

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

含擴展裂紋之壓電材料動力破壞解析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-032-002-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：淡江大學航空太空工程學系(所)

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：王茂榮、鍾煥生、郭詮

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 15 日

一、摘要

近年來，壓電材料元件隨著材料開發與製造技術的進步，其應用範圍十分廣泛，但因為壓電材料大多是由脆性物質所構成，故其破壞相關研究實屬非常重要之課題。本文研究內含擴展裂紋之壓電材料的動力破壞問題，解析一含半無限長擴展裂紋之六角壓電材料，於距離裂紋尖端 h 處之裂紋面受一對反平面動力點載荷之暫態效應。本文使用積分轉換法與 Wiener-Hopf 推導壓電材料於拉普拉氏轉換域中受空間指數應力分佈型之基本解，並利用此基本解來解析此包含特徵長度的壓電材料動力暫態問題，最後使用 Cagniard's method 來作逆轉換得到時域中的解。最後本文針對應力強度因子與電位移強度因子以及能量釋放率等解析解，做詳細的數值計算與討論。

二、背景與目的

壓電材料為近幾年漸受重視的新興材料，隨著材料開發與製造技術的進步，人們對壓電性質的應用也日漸普及廣泛。直到今日已知有一百多種以上的材料或複合材料具有壓電性質(Pohanka and Smith, 1988)，因壓電材料大多為脆性物質，且應用時多處於振動狀態，故其相關動力破壞問題的研究就更不可忽視。

研究含裂紋之壓電材料破壞問題時，如何假設裂紋面之邊界條件至今仍有爭論。Parton (1976)首先研究了壓電材料的破壞問題，他假設裂紋面為無曳引力(traction-free)但具可誘電性(permeable)，所以電位能與電位移的垂直分量在裂紋面處為連續。與此假設相關的研究有: Meguid and Wang (1998)。但是因為實際上壓電材料的介電常數(permittivity)比空氣或真空要大很多，所以裂紋上下表面的電位能應該不同。Deeg (1980)探討了壓電材料內之差排、裂紋與內箝物之問題，他假設在裂紋面上電位移的垂直分量為零，也就是裂紋面為不可誘電性(impermeable)。Pak (1990)對此假設的有效性做了進一步的研究，故此類邊界條件稱之為 D-P condition。除了上面兩種裂紋面邊界條件的假設外，Bleustein (1968)假設了另外兩種邊界條件。第一種為假設裂紋面覆蓋了一層極薄的導電金屬，且導電電極(conducting electrode)完美接地，所以裂紋上下表面處的電位能皆為零。第二種為真空邊界條件，即假設上下兩裂紋間存在一真空區域。此外還有 McMeeking (1989)假設裂紋上下表面間充滿了導電的液體，由於每種假設各有其優缺點，所以至目前為止，何種假設較完美在文獻上尚未有統一的想法。

近年來才開始有學者研究壓電陶瓷材料的動力破壞問題，不過因為逆轉換的困難，因此以往大多的研究，都必須透過數值計算輔助才能解出時域中之暫態解，並不容易得到顯式解析解。有鑑於此，本文將採用基本解疊加的解析方式，採用 Wiener-Hopf technique 以及 Cagniard-de Hoop 逆轉換法，可順利求出以往無法獲得在時間域內的解析解。

三、壓電擴展裂紋基本解

本文研究之壓電材料為結晶點群特性為六角(hexagonal)結晶系。且假設其僅

受反平面之動力點載荷，其控制方程式可表示如下：

$$c_{44}\nabla^2 w + e_{15}\nabla^2 \phi = \rho\ddot{w}, \quad (1)$$

$$e_{15}\nabla^2 w - \varepsilon_{11}\nabla^2 \phi = 0. \quad (2)$$

其中 w 為 z 方向的位移、 ϕ 為電位能、 c_{44} 為彈性係數、 e_{15} 為壓電常數、 ε_{11} 為介電常數、 ρ 為材料密度、 E 為電場強度。其本構方程式可表示如下：

$$\tau_{xz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (6)$$

由於本文所探討之裂紋為一擴展裂紋，故將以上方程式轉至移動座標系統，並引進一變數變換（Bleustein (1968)）可得

$$(1-b^2v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2b^2v \frac{\partial^2 w}{\partial w \partial t} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$\tau_{\xi z} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (9)$$

$$\tau_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (10)$$

$$D_\xi = e_{15} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (11)$$

$$D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (12)$$

其中 $\xi = x - vt$ ，且

$$\psi = \phi - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w. \quad (13)$$

基本解之問題乃是考慮在一無窮域的六角晶系對稱壓電材料內，有一半無限長之擴展裂紋，裂紋位於 $y=0$ ，且以等速 v 向右（ $+x$ 方向）擴展，假設在裂紋表面上鍍上一層極薄之電極接地，並施予一拉普拉斯轉換域中之指數分佈的對稱曳引力於擴展裂紋面上，其邊界條件可表示如下述三式

$$\bar{\tau}_{yz}(\xi, 0, s) = e^{s\eta\xi}, \quad -\infty < \xi < 0, \quad (14)$$

$$\bar{w}(\xi, 0, s) = 0 \quad , \quad 0 < \xi < \infty, \quad (15)$$

$$\phi(\xi, 0^+, t) = \phi(\xi, 0^-, t) = 0, \quad -\infty < \xi < 0. \quad (16)$$

此種邊界條件為一混合型的邊界值問題，為求解此一類型之問題，我們將採用 Wiener-Hopf 技巧在 $\text{Re}(\eta) > \text{Re}(\lambda)$ 的限制下可求得一次拉普拉斯轉換域中的解如下

$$\bar{w}(\xi, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{s \left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\alpha^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (17)$$

$$\bar{\tau}_{\xi z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\bar{c}_{44} \lambda m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\alpha^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{e_{15}^2 \lambda m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\epsilon_{11} \left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\beta^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (18)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{-\bar{c}_{44} \alpha^*(\lambda) m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\alpha^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{e_{15}^2 \beta^*(\lambda) m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\epsilon_{11} \left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\beta^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (19)$$

$$\bar{D}_\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{e_{15}^2 \lambda m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\beta^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (20)$$

$$\bar{D}_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{-e_{15} \lambda m^*(\eta) \sqrt{\frac{1}{c+v} - \lambda}}{\left(\frac{1}{c_{bg} + v} - \lambda \right) \mathcal{Q}_-^*(\lambda)(\eta - \lambda)} e^{-s\beta^*(\lambda)y + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (21)$$

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)} = \frac{\sqrt{2} \left(\bar{c}_{44} m^*(\eta) \sqrt{1 - b^2 v^2} - \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} \right)}{\sqrt{s}}, \quad (22)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)} = \frac{\sqrt{2}e_{15}m^*(\eta)}{\sqrt{s}}, \quad (23)$$

其中

$$Q_+^*(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{c-v}} \tan^{-1}\left[\frac{k_e^2 z}{\alpha^*(-z)}\right] \frac{dz}{z+\lambda}\right\},$$

$$Q_-^*(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{c+v}} \tan^{-1}\left[\frac{k_e^2 z}{\alpha^*(z)}\right] \frac{dz}{z-\lambda}\right\},$$

$$m^*(\eta) = \frac{F_+^*(\eta)}{-\bar{c}_{44}(\sqrt{1-b^2v^2-k_e^2})},$$

$$F_+^*(\eta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{c-v} + \eta}}{\left(\frac{1}{c_{bg}-v} + \eta\right)Q_+^*(\eta)},$$

$$k_e = \sqrt{\frac{e_{15}^2}{\bar{c}_{44}\varepsilon_{11}}}, \quad \bar{c}_{44} = c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho}{\bar{c}_{44}}}$$

$$c_{bg} = \frac{1}{b}\sqrt{1-k_e^4} = c\sqrt{1-k_e^4} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}}{\rho}}\sqrt{1-k_e^4}, \quad b_{bg} = \frac{1}{c_{bg}},$$

$$\alpha^*(\lambda) = \sqrt{b+\lambda(1-bv)}\sqrt{b-\lambda(1+bv)} = \alpha_+^*(\lambda)\alpha_-^*(\lambda),$$

$$\beta^*(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon^2 - \lambda^2}.$$

四、含半無限長擴展裂紋之壓電材料動力破壞解析

考慮一無窮域之六角結晶系壓電材料內，含有一半無限長靜止裂紋，而在時間 $t=0$ 時，距離裂紋尖端 h 處施加一對大小為 p 的反平面動力點載荷，而裂紋面上則鍍上一層極薄電極接地，如圖 1 所示。其邊界條件可表示為

$$\tau_{yz}(x,0,t) = -p\delta(x+h)H(t). \quad (24)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 為 Dirac delta function， $H(\cdot)$ 為 Heaviside function。

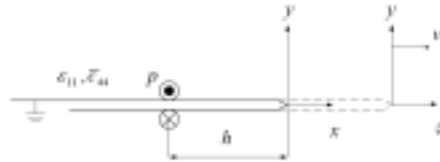


圖 1 移動裂紋座標示意圖

將(24)式中之入射應力場轉換至拉普拉斯轉換域中並表示如下

$$\bar{\tau}_{yz}^{-i}(x,0,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} -pe^{s\lambda(h+x)} d\lambda, \quad \text{Re}(\lambda) < 0 \quad (25)$$

此式為存在於轉換域中裂紋面上指數形式 $e^{s\eta x}$ 的應力，吾人便可利用前節所得之基本解加以疊加。利用(22)與(23)式（令其中 $v = 0$ ）可得應力強度因子與電位移強度因子如下：

$$\bar{K}_{III}^{(\tau)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\eta_1}} -pe^{s\eta_1 h} \left\{ \frac{-\sqrt{2}F_+(\eta_1)}{\sqrt{s}} \right\} d\eta_1 \quad (26)$$

$$\bar{K}_{III}^{(D)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\eta_1}} -pe^{s\eta_1 h} \left\{ \frac{\sqrt{2}e_{15}F_+(\eta_1)}{\sqrt{s}(-c_{44})(1-k_e^2)} \right\} d\eta_1 \quad (27)$$

其中

$$F_+(\eta) = F_+^*(\eta) \Big|_{v=0}.$$

利用 Cagniard's method 作逆轉換，便可求得其在時間域中的解：

$$K_{III}^{(\tau)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h}} p \int_0^t \text{Re} \left[\frac{\sqrt{\tau - bh}}{(\tau - b_{bg} h) Q_-\left(\frac{\tau}{h}\right) \sqrt{t - \tau}} \right] d\tau, \quad (28)$$

$$K_{III}^{(D)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 h} \frac{pe_{15}}{c_{44}(1-k_e^2)}} \int_0^t \text{Re} \left[\frac{\sqrt{\tau - bh}}{(\tau - b_{bg} h) Q_-\left(\frac{\tau}{h}\right) \sqrt{t - \tau}} \right] d\tau, \quad (29)$$

當負載施加在裂紋面之瞬間，即產生一圓柱型入射波，但由觀察上述(28)、(29)二式中，在入射剪力波尚未到達裂紋尖端時，即時間 $t < bh$ 時，式中的函數為純虛數，因此我們認為在剪力波尚未通過裂紋尖端時，應力與電位移強度因子之值為零，當剪力波通過裂紋尖端，時間 $t > bh$ 後，開始有值，但當時間 $t = b_{bg} h$ 時，我們可由上述二式發現會產生一奇異點，而造成強度因子趨近於無窮大。但是在時間 $t > b_{bg} h$ 時，可採用圍線積分方法將此(28)與(29)兩式積得如下：

$$K_{III}^{(\tau)}(t) = p \sqrt{\frac{2}{\pi h}} H(t - b_{bg} h), \quad (30)$$

$$K_{III}^{(D)}(t) = \frac{e_{15} P}{c_{44}(1-k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} H(t - b_{bg} h). \quad (31)$$

我們可發現當時間 $t > b_{bg} h$ 時，即表面波通過裂紋尖端時，不論應力強度因子及電位移強度因子皆會跳到一定值，其為此問題之強度因子的靜力解。

此問題之能量釋放率可利用下式計算

$$G(t) = 2 \lim_{dx \rightarrow 0} \int_{-dx}^{dx} \tau_{yz}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx. \quad (32)$$

最後可得

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{p^2}{\pi^3 \bar{c}_{44} (1 - k_e^2)} \left[\int_0^t \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{t_1 - bh}}{(t_1 - b_{bg}h) Q_+ \left(\frac{t_1}{h} \right) \sqrt{t - t_1}} \right] dt_1 \right]^2 \\ &= \frac{1}{2 \bar{c}_{44} (1 - k_e^2)} \left[K_{III}^{(\tau)}(t) \right]^2 \end{aligned} \quad (33)$$

接下來，我們假設在時間 $t > b_{bg}h$ 時，即表面波通過裂紋尖端，此裂紋以等速度 v 向裂紋前端沿直線擴展，亦即強度因子大於破壞韌性而造成裂紋等速度擴展。為解此擴展裂紋問題，首先將邊界條件式(24)的座標轉換至移動座標如下：

$$\tau_{yz}(\xi, 0, t) = -p \delta(\xi + v(t - b_{bg}h)) H(t), \quad (34)$$

並將式(34)轉換至拉普拉斯轉換域如下：

$$\bar{\tau}_{yz}(\xi, 0, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{pd}{\lambda - d} e^{sh(1-b_{bg}v)\lambda + s\lambda\xi} d\lambda, \quad (35)$$

其中 d 為裂紋擴展速度的慢度，即 $d = 1/v$ 。而上式也為存在裂紋面上一指數型式之應力，故可利用式(22)與(23)進行疊加如下：

$$\bar{K}_{III}^{v(\tau)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} \frac{pde^{sh(1-b_{bg}v)\eta}}{\eta - d} \left\{ \frac{-\sqrt{2}F_+^*(\eta)}{\sqrt{s}} \right\} d\eta, \quad (36)$$

$$\bar{K}_{III}^{v(D)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} \frac{pde^{sh(1-b_{bg}v)\eta}}{\eta - d} \left\{ \frac{-\sqrt{2}e_{15}F_+^*(\eta)}{\sqrt{s\bar{c}_{44}(\sqrt{1-b^2v^2-k_e^2})}} \right\} d\eta, \quad (37)$$

利用 Cagniards method 作逆轉換可得

$$\begin{aligned} K_{III}^{v(\tau)}(t) &= \frac{(1 - b_{bg}v)}{\sqrt{1 - bvQ_+^*(d)}} \\ &\quad \times p \sqrt{\frac{2}{\pi[v(t - b_{bg}h) + h]}} H(t - b_{bg}h), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} K_{III}^{v(D)}(t) &= \frac{e_{15}(1 - b_{bg}v)}{\bar{c}_{44}(\sqrt{1 - b^2v^2 - k_e^2})\sqrt{1 - bvQ_+^*(d)}} \\ &\quad \times p \sqrt{\frac{2}{\pi[v(t - b_{bg}h) + h]}} H(t - b_{bg}h). \end{aligned} \quad (37)$$

同理，由(32)式可計算出能量釋放率

$$G_v(t) = \frac{p^2 d^2 h (1 - b_{bg}h)}{\pi^3 \bar{c}_{44} (\sqrt{1 - b^2v^2 - k_e^2})}$$

$$= \frac{1}{2\bar{c}_{44}(\sqrt{1-b^2v^2}-k_e^2)} \left[K_{III}^{v(\tau)} \right]^2. \quad (38)$$

五、數值計算結果與討論

在前述的分析中，我們已推導出在無窮域壓電材料內中含半無限長擴展裂紋的應力與電位移強度因子以及能量釋放率，本節將就在不同材料中，裂紋受動力負載時以不同之擴展速度所做的數值計算做討論。

我們首先觀察在單一材料內，裂紋以不同速度擴展，所產生之結果；圖 2 即為在 *PZT4* 材料中，裂紋擴展速度與剪力波速度比分別為 0.3、0.5、0.8 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的應力強度因子，在圖中我們可以清楚看到，當表面波抵達裂紋尖端時，擴展裂紋之應力強度因子也會趨近於負無限大，而當波通過裂紋尖端，應力強度因子會漸漸衰減，且裂紋擴展速度越快時，應力強度因子之值越小，反之，裂紋擴展速度越慢，應力強度因子之值則會越大。

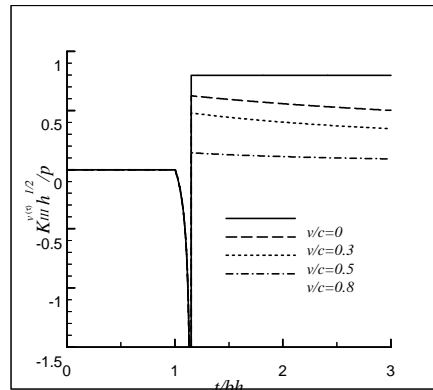


圖 2 *PZT4* 含擴展裂紋的應力強度因子

圖 3 為在 *PZT4* 材料中裂紋擴展速度與剪力波速度比分別為 0.3、0.5、0.8 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的電位移強度因子，在表面波通過裂紋尖端時會與應力強度因子有相同現象，其絕對值會漸漸衰減，且擴展速度越快 $K_{III}^{v(D)}(t)$ 的絕對值大小越小。圖 4 則為含擴展裂紋之 *PZT4* 材料，其裂紋擴展速度與剪力波速度比同為 0.3、0.5、0.8 以及裂紋靜止的狀態下，所得到的能量釋放率，由於能量釋放率與應力強度因子的平方有著正比之關係，故在圖中也可發現與應力強度因子相同之特性。

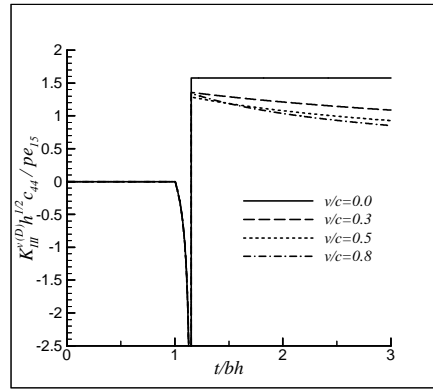


圖 3 PZT4 含擴展裂紋的電位移強度因子

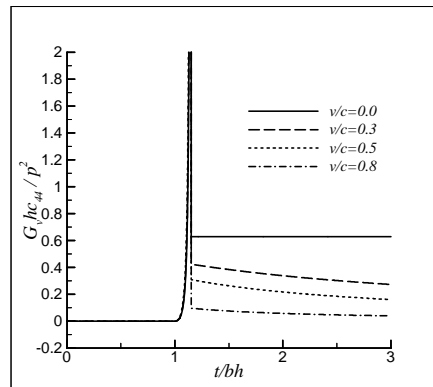


圖 4 PZT4 含擴展裂紋的能量釋放率

在觀察完單一材料內中，含不同速度擴展速度的應力強度因子、電位移強度因子與能量釋放率之特性後，接著我們將固定裂紋擴展之速度，觀察在不同材料內，應力強度因子、電位移強度因子與能量釋放率的現象。在圖 5 中，我們固定裂紋擴展速度為剪力波波速的 0.3 倍，分別在 $BaTiO_3$ 、PZT4、PZT5H 等三種不同材料中，所得到的應力強度因子之值，在不同材料中表面波抵達裂紋尖端時，其值皆會趨近於負無限大，而波通過裂紋尖端後，在各個材料中的應力強度因子值會漸漸衰減而非趨近於定值。而圖 6 與圖 7 則分別表示在三種材料內，裂紋擴展速度仍為剪力波波速的 0.3 倍，所得到的電位移強度因子值與能量釋放率，在表面波通過裂紋尖端後，其值隨著時間遞增而數值均平緩的遞減。在能量釋放率的部分，當裂紋擴展速度與表面波波速相同時，此時能量釋放率之值會趨近於零，這意味著裂紋將會因此而停止的向前擴展，則材料結構也將停止破壞。因此裂紋擴展速度定會小於表面波波速。

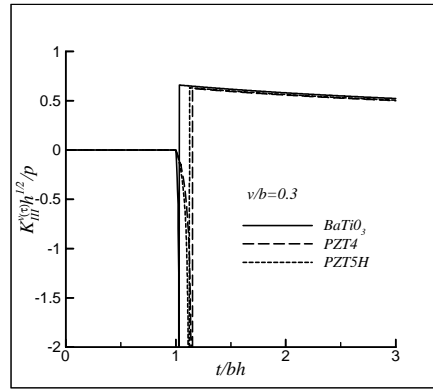


圖 5 含擴展裂紋 $v/c = 0.3$ 的應力強度因子

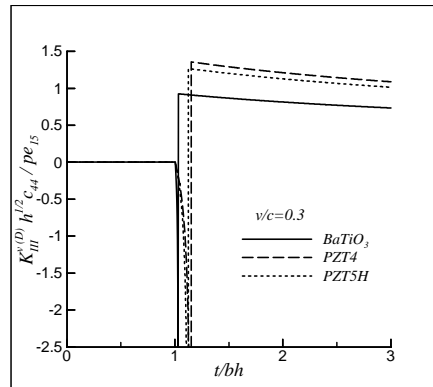


圖 6 含擴展裂紋 $v/c = 0.3$ 的電位移強度因子

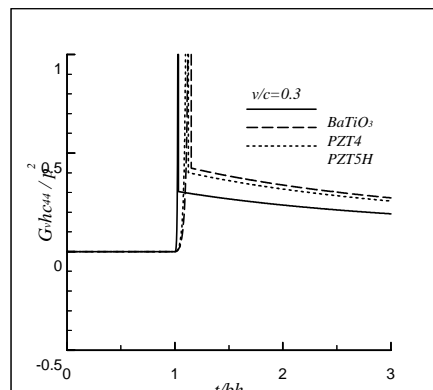


圖 7 含擴展裂紋 $v/c = 0.3$ 的能量釋放率

六、計畫成果自評

本計畫結果成功獲得了壓電材料之擴展裂紋基本解，並利用其來解受動力負載之擴展裂紋的暫態效應，得到了應力強度因子、電位移強度因子與能量釋放率之顯式解，最後亦對數值結果作了詳盡的討論。本成果與原計畫所預期達到之目

標完全吻合，此外，本結果具有一定之學術價值，將來並可發表於相關之期刊文獻上。

七、參考文獻

- Bleustein, J. L., "A New Surface Wave in Piezoelectric Materials," *Applied Physics Letters*, Vol. 13, pp. 412-413 (1968).
- Deeg, W. F., "The Analysis of Dislocation, Crack and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids," Ph.D Thesis, Stanford University (1980).
- McMeeking, R. M., "On Mechanical Stresses at Cracks in Dielectrics with Application to Dielectric Breakdown," *Journal of Applied Physics*, Vol. 28, pp. 605-613 (1989).
- Meguid, S. A., and Wang, X. D., "Dynamic Antiplane Behavior of Interacting Cracks in a Piezoelectric Medium," *International Journal of fracture*, Vol. 91, pp. 391-403 (1998).
- Pak, Y. E., "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp.647-653 (1990).
- Parton, V. Z., "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Acta Astronaut*, Vol. 3, pp. 671-683 (1976).
- Pohanka, R. C., and Smith, P. L., "Recent Advances in Piezoelectric Ceramics," *Electronic Ceramics* (ed. L. M. Levinson). Marcel Dekker, New York (1988).