_{44}} - k_e^2\right)Q_5(\lambda), \quad (55)$$

其中

$$Q_5(\lambda) = Q_{5+}(\lambda) \times Q_{5-}(\lambda), \quad (56)$$

最後可求得基本解如下：

Case 1：壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速 ($b_{bg} > b^{(e)}$) 且界面存在 MT 表面波

將(33)、(34)、(35)、(36)、(41)、(42)、(43)、(44) 等式所得之結果代入(30)式，並且消除等式右邊 $\lambda = 0$ 之極點產生的貢獻整理可得如下

$$\begin{aligned} & \frac{(b^{(e)} - \lambda)(b_{bg} - \lambda)Q_{1-}(\lambda)}{\alpha_-(\lambda)(b_{m_1} - \lambda)Q_{2-}(\lambda)} \tilde{A}_- \\ & - \tilde{k} \frac{(b_{m_1} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{(b_{bg} + \eta)(b^{(e)} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \left[\frac{1}{s^2(\eta - \lambda)}\right] = \\ & \tilde{k} \left\{ \left[\frac{(b_{m_1} + \lambda)\sqrt{b + \lambda}Q_{2+}(\lambda)}{(b^{(e)} + \lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)} - \frac{(b_{m_1} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \right] \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{s^2(\eta - \lambda)} \right] + \frac{(b_{m_1} + \lambda)\sqrt{b + \lambda}Q_{2+}(\lambda)}{(b^{(e)} + \lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)} \times \left(\frac{\bar{\tau}_+^*}{s} \right) \right\}, \quad (57) \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{K} = \frac{1 + \mu^{(e)}/\bar{c}_{44} - k_e^2}{\mu^{(e)}(1 - k_e^2)}, \quad (58)$$

在(57)式中，等式左邊解析範圍在 $\lambda < 0$ ，而等式右邊解析範圍在 $\lambda > -\varepsilon$ ，所以在(57)式有相同交集為 $-\varepsilon < \lambda < 0$ ，在數學上我們可以視其為相同函數 $E(\lambda)$ 且在全域解析。根據李維定理 (Liouville's theorem) 一個在複數平面上處處均解析之完全函數為一個常數，且由阿貝爾定理 (Abel theorem) 得知，當 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 時完全函數 $E(\lambda)$ 之漸進行為為 $O(\lambda^{-3/2})$ ，即此完全函數 $E(\lambda)$ 於 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 時將趨近於零，故知 $E(\lambda) = 0$ 。並利用(45)式我們可以求得 \tilde{A}_- 如下

$$\begin{aligned} \tilde{A}_- &= A_-^{(e)} - A_- = \\ & \frac{\tilde{K}\alpha_-(\lambda)(b_{m_1} - \lambda)Q_{2-}(\lambda)(b_{m_1} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{s^2(\eta - \lambda)(b^{(e)} - \lambda)(b_{bg} - \lambda)Q_{1-}(\lambda)(b_{bg} + \eta)(b^{(e)} + \eta)Q_{1+}(\eta)}. \quad (59) \end{aligned}$$

利用(27)、(28)、(29)三式且消去 $\bar{\tau}_+^*$ 可得 A_+ 如下

$$A_+ = \frac{\mu^{(e)}\varepsilon_{11}\alpha^{(e)}(\lambda)A_-^{(e)} + [\bar{c}_{44}\varepsilon_{11}\alpha(\lambda) - e_{15}^2\beta(\lambda)]A_-}{e_{15}^2\beta(\lambda) - \bar{c}_{44}\varepsilon_{11}\alpha(\lambda) - \mu^{(e)}\varepsilon_{11}\alpha^{(e)}(\lambda)}, \quad (60)$$

將(59)式中的 A_- 代入(60)式可得

$$\begin{aligned} A^{(e)} &= \frac{(b_{m_1} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{\mu^{(e)}s^2(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \\ & \frac{\alpha_+^{(e)}(\lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_+(\lambda)\alpha_-^{(e)}(\lambda)(b_{m_1} + \lambda)Q_{2+}(\lambda)}, \quad (61) \end{aligned}$$

將(59)式中的 $A_-^{(e)}$ 代入(60)式可得

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(b_{m_1} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{\bar{c}_{44}s^2(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \\ & \frac{\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{m_1} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)}. \quad (62) \end{aligned}$$

將上述所得之(61)、(62)兩式代入本構方程式以及控制方程式的通解並對位置 x 作一次拉普拉斯逆轉換，便可得在一次拉式轉換域中應力、位移、電位能以及電位移的基本解如下

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(e)}(x, y, s) &= \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{m_1} + \eta)\alpha_+(\eta)Q_{2+}(\eta)}{\mu^{(e)}s(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \\ & \frac{\alpha_+^{(e)}(\lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_+(\lambda)\alpha_-^{(e)}(\lambda)(b_{m_1} + \lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[\alpha^{(e)}(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (63) \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_{yz}^{(e)}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)\alpha_+(\eta)Q_{2+}(\eta)}{(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{(b^{(e)} + \lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_+(\lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[\alpha^{(e)}(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (64)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^{(e)}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)\alpha_+(\eta)Q_{2+}(\eta)}{(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\lambda\alpha_+(\lambda)(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_+(\lambda)\alpha_-(\lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[\alpha^{(e)}(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (65)$$

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{\bar{c}_{44}s(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\alpha(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (66)$$

$$\bar{\psi}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{k_e^2(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{e_{15}s(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (67)$$

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha(\lambda)\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\alpha(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda - \frac{k_e^2}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\beta(\lambda)\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (68)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\lambda\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\alpha(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda + \frac{k_e^2}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\lambda\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (69)$$

$$\bar{\phi}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{k_e^2(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{e_{15}s(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{k_e^2(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{e_{15}s(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\alpha(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (70)$$

$$\bar{D}_x(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{k_e^2\varepsilon_{11}(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{e_{15}(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\lambda\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda, \quad (71)$$

$$\bar{D}_y(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{k_e^2\varepsilon_{11}(b_{mt} + \eta)Q_{2+}(\eta)\alpha_+(\eta)}{e_{15}(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\beta(\lambda)\alpha_-(\lambda)(b^{(e)} + \lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{bg} - \lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{2+}(\lambda)} e^{s[-\beta(\lambda)y + \lambda x]} d\lambda. \quad (72)$$

並且可解出應力與電位移強度因子之拉氏域解

如下

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = -\frac{\sqrt{2}(b_{mt} + \eta)\alpha_+(\eta)Q_{2+}(\eta)}{\sqrt{s}(b_{bg} + \eta)(b^{(e)} + \eta)Q_{1+}(\eta)}, \quad (73)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = -\frac{\sqrt{2}k_e^2\varepsilon_{11}(b_{mt} + \eta)\sqrt{b + \eta}Q_{2+}(\eta)}{\sqrt{s}e_{15}(1 - k_e^2)(b^{(e)} + \eta)(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)}. \quad (74)$$

Case 2：壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速且界面存在 MT 表面波

將(33)、(34)、(35)、(36)、(45)、(46)、(47)、(48)

等式所得之結果代入(30)式，並且消除等式右邊 $\lambda = 0$ 之極點產生的貢獻整理可得 \tilde{A}_- 如下

$$\tilde{A}_- = A_-^{(e)} - A_- = \frac{\tilde{K}(b_{mt} - \lambda)Q_{3-}(\lambda)(b_{mt} + \eta)Q_{3+}(\eta)}{s^2(\eta - \lambda)\sqrt{b^{(e)} - \lambda}(b_{bg} - \lambda)Q_{1-}(\lambda)(b_{bg} + \eta)\sqrt{b^{(e)} + \eta}Q_{1+}(\eta)}, \quad (75)$$

將(75)式中的 A_- 代入(60)式可得

$$A^{(e)} = \frac{(b_{mt} + \eta)Q_{3+}(\eta)}{\mu^{(e)}s^2\sqrt{b^{(e)} + \eta}(b_{bg} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{(b_{bg} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_-(\lambda)(b_{mt} + \lambda)Q_{3+}(\lambda)}, \quad (76)$$

將(75)式中的 $A_-^{(e)}$ 代入(60)式可得

$$A = -\frac{(b_{m_l} + \eta)Q_{3+}(\eta)}{\bar{c}_{44}s^2(1-k_e^2)\sqrt{b^{(e)} + \eta}(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_+^{(e)}(\lambda)\alpha(\lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{b_g} - \lambda)(b_{m_l} + \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{3+}(\lambda)}. \quad (77)$$

將上述所得之(76)、(77)兩式代入本構方程式以及控制方程式的通解並對位置 x 作一次拉氏逆轉換，便可得在一次拉氏轉換域中應力、位移、電位能以及電位移的基本解以及一次拉氏域下的應力與電位移強度因子，由於本文針對強度因子做數值的討論與比較，所以在此僅表示出強度因子之基本解，其他如應力、位移、電位移以及電位能之基本解本文就不詳細表示

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = -\frac{\sqrt{2}(b_{m_l} + \eta)Q_{3+}(\eta)}{\sqrt{s}\alpha_+^{(e)}(\eta)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}, \quad (78)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = -\frac{\sqrt{2}k_e^2\varepsilon_{11}(b_{m_l} + \eta)Q_{3+}(\eta)}{\sqrt{se_{15}}(1-k_e^2)\alpha_+^{(e)}(\eta)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}. \quad (79)$$

Case 3：壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速 ($b^{(e)} > b_{b_g}$) 且界面不存在 MT 表面波

將(33)、(34)、(35)、(36)、(50)、(51)、(52)等式所得之結果代入(49)式，並且消除等式右邊 $\lambda = 0$ 之極點產生的貢獻整理可得 \tilde{A}_- 如下

$$\tilde{A}_- = A_-^{(e)} - A_- = \frac{\tilde{K}Q_{4-}(\lambda)Q_{4+}(\eta)}{s^2(\eta - \lambda)\sqrt{b_{b_g} - \lambda}\sqrt{b_{b_g} + \eta}S_{1-}(\lambda)S_{1+}(\eta)}, \quad (80)$$

將(80)式中的 A_- 代入(60)式可得

$$A^{(e)} = \frac{\alpha_+(\eta)Q_{4+}(\eta)(b_{b_g} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{\mu^{(e)}s^2(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)(\eta - \lambda)\alpha_+(\lambda)\alpha^{(e)}(\lambda)Q_{4+}(\lambda)}, \quad (81)$$

將(80)式中的 $A_-^{(e)}$ 代入(60)式可得

$$A = -\frac{\alpha_+(\eta)Q_{4+}(\eta)}{\bar{c}_{44}s^2(1-k_e^2)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{\alpha_-(\lambda)}{(\eta - \lambda)(b_{b_g} - \lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{4+}(\lambda)}. \quad (82)$$

將上述所得之(81)、(82)兩式代入本構方程式以及控制方程式的通解並對位置 x 作一次拉氏逆轉換，便可得一次拉氏域下的應力與電位移強度因子

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = -\frac{\sqrt{2}\alpha_+(\eta)Q_{4+}(\eta)}{\sqrt{s}(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}, \quad (83)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = -\frac{\sqrt{2}k_e^2\varepsilon_{11}\alpha_+(\eta)Q_{4+}(\eta)}{\sqrt{se_{15}}(1-k_e^2)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}. \quad (84)$$

Case 4：壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波

波速且界面不存在 MT 表面波

將(33)、(34)、(35)、(36)、(54)、(55)、(56)等式所得之結果代入(53)式，並且消除等式右邊 $\lambda = 0$ 之極點產生的貢獻整理可得 \tilde{A}_- 如下

$$\tilde{A}_- = A_-^{(e)} - A_- = \frac{\tilde{K}(b + \eta)Q_{5+}(\eta)}{s^2\sqrt{b^{(e)} + \eta}(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{(b - \lambda)Q_{5-}(\lambda)}{(\eta - \lambda)\alpha_-^{(e)}(\lambda)(b_{b_g} - \lambda)Q_{1-}(\lambda)}, \quad (85)$$

將(85)式中的 A_- 代入(60)式可得

$$A^{(e)} = \frac{(b + \eta)Q_{5+}(\eta)}{\mu^{(e)}\sqrt{b^{(e)} + \eta}(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{(b_{b_g} + \lambda)Q_{1+}(\lambda)}{s^2(\eta - \lambda)(b + \lambda)\alpha_-^{(e)}(\lambda)Q_{5+}(\lambda)}, \quad (86)$$

將(85)式中的 $A_-^{(e)}$ 代入(60)式可得

$$A = -\frac{(b + \eta)Q_{5+}(\eta)}{\bar{c}_{44}(1-k_e^2)\sqrt{b^{(e)} + \eta}(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)} \times \frac{(b - \lambda)\alpha_+^{(e)}(\lambda)}{s^2(\eta - \lambda)(b_{b_g} - \lambda)\alpha(\lambda)Q_{1-}(\lambda)Q_{5+}(\lambda)}. \quad (87)$$

將上述所得之(86)、(87)兩式代入本構方程式以及控制方程式的通解並對位置 x 作一次拉氏逆轉換，便可得一次拉氏域下的應力與電位移強度因子

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = -\frac{\sqrt{2}(b + \eta)Q_{5+}(\eta)}{\sqrt{s}\alpha_+^{(e)}(\eta)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}, \quad (88)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = -\frac{\sqrt{2}k_e^2\varepsilon_{11}(b + \eta)Q_{5+}(\eta)}{\sqrt{se_{15}}(1-k_e^2)\alpha_+^{(e)}(\eta)(b_{b_g} + \eta)Q_{1+}(\eta)}. \quad (89)$$

四、半無限長界面裂紋受反平面動力點載荷之破壞解析

考慮一半無窮域六角晶系壓電材料與一半無窮域純彈性材料所構成之複合材料內，有一半無限長之界面裂紋，裂紋位於 $y = 0$ ， $-\infty < x < 0$ 。假設在時間 $t < 0$ ，此結構處於無曳引力之平衡狀態，當時間 $t = 0$ 時，施加一對反平面動力點載荷於裂紋面上 $x = -h$ 處，其幾何結構示意圖如圖 2 所示。且此線彈性壓電材料以及純彈性材料之控制方程式與本構方程式如前述所推導，而其機械邊界條件可表示為

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -p\delta(x + h)H(t). \quad (90)$$

先對(90)式取兩次拉普拉斯轉換，接著取一次拉普拉斯逆轉換可得

$$\bar{\tau}_{yz}(x, h, s) = \frac{-p}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{s\lambda h} \cdot e^{s\lambda x} d\lambda. \quad (91)$$

此式為存在於轉換域中裂紋面上指數型式 ($e^{s\lambda x}$) 的應力，我們便可以利用前述推導之基本解型式加以疊加，可得其在轉換域中之應力及電位移強度因子並且利用 Cagniard-de Hoop 逆轉換法，將其在拉式轉換域下的解逆轉換，便可求得應力及電位移強度因子在時間域下的解

Case 1：壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速 ($b_{bg} > b^{(e)}$) 且界面存在 MT 表面波

根據疊加基本解的技巧我們可以得到應力及電位移強度因子，並且利用 Cagniard-de Hoop 法得到時域解如下

$$K_{III}^{(\tau)} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \times \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) \sqrt{\tau - bh} Q_{2+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) (\tau - b^{(e)} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau, \quad (92)$$

$$K_{III}^{(D)} = \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) \sqrt{\tau - bh} Q_{2+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) (\tau - b^{(e)} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau. \quad (93)$$

並且利用複變之圍線積分定理以及殘值定理將 (92) 及 (93) 式簡化如下

$$K_{III}^{(\tau)} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) \sqrt{\tau - bh} Q_{2+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) (\tau - b^{(e)} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - b^{(e)} h)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \left\{ 1 - \frac{(b_{bg} - b_{mt}) \sqrt{b_{bg} h - bh} Q_{2+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - b^{(e)} h) - H(t - b_{bg} h)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h), \quad (94)$$

$$K_{III}^{(D)} = \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \times \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) \sqrt{\tau - bh} Q_{2+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) (\tau - b^{(e)} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - b^{(e)} h)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times \left\{ 1 - \frac{(b_{bg} - b_{mt}) \sqrt{b_{bg} h - bh} Q_{2+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - b^{(e)} h) - H(t - b_{bg} h)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h). \quad (95)$$

Case 2：壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速且界面存在 MT 表面波

根據疊加基本解的技巧我們可以得到應力及電位移強度因子，並且利用 Cagniard-de Hoop 法得到時域解，以及利用複變之圍線積分定理以及殘值定理簡化如下

$$K_{III}^{(\tau)} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) Q_{3+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} \sqrt{\tau - b^{(e)} h} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - bh)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \left\{ 1 - \frac{\sqrt{h} (b_{bg} - b_{mt}) \cdot Q_{3+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} \cdot Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - bh) - H(t - b_{bg} h)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h), \quad (96)$$

$$K_{III}^{(D)} = \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \text{Re} \left[\frac{(\tau - b_{mt} h) Q_{3+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)}{\sqrt{t - \tau} \sqrt{\tau - b^{(e)} h} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+} \left(-\frac{\tau}{h}\right)} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - bh)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \left\{ 1 - \frac{\sqrt{h} (b_{bg} - b_{mt}) \cdot Q_{3+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} \cdot Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - bh) - H(t - b_{bg} h)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h). \quad (97)$$

Case 3：壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速 ($b^{(e)} > b_{bg}$) 且界面不存在 MT 表面波

根據疊加基本解的技巧我們可以得到應力及電

位移強度因子，並且利用 Cagniard-de Hoop 法得到時域解，以及利用複變之圍線積分定理以及殘值定理簡化如下

$$K_{III}^{(\tau)} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{\tau - bh} Q_{4+}(-\frac{\tau}{h})}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+}(-\frac{\tau}{h})} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - b^{(e)} h)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b^{(e)} h), \quad (98)$$

$$K_{III}^{(D)} = \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{\tau - bh} Q_{4+}(-\frac{\tau}{h})}{\sqrt{t - \tau} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+}(-\frac{\tau}{h})} \right] d\tau [H(t) - H(t - b^{(e)} h)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b^{(e)} h). \quad (99)$$

Case 4：壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速且界面不存在 MT 表面波

根據疊加基本解的技巧我們可以得到應力及電位移強度因子，並且利用 Cagniard-de Hoop 法得到時域解，以及利用圍線積分定理以及殘值定理簡化如下

$$K_{III}^{(\tau)} = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{(\tau - bh) Q_{5+}(-\frac{\tau}{h})}{\sqrt{t - \tau} \sqrt{\tau - b^{(e)} h} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+}(-\frac{\tau}{h})} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - bh)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \left\{ 1 - \frac{\sqrt{h} (b_{bg} - b) Q_{5+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - bh) - H(t - b_{bg} h)] + \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h), \quad (100)$$

$$K_{III}^{(D)} = \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{(\tau - bh) Q_{5+}(-\frac{\tau}{h})}{\sqrt{t - \tau} \sqrt{\tau - b^{(e)} h} (\tau - b_{bg} h) Q_{1+}(-\frac{\tau}{h})} \right] d\tau \times [H(t) - H(t - bh)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \left\{ 1 - \frac{\sqrt{h} (b_{bg} - b) Q_{5+}(-b_{bg})}{\sqrt{b_{bg} h - t} \sqrt{b_{bg} - b^{(e)}} Q_{1+}(-b_{bg})} \right\} \times [H(t - bh) - H(t - b_{bg} h)] + \frac{k_e^2 \varepsilon_{11}}{e_{15} (1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} p \times H(t - b_{bg} h). \quad (101)$$

在前述的分析之中，我們已推導出在無窮域彈壓電複合材料含半無限長界面裂紋的應力與電位移強度因子，本節將就在不同彈性材料搭配之下，裂紋受應力負載時所做的數值計算做討論。

我們可以觀察在固定壓電材料內，搭配不同彈性材料，應力強度因子及電位移強度因子之結果，如圖 3 及圖 4 所示；此二圖即為固定 PZT4 材料，分別搭配 Steel、Copper、Aluminum alloys 及 Brass 等彈性材料之下，在界面裂紋靜止時之應力強度因子；其中 PZT4-Steel 為無 MT 表面波壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速之彈壓電複合材料；PZT4-Brass 為無 MT 表面波壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速之彈壓電複合材料且 BG 表面波波速大於純彈性材料剪力波波速；PZT4-Aluminum alloys 為存在 MT 表面波壓電材料剪力波波速小於純彈性材料剪力波波速之彈壓電複合材料；PZT4-Copper 為存在 MT 表面波壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速之彈壓電複合材料；在圖中我們可以清楚看到，當 BG 表面波抵達裂紋尖端時，界面裂紋之應力強度因子及電位移強度因子也會趨近於負無限大，而當 BG 表面波通過裂紋尖端，PZT4-Aluminum alloys, Copper, Steel 之應力與電位移強度因子會跳到一定值，但是 PZT4-Brass 則是在彈性材料剪力波通過裂紋尖端後應力與電位移強度因子會跳到靜力解之大小。

首先觀察 PZT4-Steel 及 PZT4-Aluminum alloys 之彈壓電複合材料，此兩種複合材料皆為下層材料剪力波波速大於上層材料，由圖中可清楚看出電磁波通過裂紋尖端後，應力及電位移強度因子之值緩慢的向正的值遞增，當彈性材料剪力波抵達裂紋尖端時，強度因子會忽然往正的值增加，當彈性材料剪力波通過裂紋尖端後，強度因子之值即漸漸減小；而當壓電材料剪力波抵達裂紋尖端，應力及電位移強度因子會往負的值增加越多，之後 BG 表面波接著抵達裂紋尖端，應力及電位移強度因子會趨近於負的無窮大，且 BG 表面波通過裂紋尖端後應力與電位移強度因子會立刻跳到靜力解之大小。

接著觀察 PZT4-Copper 之彈壓電複合材料，此種複合材料為上層材料剪力波波速大於下層材料，由圖

中可清楚看出電磁波通過裂紋尖端後，應力及電位移強度因子之值緩慢的向正的值遞增，當壓電材料剪力波抵達裂紋尖端，強度因子會繼續往正的值增加，接著當彈性材料剪力波抵達裂紋尖端，強度因子之值往正的值增加越多，而當 BG 表面波抵達裂紋尖端時，強度因子之值會趨近於負的無窮大，當 BG 表面波通過裂紋尖端後應力與電位移強度因子會跳到靜力解之大小。

最後我們觀察 PZT4-Brass 之彈壓電複合材料，此種複合材料為上層材料剪力波波速大於下層材料，且 BG 表面波波速大於下層彈性材料剪力波波速，由圖中可清楚看出電磁波通過裂紋尖端後，應力與電位移強度因子之值緩慢的向負的值遞增，當壓電材料剪力波抵達裂紋尖端時，強度因子之值往負的值增加越多，而當 BG 表面波抵達裂紋尖端時，強度因子之值會趨近於負的無窮大，當彈性材料剪力波通過裂紋尖端後應力與電位移強度因子會跳到靜力解之大小。

本研究可歸納四種現象且由數值結果得知，在無 MT 表面波之彈壓電複合材料內，壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速，其 BG 波之波速小於彈性材料剪力波波速，在 BG 表面波抵達界面裂紋尖端時，應力與電位移強度因子之值會趨近於無限大，而在彈性材料剪力波通過裂紋尖端後，靜止之界面裂紋應力與電位移強度因子會瞬間靜力解大小，而其餘三種現象皆為 BG 表面波波速大於彈性材料剪力波波速，所以在 BG 表面波抵達界面裂紋尖端時，應力與電位移強度因子之值會趨近於無限大，在 BG 表面通過裂紋尖端後，靜止之界面裂紋應力與電位移強度因子會瞬間跳到靜力解大小。

五、 結論

在處理此一混合型邊界問題，利用積分轉換法與 Wiener-Hopf 技巧，可求解出應力場、位移場、電位移場以及動力強度因子在一次拉式轉換域中之基本解。將所得在拉氏域中的基本解，利用疊加的方式，可得到在轉換域中應力強度因子與電位移強度因子於距離裂紋尖端特徵長度 h 施加點載荷的解析解，再利用 Cagniard de-Hoop 積分轉換法可得到時域解。

本研究包含四種現象由數值結果得知，在無

MT 表面波之彈壓電複合材料內，壓電材料剪力波波速大於純彈性材料剪力波波速，其 BG 波之波速小於彈性材料剪力波波速，在 BG 表面波抵達界面裂紋尖端時，應力與電位移強度因子之值會趨近於無限大，而在彈性材料剪力波通過裂紋尖端後，靜止之界面裂紋應力與電位移強度因子會瞬間跳到靜力解，而其餘三種現象皆為 BG 表面波波速大於彈性材料剪力波波速，所以在 BG 表面波抵達界面裂紋尖端時，應力與電位移強度因子之值會趨近於無限大，在 BG 表面通過裂紋尖端後，靜止之界面裂紋應力與電位移強度因子會瞬間跳到靜力解。

六、 計畫成果自評

本計畫完成了大部分的預期目標，其研究成果可分述如下：

- (1) 完成推導靜止座標中之半無窮長界面裂紋曳引力型之基本解。
- (2) 完成推導此含界面裂紋之壓電複合材料受反平面動力點載荷之拉氏轉換域中應力強度因子與電位移強度因子。
- (3) 利用 Cagniard-de Hoop 做逆轉換以獲得時域中的動力應力強度因子與動力電位移強度因子。
- (4) 完成數值計算所獲得的時域解解析，並與文獻中之特例作比較與討論。

本研究所獲得之結果有學術價值，並適合進一步在期刊中發表。

參考文獻

- [1] Shindo, Y and Ozawa, E., (1990) "Dynamics analysis of a piezoelectric material," In: Hsieh, R.K.T. (Ed.) *Mechanical Modeling of New Electromagnetic Materials*. Elsevier, Amsterdam, pp. 297-304.
- [2] Li, S. and Mataga, P. A., (1996) "Dynamic crack propagation in piezoelectric materials-Part I. Electrode solution," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, pp. 1799-1830.
- [3] Li, S. and Mataga, P. A., (1996) "Dynamic crack propagation in piezoelectric materials-Part II. Vacuum solution," *Journal of the Mechanics and*

Physiscs of Solids, Vol. 44, pp. 1831-1866.

- [4] De Hoop, A. T. (1958) Representation theorem for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory, Doctoral dissertation, Technische hoegschool, Delft.
- [5] Maerfeld, C. And Tournois, P., (1971) "Pure shear Elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media."

ABSTRACT

In this study, the transient response of a semi-infinite interface crack between piezoelectric and purely elastic materials with the electrode boundary condition is investigated. This composite is subjected to dynamic anti-plane concentrated loading on the interface crack faces. Exact transient solutions for dynamic stress intensity factors and dynamic electric displacements intensity factors are derived analytically. Finally, numerical results are evaluated and discussed in detail.

Keywords : piezoelectric material, interface crack, stress intensity factor, dynamic fracture.

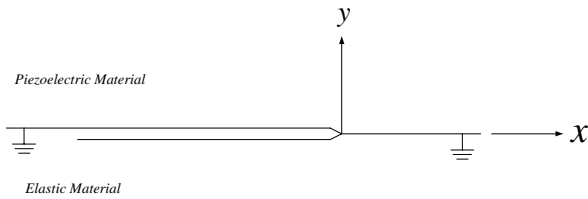


圖 1 電極型邊界描述

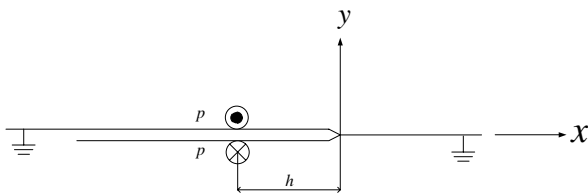


圖 2 界面裂紋之問題描述

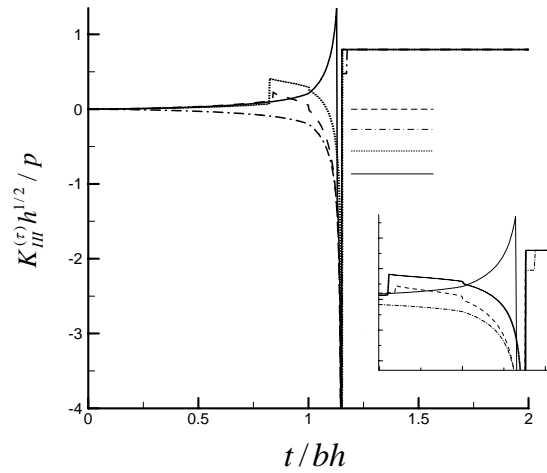


圖 3 受應力負載之界面裂紋應力強度因子

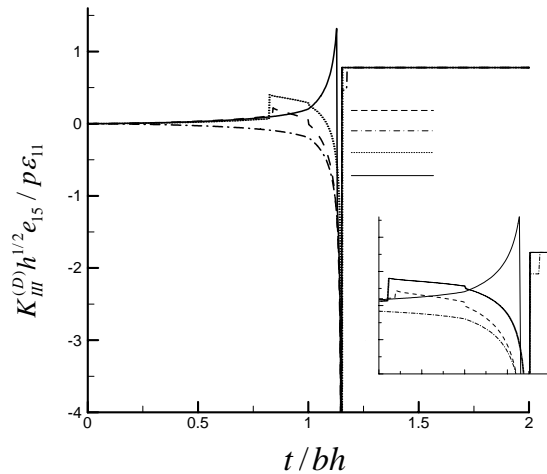


圖 4 受應力負載之界面裂紋電位移強度因