

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 含真空邊界擴展裂紋之壓電材料動力破壞分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-032-016-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：淡江大學航空太空工程學系

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：林世皓、蔡忠翰、黃俊元、吳盈稷

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 29 日

## 摘要

本文研究內含真空邊界壓電材料之擴展裂紋動力破壞問題，解析一含半無限長擴展裂紋之六角壓電材料，於距離裂紋尖端  $h$  處之裂紋面分別為受一對反平面動力點載荷及受平面電位移載荷之暫態效應，本文使用積分轉換法與 Wiener-Hopf 技巧推導壓電材料於一次拉普拉氏轉換域中，受空間指數應力與電位移分佈型之基本解，並利用此基本解來解析此包含特徵長度的壓電材料動力暫態問題，接著使用 Cagniard-de Hoop 方法來作拉普拉斯逆轉換得到時域中的解。最後本文針對應力強度因子與電位移強度因子等解析解，做詳細的數值計算與討論。

## Abstract

In this study, the transient response of a propagating semi-infinite crack in a hexagonal piezoelectric medium with vacuum boundary conditions are investigated. Two useful fundamental solutions are derived and the solutions can be determined by superposition of the fundamental solutions in the Laplace transform domain. The proposed fundamental problems are the problems of applying exponentially distributed traction and electric displacements (in the Laplace transform domain) on the propagating crack faces. The Cagniard-de Hoop method of Laplace inversion is used to obtain the transient solutions in time domain. Exact solutions of the dynamic stress intensity factor and the dynamic electric displacement intensity factor are derived. Finally, numerical results are evaluated and discussed in detail.

## 一、前言以及研究動機

壓電性(piezoelectricity)為一種機械能與電能互換的現象，即具有壓電性的材料受到應力的作用時會產生電壓的輸出，而且其電壓強度與應力強度成正相關，此為正壓電效應；相反地，壓電材料在電場的作用之下會有應變的產生，也會因電場強度的增強使應變的產生變大，此即為逆壓電效應。近年來，壓電材料元件隨著材料開發與製造技術的進步，人們對壓電性質的應用已日漸普及廣泛，但因為壓電材料大多是由脆性物質所構成，故壓電材料結構的破壞相關研究乃屬非常重要之課題。而本文最主要的目的，即是研究含裂紋之壓電材料受到外加動力負載時，所衍生之動力破壞問題。並期望本文所得之結果，能做為日後在壓電材料元件的設計應用時，提供可行的分析理論基礎與設計考量。

## 二、文獻探討

目前關於壓電材料破壞的研究大多著重於靜力的或者是半靜力的狀況，因為數學上的困難，壓電材料的動力破壞研究比較少被注重，直到 Shindo and Ozawa (1990)第一次研究含有裂紋的壓電材料受平面簡諧波的穩態解析，在此之後，壓電材料的動力破壞解析才快速的發展起來。可是因為數學上的困難，上述的多數學者都是利用數值的方法來求得裂紋問題的解，壓電材料裂紋問題的精確解析解文獻上並不多見。Li and Mataga (1996a, b)首度求得壓電擴展裂紋的應力強度因子、電位移強度因子以及能量釋放率的暫態解析解，他們是假設在移動裂紋尖端上施加一動力反平面應力或平面電位移點載荷，而且裂紋面上是電極類型或真空類型的邊界條件，所以他們的問題並沒有特徵長度的存在。在本文所要研究的問題是將載荷施加在裂紋面上的任意位置處，因為特徵長度的存在，使得此問題變得更加地困難。Tsai and Ma (1992)提出一種新的疊加解法，利用指數型載荷的基本解在拉普拉斯域上疊加以求得含有特徵長度的問題解，本文亦將利用此方法來求解壓電材料的動力破壞問題。

在 2003 年，洪國彬(2003)討論了含預裂縫之壓電材料的力學行為，洪的研究直接採用 Wiener-Hopf 技巧以商分解的方式直接分析問題。Ing and Wang (2004a, b)在可滲透性的電極邊界條件上，在壓電材料裂紋面上施加一對點載荷，研究其壓電材料的動力破壞解析。除了 Li and Mataga (1996a, b)、洪國彬 (2003)、以及 Ing and Wang (2004a, b)，其他學者的研究都需透過數值逆轉換才能算出時域解，並未能獲得理論解析解。

## 三、研究方法

我們首先由線彈性壓電方程式、本構方程式和邊界條件，利用積分轉換法的關係和 Wiener-Hopf 技巧，求得所需的基本解，由於解析推導過程繁多，基於篇幅限制，其相關方程式、詳細推導過程與解析解結果請參考本計畫助理人員林世皓(2004)之碩士論文。林世皓(2004)解析了施予反平面應力型與平面電位移型的兩種基本解，並利用此基本解推導出靜止裂紋(如圖一)與擴展裂紋(如圖二)的破壞解析，因為強度因子是研究破壞問題的重要物理量，所以以下之數值計算結果將針對應力強度因子、電位移強度因子和能量釋放率來作討論。

## 四、強度因子

### (1) 施加應力載荷的靜止裂紋之應力強度因子與電位移強度因子

圖三為靜止裂紋受到反平面動力應力點載荷時之應力強度因子隨時間 $t$ 變化的結果，圖中所表示的三組數據，為分別對三種不同之壓電材料 $BaTiO_3$ 、 $PZT4$ 、 $PZT5H$ 等(材料常數詳見表一)所得到之不同之結果。由圖中可知在剪力波尚未抵達裂紋尖端前，即 $t < bh$ ，此時應力強度因子之值為零，而當剪力波通過裂紋尖端後，即時間 $t > bh$ 時，應力強度因子開始有值；但當時間 $t = b_{bg}h$ 即表面波抵達裂紋尖端時，應力強度因子之值會趨近於無窮大；而當時間 $t > b_{bg}h$ 時，即為表面波通過裂紋尖端後，我們可從圖上發現此時應力強度因子之值則會瞬間跳到一固定值，此定值與材料常數無關，且和等向性線彈性材料之解完全相同。圖四為靜止裂紋受到反平面應力點載荷時之電位移強度因子，如同應力強度因子一般，電位移強度因子在剪力波到達之前，其值為零，待剪力波通過裂紋尖端後，才開始有值；且如同應力強度因子一般，在表面波抵達裂紋尖端前，即當時間 $t = b_{bg}h$ 時，其值也將會趨近於無窮大；而當時間 $t > b_{bg}h$ ，即為表面波通過裂紋尖端後，電位移強度因子也會瞬間跳達一定值，但如圖中所示電位移強度因子受材料常數之影響很大，其中 $PZT4$ 與 $PZT5H$ 兩種材料電位移強度因子之值較 $BaTiO_3$ 大了許多，即 $BaTiO_3$ 材料本身壓電性質較遜於其他二者，因此我們可以藉此瞭解電位移強度因子與材料之壓電性強弱之關係。

## (2) 施加電位移載荷的靜止裂紋之應力強度因子與電位移強度因子

圖五為靜止裂紋受到反平面電位移載荷時之應力強度因子隨時間 $t$ 變化的結果，圖中所表示的三組數據，為分別對三種不同之壓電材料 $BaTiO_3$ 、 $PZT4$ 、 $PZT5H$ 等所得到之不同之結果，由圖中可知在剪力波尚未抵達裂紋尖端前，此時應力強度因子之值為負值，而當剪力波通過裂紋尖端後，應力強度因子開始有值的變化；但當表面波抵達裂紋尖端時，應力強度因子之值會趨近於無窮大；而當表面波通過裂紋尖端後，我們可從圖上發現此時應力強度因子之值則會瞬間跳到零，亦即當表面波通過裂紋尖端後，電的效應不再對應力強度因子造成影響。圖六為靜止裂紋受到反平面電位移載荷時之電位移強度因子，由圖中可看出在負載一施加開始就會跳到固定值了，不過當剪力波到達裂紋尖端時，電位移強度因子開始有變化了，且當表面波到達裂紋尖端時，電位移強度因子會跳到無窮大，當表面波已經通過裂紋尖端，電位移強度因子會瞬間跳到另一個固定值，只不過電位移強度因子的強度就和材料性質有關了。

而圖七和圖八是當 $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ 時靜止裂紋受反平面動力點載荷之應力強度因子和電位移強度因子，當 $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ 時相當於是我們將裂紋面度上一層極薄導電電極接地，所以圖七與八就跟 Ing and Wang (2004a)電極邊界數值圖是一樣的，因為是電極邊界條件， $b_{bg}$ 會比一般真空條件的 $b_{bg}$ 還大，所以開始趨近於無限大那部分的圖比較明顯。

## (3) 施加應力載荷的擴展裂紋之應力強度因子與電位移強度因子

圖九即為在 $PZT4$ 材料中，裂紋擴展速度與BG波波速度比分別為0.3、0.5、0.8、0.99以及裂紋靜止的狀態下，所得到的應力強度因子，在圖中我們可以清楚看到，當表面波抵達裂紋尖端時，擴展裂紋之應力強度因子也會趨近於負無限大，而當波通過裂紋尖端，應力強度因子會漸漸衰減，且裂紋擴展速度越快時，應力強度因子之值越小，反之，裂紋擴展速度越慢，應力強度因子之值則會越大。圖十，為在 $PZT4$ 材料中裂紋擴展速度與BG波波速度比分別為0.3、0.5、0.8、

0.99 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的電位移強度因子，在表面波通過裂紋尖端時會與應力強度因子有相同現象，其絕對值會漸漸衰減，且擴展速度越快  $K_{III}^{v(D)}(t)$  的絕對值大小越小。

在圖十一中，我們固定裂紋擴展速度為 BG 波波速的 0.3 倍，分別在  $BaTiO_3$ 、 $PZT4$ 、 $PZT5H$  等三種不同材料中，所得到的應力強度因子之值，在不同材料中表面波抵達裂紋尖端時，其值皆會趨近於負無限大，而波通過裂紋尖端後，在各個材料中的應力強度因子值會漸漸衰減而非趨近於定值。此外，由圖中可看出應力強度因子與材料常數幾乎無關。而圖十二則分別表示在三種材料內，裂紋擴展速度仍為 BG 波波速的 0.3 倍，所得到的電位移強度因子值，在表面波通過裂紋尖端後，其值隨著時間遞增而數值均平緩的遞減。

#### (4) 施加電位移載荷的擴展裂紋之應力強度因子與電位移強度因子

同樣地，圖十三即為在  $PZT4$  材料中，裂紋擴展速度與 BG 波波速度比分別為 0.3、0.5、0.8、0.99 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的應力強度因子，在圖中我們可以清楚看到，因為我們施加的是電位移，所以應力強度因子一開始就跳到一定值，與圖 3-4 的初始值相同，當表面波抵達裂紋尖端時，擴展裂紋之應力強度因子也會趨近於負無限大，而當表面波通過裂紋尖端，在靜止時，因為表面波通過裂紋尖端，應力強度因子會跳到零，但當擴展裂紋速度越大時，電位移負載對應力強度因子的影響會變大，不過隨著時間越大，所有的應力強度因子皆會漸漸衰減。圖十四，為在  $PZT4$  材料中裂紋擴展速度與 BG 波波速度比分別為 0.3、0.5、0.8、0.99 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的電位移強度因子，在表面波抵達裂紋尖端時會與應力強度因子有相同現象，而表面波通過裂紋尖端後其絕對值會漸漸衰減，且擴展速度越快  $K_{III}^{v(D)}(t)$  的大小越小。

在圖十五中，我們固定裂紋擴展速度為 BG 波波速的 0.3 倍，分別在  $BaTiO_3$ 、 $PZT4$ 、 $PZT5H$  等三種不同材料中，所得到的應力強度因子之值，因為電位移一施加後，馬上就產生應力，所以應力強度因子一開始就有值，同樣的在表面波抵達裂紋尖端時會與施加應力負載時有相同現象，擴展裂紋之應力強度因子也會趨近於負無限大，而當波通過裂紋尖端，應力強度因子的絕對值會漸漸衰減，圖十六是裂紋擴展速度為 B.G 波波速的 0.3 倍，分別在  $BaTiO_3$ 、 $PZT4$ 、 $PZT5H$  等三種不同材料中，所得到的電位移強度因子之值。一開始就有電位移強度因子，同樣地在表面波抵達裂紋尖端時其強度因子值會趨近於負無限大，當表面波過後電位移強度因子亦會衰減。

而圖十七到圖二十是當  $\epsilon_0 \rightarrow \infty$  時施加應力負載時  $PZT4$  含擴展裂紋的應力強度因子和電位移強度因子，這四張圖的結果亦跟在 Ing and Wang (2004b) 電極邊界條件結果一樣，因為  $b_{bg}$  會比一般真空條件的  $b_{bg}$  還大，所以開始趨近於無限大那部分的圖比較明顯。而圖二十一和圖二十二為擴展速度與不變函數的關係圖，由圖我們可以看出隨著擴展速度越快，其值對強度因子的影響會越大，而且電位移強度因子的部分還未歸零，所以當擴展速度更高時還可以繼續研究其發展。

## 五、能量釋放率

圖二十三為靜止裂紋受應力負載時的能量釋放率與時間關係圖，與應力強度因子皆相同，在表面波抵達時，能量釋放率之值會趨近於無限大，而當波通過裂紋後，由於能量釋放率與應力強度因子間，為一正比關係，故能量釋放率也會在

瞬間趨近於定值，而圖中三條曲線則分別代表著三種不同的材料。圖二十四為靜止裂紋受電位移負載時的能量釋放率與時間關係圖，因為受到電位移的影響所以一開始就有值，當表面通過裂紋尖端時會趨近於無限大，而後來都會跳到某一定值。

圖二十五則為含擴展裂紋之 *PZT4* 材料，施加應力載荷其裂紋擴展速度與剪力波波速比同為 0.3、0.5、0.8、0.99 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的能量釋放率，由於能量釋放率與應力強度因子的平方有著正比之關係，故在圖中也可發現與應力強度因子相同之特性。圖二十六則分別表示在三種材料內，施加應力載荷且裂紋擴展速度仍為剪力波波速的 0.3 倍，所得到的能量釋放率，在表面波通過裂紋尖端後，其值隨著時間遞增而數值均平緩的遞減。就能量釋放率的部分來說，當裂紋擴展速度與表面波波速相同時，此時能量釋放率之值會趨近於零，這意味著裂紋將會因此而停止的向前擴展，則材料結構也將停止破壞。因此裂紋擴展速度定會小於表面波波速。

圖二十七為施加電位移載荷在不同擴展速度下的能量釋放率，同樣地在表面波通過裂紋尖端時，能量釋放率會趨近於無窮大，當表面波通過後，其值會隨著時間而衰減。而隨著擴展速度增加其對能量釋放率影響越大。圖二十八為不同材料施加電位移載荷且裂紋擴展速度仍為剪力波波速的 0.3 倍，所得到的能量釋放率，在表面波通過裂紋尖端後，其值隨著時間遞增而數值均平緩的遞減。

## 六、計畫成果自評:

本計畫完成了當初所有的預期目標，其研究成果可分述如下：

1. 利用積分轉換法與 Wiener-Hopf 技巧，求解出應力場、位移場、電位移場以及強度因子在一次拉普拉斯轉換域中的基本解。
2. 將所得到的基本解，利用疊加的方式，求得了在轉換域中之應力強度因子與電位移強度因子的解析解，再利用 Cagniard de-Hoop 法得到時域解。
3. 由數值結果得知，在表面波抵達裂紋尖端前，應力與電位移強度因子之值會趨近於無限大，在表面波通過裂紋尖端後，靜止裂紋之應力與電位移強度因子會瞬間跳到一定值，而擴展裂紋之應力與電位移強度因子則會隨時間增加而漸漸衰減。
4. 在真空的邊界條件之下，若  $\epsilon_0 \rightarrow \infty$  時，則此材料就跟可滲透邊界的壓電材料一樣，把裂紋面導電接地的狀況是相同的。若  $\epsilon_0 \rightarrow 0$  時，則此材料就與不可誘電性的材料一樣，本文亦可得到其解。

本研究所得之基本解，亦可用於分析一負載施於壓電材料結構體內任意位置的動力破壞問題，所求得的解可作為一格林(Green)函數來處理任何形式負載的問題，故本研究有頗高的學術價值。此外，本研究所得之結果亦非常適合於學術期刊發表。

## 七、參考文獻

Ing, Y. S. and Wang, M. J., (2004a) "Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 3849-3864.

Ing, Y. S. and Wang, M. J., (2004b) "Transient analysis of a mode-III crack propagating in a piezoelectric medium," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 6197-6214.

Li, S. and Mataga, P. A., (1996a) "Dynamic crack propagation in piezoelectric

materials-Part I. Electrode solution,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, pp. 1799-1830.

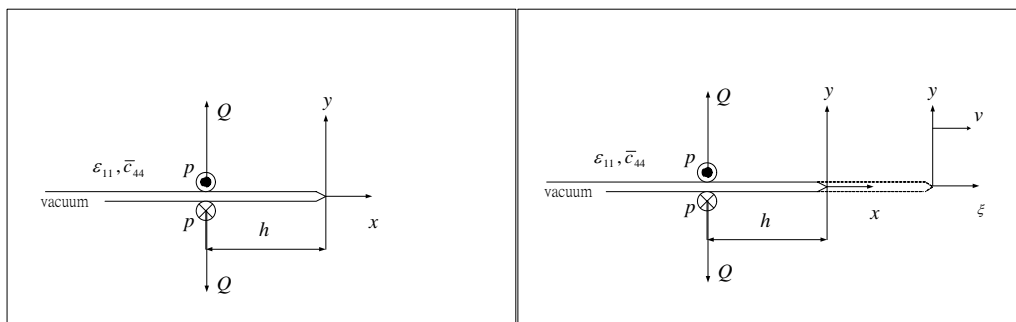
Li, S. and Mataga, P. A., (1996b) “Dynamic crack propagation in piezoelectric materials-Part II. Vacuum solution,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, pp. 1831-1866

Shindo, Y. and Ozawa, E., (1990) “Dynamics analysis of a piezoelectric material,” In: Hsieh, R.K.T. (Ed.), *Mechanical Modeling of New Electromagnetic Materials*. Elsevier, Amsterdam, pp. 297-304

Tsai, C. H., and Ma, C. C., (1992) “Transient analysis of a semi-infinite crack subjected to dynamic concentrated forces,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 804-811.

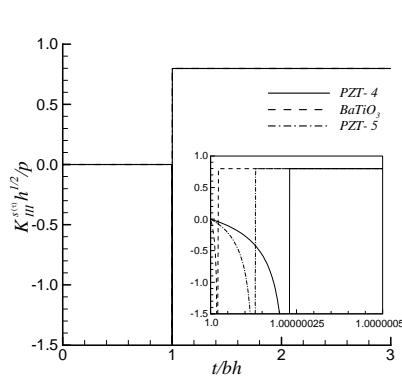
洪國彬(2003)，含預裂縫之壓電材料的力學行為，國立台灣大學應用力學研究所碩士論文。

林世皓(2004)，含真空邊界擴展裂紋之壓電材料動力破壞分析，淡江大學航空太空學系碩士論文。

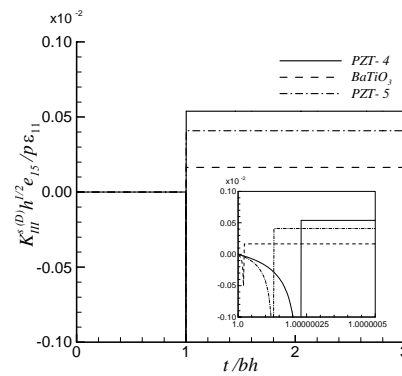


圖一

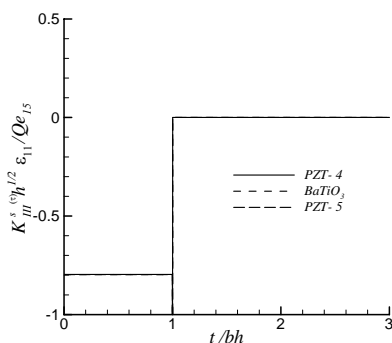
圖二



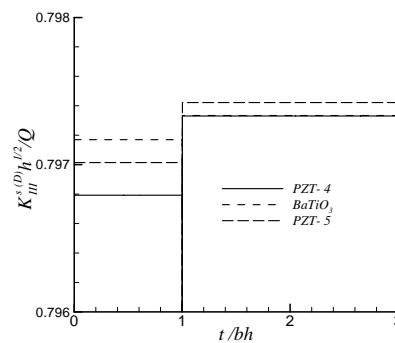
圖三



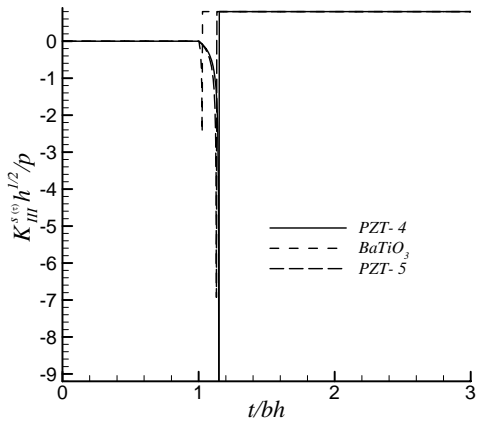
圖四



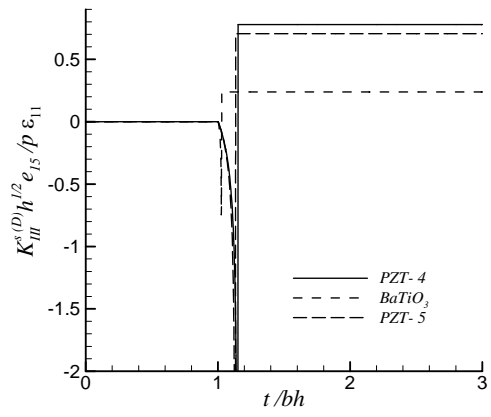
圖五



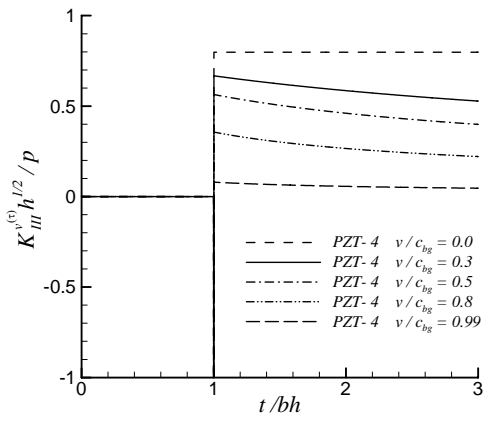
圖六



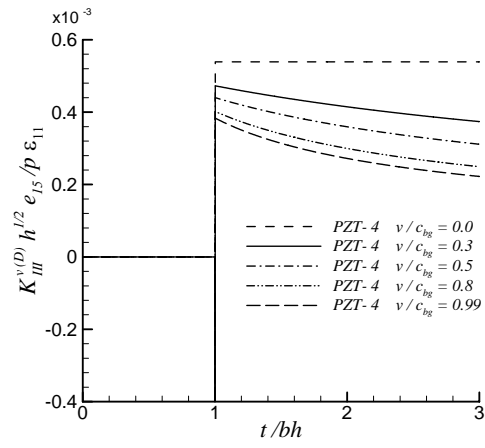
圖七



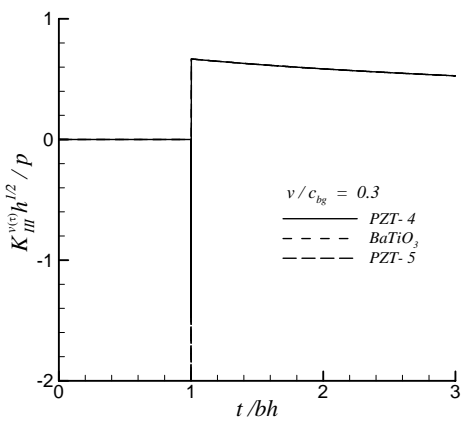
圖八



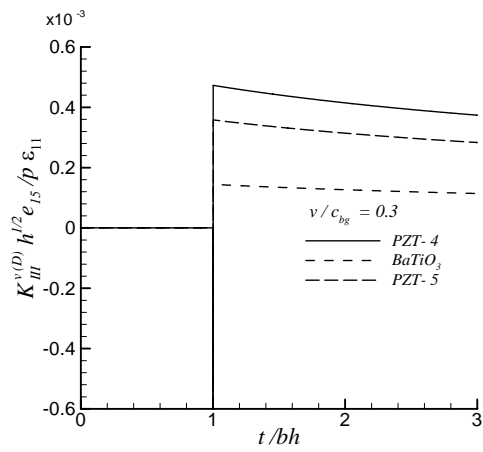
圖九



圖十

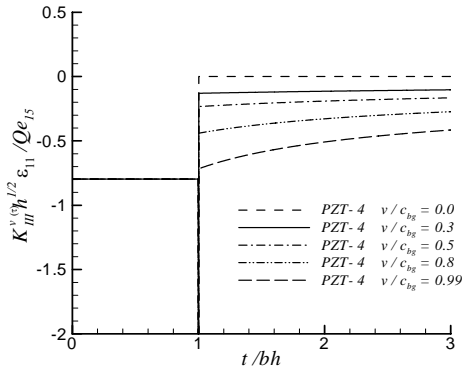


圖十一

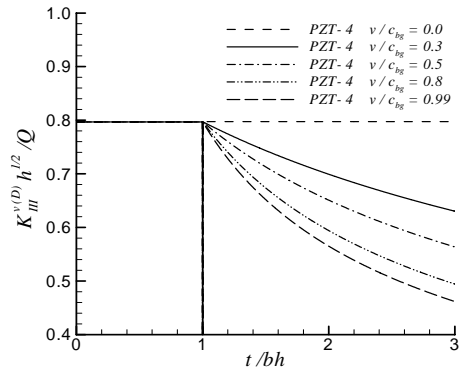


圖十二

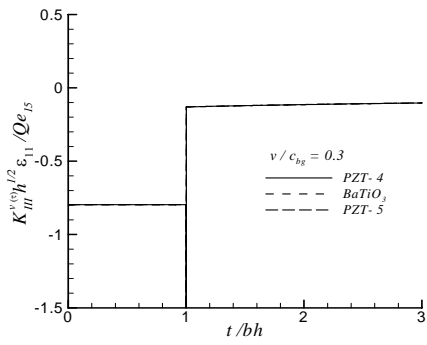




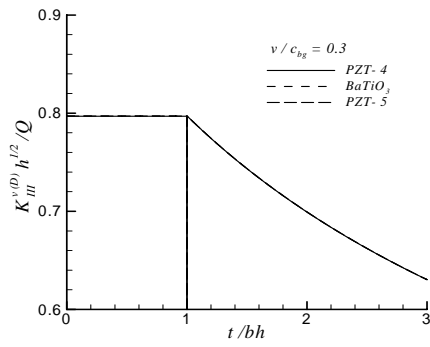
圖十三



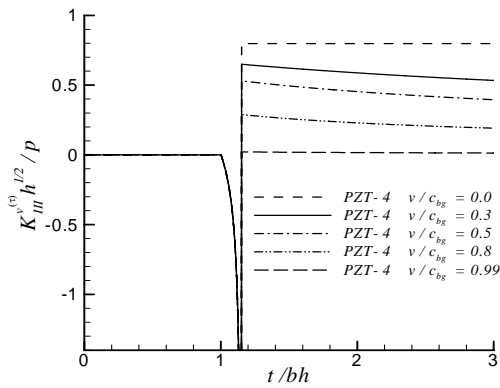
圖十四



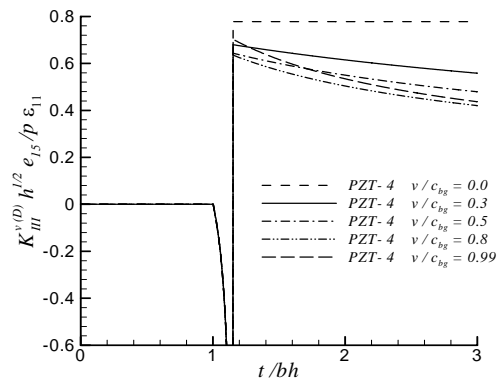
圖十五



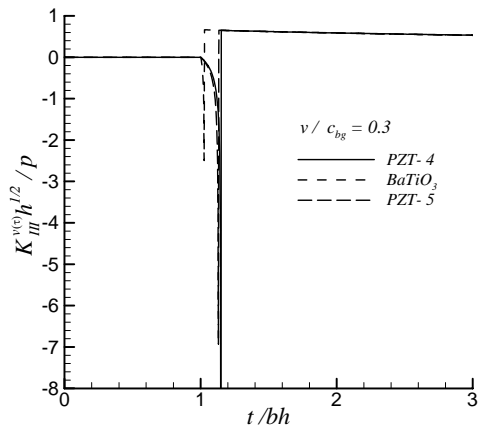
圖十六



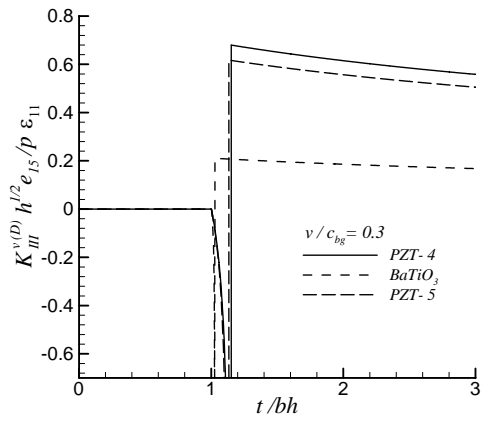
圖十七



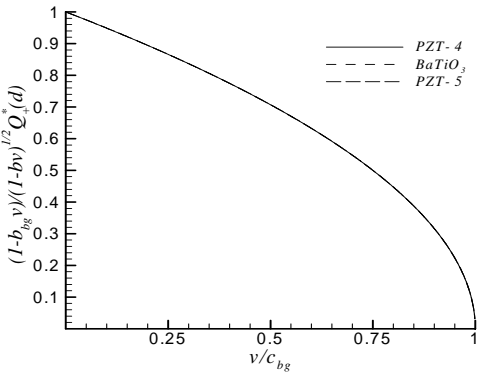
圖十八



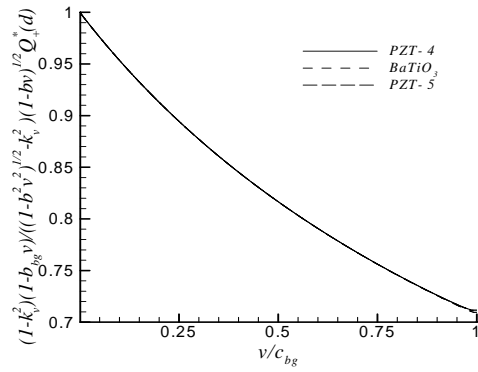
圖十九



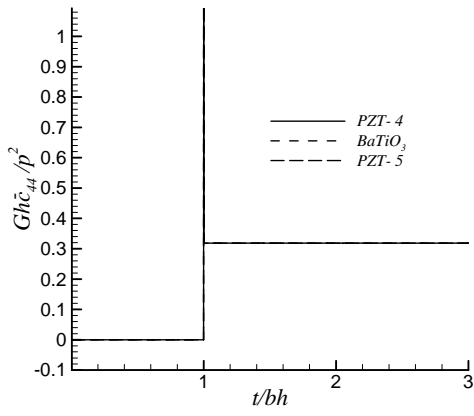
圖二十



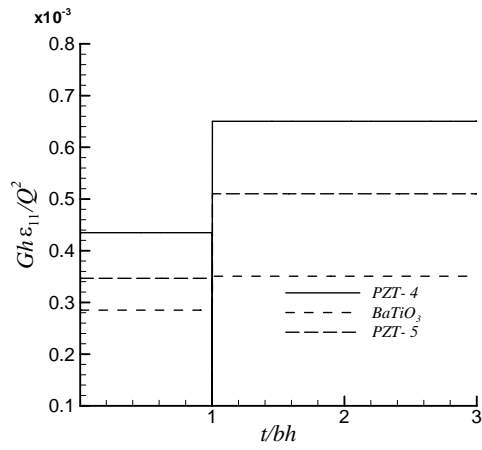
圖二十一



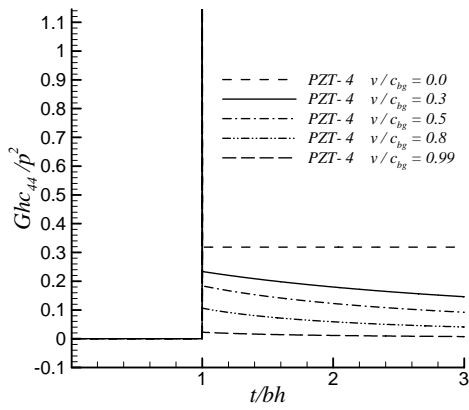
圖二十二



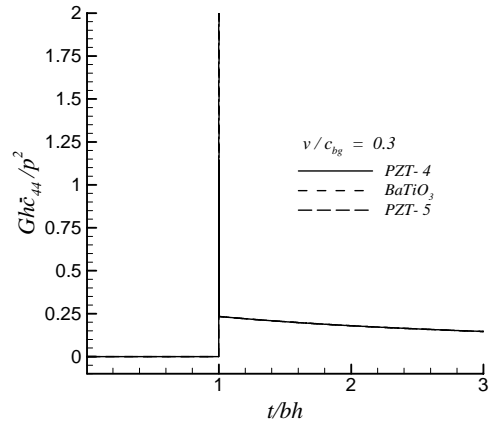
圖二十三



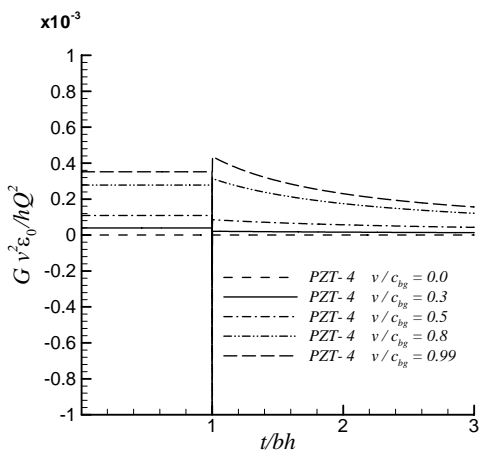
圖二十四



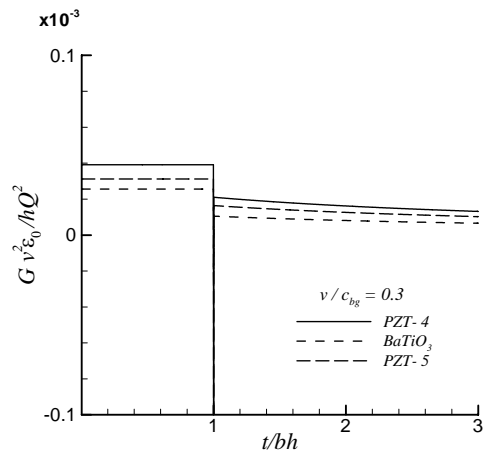
圖二十五



圖二十六



圖二十七



圖二十八

材料常數 材料種類	$c_{44}$ $(\frac{10^{10} N}{m^2})$	$e_{15}$ $(\frac{C}{m})$	$\epsilon_{11}$ $(\frac{10^{-9} F}{m})$	$\epsilon_0$ $(\frac{10^{-12} F}{m})$	$\epsilon_{11} / \epsilon_0$ $10^3$	$k_v$ $10^{-2}$	$b_{bg}$ $(\frac{s}{m})$
<i>BaTiO</i> <sub>3</sub>	4.4	11.4	9.872	8.854	1.115	1.436	1.00000002
<i>PZT</i> 4	2.56	12.7	6.4634	8.854	0.730	2.599	1.00000022
<i>PZT</i> 5	2.11	12.3	8.1102	8.854	0.916	2.262	1.00000013

表一 壓電材料常數