

旋翼葉片及三維尾流之非線性耦合系統特徵值分析

The Eigen-analysis of A Nonlinear Blade-Wake Coupled System

計畫編號: NSC 89-2612-E-032-001

執行期限: 88.8.1.-89.7.31.

主持人: 王怡仁 淡江大學航太工程學系

計畫參與人員: 彭暉元、李明峰、張鴻文 淡江大學航太工程學系

一、中文摘要

特徵值 (eigen-value) 及特徵向量 (eigen-vector) 的分析是一般分析旋翼系統之穩定性常用的方法。本研究利用解析的方法將尾流運動方程、葉片空氣動力學及一個非線性複材葉片的結構運動方程整合成一耦合的系統, 在某一選定的結構振動頻率範圍內, 本研究將利用 Galerkin 法及 Duncan 多項式將其展開, 並分成非線性平衡態及線性擾動態兩種方程式。而非線性部份將利用數值法求出與時間無關之係數, 再與擾動項合併且線性化之後, 利用 Floquet 理論求解該系統之特徵值及特徵向量並尋求物理現象之解釋。

關鍵詞: 直昇機, 旋翼葉片, 尾流動力學, 拍撲-延遲-扭轉, 阻尼。

Abstract

An eigen-analysis provides stability information for a rotor system, and it is also an important part of rotor aeroelastic analysis. The resonance phenomenon can be predicted by eigen-analysis as well. In this research, a new three-dimensional wake and nonlinear composite rotor blade flap-lag-torsion coupled model will be developed. The Galerkin's method and Duncan polynomials are used to expand this nonlinear coupled equation into equilibrium and disturbant parts. The nonlinear phenomenon will be investigated through eigen-analysis. Hopefully, some of the physical meanings behind the nonlinear resonance would be discovered through eigen-vector point of view.

Keywords: Helicopter, Rotor Blades, Wake Dynamics, Resonance, Eigen-value.

二、緒論

早期的旋翼特徵值分析僅限於一個簡略的二維氣動力理論及剛性葉片做為模擬; 因此可利用古典的特徵值法求出解析的理論解 [1]。就彈性葉片而言, Hodges [2,3], 提供了旋翼葉片在結構上較為真實的模擬。然而就直昇機主旋翼而言, 尾流環境是不可忽視的一環。有關尾流環境的模擬, 從早期的二維非穩態理論 [4] 及實驗量測 [5], 直到計算流力的自由流法 (free wake analysis) [6] 及半經驗的預設尾流法 (prescribed wake analysis) [7] 皆提供了較準確的理論預估值。然而

這些理論卻太專注於流場的分析而忽略了與結構葉片相耦合的包容性。有鑒於此, Peters 及 Pitt 是最早從事此尾流理論研究的人 [8], 經過不斷的修正, 直到近十年才有成熟的動力尾流 (dynamic wake) 理論提出 [9]。在 1994 年 Peters 及 de Andrade 的研究 [10] 歸納出就 lead-lag 阻尼而言, 尾流的影響佔了前人研究誤差的 50%。同一時期利用此尾流理論從事旋翼氣體彈性耦合系統之特徵值分析者, 就剛性葉片之假設而言有 He 等人 [11], 就彈性葉片及前飛之特徵值分析者, 則有 Wang 及 Peters 等人 [12]。以上皆為利用 Peters 之動力尾流理論於旋翼之特徵值分析之研究實例。而尾流之重要性, 也隨著被重視。

就葉片結構分析而言, 隨著計算能力日新月異, 非線性葉片的分析及耦合系統的分析已是主旋翼研究課題的趨勢。在 1992 年 Pai 及 Nayfeh [13,14] 所發展的非線性複材葉片的模式提供了一個從事複材葉片理論分析的工具。比較 Pai 之葉片運動方程及 Hodges [3] 之理論; Pai 對於材料硬度的描述, 就 lead-lag、flapping 及 twisting 的曲率而言是採用 global curvature 的假設, 而 Hodges 是利用 local stress-strain relationship 的計算方式求解 stiffness 的值。根據筆者初步的探試, Pai 及 Hodges 之運動方程就其線性項而言, Pai 仍比 Hodges 至少在 lead-lag、flapping 及 twisting 等自由度上多考慮了結構阻尼的影響 [15], 因此就非線性葉片結構方程而言, Pai 之理論模式似乎是較佳的選擇。

本計畫將使用 Pai 等人所發展的非線性複材葉片之原始理論為依據, 利用 unsteady airfoil theory 及 quasi-steady strip theory 推導每個葉片在弦向、拍撲向及扭轉向的空氣動力函數, 然後將此方程式經過座標轉換以利於與 Peters 動力尾流方程式耦合; 藉以形成一個非線性的旋翼葉片氣體彈性運動方程式。而本模式的結構方程同時允許層疊式複材葉片的構造, 相信對於日後複材葉片的分析也能建立良好的基礎。

三、非線性葉片結構動力方程的推導

Pai 之三維非線性複材葉片的運動方程是使用牛頓法推導而出, 而基於細長葉片之彎曲及變形的程度, 相較於 Hodges 之固定 x-y-z 座標, 其

結果是一組極為複雜之高非線性方程組，其中包含 3 個運動方程及三個未知量（弦向，撲拍向及扭曲方向）。而由於 Peters 及 Hodges 的座標設定與 Pai 之座標相差 90 度的旋轉角，因此我們仍得將無因次化之三個非線性偏微方程式轉換到與 Peters (或 Hodges) 相同之座標，以利於和尾流方程相耦合。無因次化後的複材結構方程經轉換後可得 v 、 w 、 γ 的運動方程式如下：

$$\begin{aligned} & \bullet v'' + \beta_{22}v'' - j_3v'' + \left\{ \mu_4v'' - \beta_{21} \left[v'(w'w'' + v'v'') \right] + \beta_{11}(v'v'') \right\} \\ & + (\beta_{22} - 1) \left\{ (w'' - \gamma^2v'') - w'' \int_0^x w'v' dx \right\} - \frac{1}{2} \left[-v' \int_0^x \left[(w'^2 + v'^2) dx \right] \right] \quad (1) \\ & + \beta_{11} \left\{ -\gamma'' - \gamma'v'' + w'' - \gamma^2 + \gamma' \int_0^x w'v' dx \right\} + \left\{ -v' \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right\} \\ & + \left[\frac{1}{2} v' (w'^2 + v'^2) \int_0^x x dx - v' \int_0^x \left[-2v'' - x + \frac{1}{2} \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx \right] = -L_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet w'' + w'' + \beta_{13}\gamma'' - j_2w'' - \left\{ \mu_4w'' - \left[w'(w'w'' + v'v'') \right] \right\} \\ & + \beta_{11}(v'v'') + (\beta_{22} - 1) \left\{ (-\gamma'' - \gamma^2w'') - v'' \int_0^x w'v' dx \right\} \quad (2) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ w' \int_0^x \left[\int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx \right\} \\ & + \beta_{13} \left\{ w''v'' - \frac{1}{2} w'^2 \gamma'' - v''\gamma'' + \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma'' + \gamma \gamma'^2 \right\} \\ & - \left\{ (j_3 - j_1) \gamma'' + w'' \right\} - j_2 (v'') - \frac{1}{2} w' (w'^2 + v'^2) \int_0^x x dx \\ & + w' \int_0^x \left[-2v'' - x + \frac{1}{2} \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx = L_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet j_3\gamma'' - \beta_{13}\gamma'' - \beta_{13}w'' - \left\{ \mu_4\gamma'' + (1 - \beta_{22}) \left[w'^2 - v'^2 \right] \gamma'' + w''v'' \right\} \\ & - j_1 \left(\int_0^x w'v' dx \right)'' + j_1 (w'v'') + (j_2 - j_3) \left\{ w'^2 - v'^2 \right\} \gamma'' + v''w'' \quad (3) \\ & + \beta_{13} \left\{ -v''\gamma'' + v'' \int_0^x w'v' dx - \frac{1}{2} w''\gamma^2 + \frac{1}{2} w''w'^2 + w''w' + w'v'' \right\} \\ & - \left\{ -j_1w'' + (j_2 - j_3) \left[(w'' - 2w''\gamma^2 - 2v''\gamma + 2v'' \int_0^x w'v' dx) \right] \right\} \\ & + \left\{ -\gamma'' + \int_0^x w'v' dx + \gamma w'^2 + \frac{2}{3} \gamma^3 \right\} = L_\gamma \end{aligned}$$

其中 v 乃是 lead-lag 之位移， w 為 flapping 之位移， r 為 torsion 之旋轉，而 $\beta_{11} = D_{11} / D_{33}$ ， $\beta_{22} = D_{22} / D_{33}$ ， $\beta_{13} = D_{13} / D_{33}$ 。而 D_{11} ， D_{22} ， D_{33} 及 D_{12} 則分別代表 torsion， v 方向之 bending 的硬度 (stiffness) 及 w 方向之 bending 的硬度以及 bending-twisting 互相耦合的硬度值。

四、葉片上空氣動力表示式之推導

就一個完整的氣體彈性力學系統而言，應該包含了結構動力、尾流動力與空氣動力之間耦合的系統，對於本模式而言由於是一振動的葉片，而且本文的目的在於求得 v 、 w 、 γ 在葉片上的位移，因此相對之運動應以葉片為參考座標，詳圖一，現將空氣動力的理論表示如下，由圖一得知， U 是翼剖面相對於流場之速度，而在 v 及 w 方向及第 q 片葉片之升力可表成如下：

$$\begin{cases} L_v = L_C \sin \phi - D \cos \phi \\ L_w = L_C \cos \phi + L_{NC} \cos \theta + D \sin \phi \\ L_q = L_w(\text{circulatory}) = L_C \cos \phi + D \sin \phi \end{cases} \quad \text{及} \quad (4)$$

$$\begin{cases} L_C = \frac{1}{2} \rho a c \left(-U^2 + U \frac{c}{2} \dot{\epsilon} \right) \alpha \\ L_{NC} = \frac{1}{8} \rho a c^2 \left(-\dot{U}_p + \frac{c}{2} \dot{\epsilon} \right) \alpha \\ D = \frac{1}{2} \rho c U^2 C_{d_0} \end{cases}$$

其中， L_C 為環流升力， L_{NC} 為非環流升力，我們將 U 分為 U_p 與 U_T 兩分量，則 $U = \sqrt{U_p^2 + U_T^2}$ ， $\phi = \tan^{-1} U_p / U_T$ ， $\alpha = \theta - \phi$ ，而 $U_p = -v_i + \dot{w}$ ， $U_T = \dot{x} + \dot{v}$ ；此外， $\dot{\epsilon}$ 為翼剖面 (airfoil) 在俯仰方向的角速度。

五、Peters 動力尾流理論

Peters 動力尾流理論主要之數學理論是以普朗特加速位勢函數 Φ 為基礎推衍而來，由此定義誘導流速度的表示式可以雷建德函數 (Legendre function) 和傅立葉級數來表示 [11, 16]。其滯空前飛時的矩陣型式之一階常微分方程式：

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & K_n^{ms} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [A_n^s] & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_n^s \\ \vdots \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} \vdots \\ [B_n^{ms}] \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_n^s \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tau_n^{ms} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

在式 (5) 中 α_n^s 及 β_n^s 代表誘導流的狀態函數 (induced flow state variable) 的餘弦及正弦部份， $[L]$ 為誘導流影響係數矩陣 (induced flow influence coefficient matrix)， $[K]$ 為質量矩陣； $[A]$ 及 $[B]$ 為轉換矩陣，提供了徑向誘導流之分佈的耦合性。而此尾流方程式 (式 (5)) 之外力函數 (右邊項) 為 cosine 部份：

$$\tau_n^{ms} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^Q \int_0^1 L_q(\bar{r}, \bar{t}) \bar{P}_n^m \frac{1}{v} d\bar{r} \cos(m\psi_q) \quad (6)$$

sine 部份：

$$\tau_n^{ms} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^Q \int_0^1 L_q(\bar{r}, \bar{t}) \bar{P}_n^m \frac{1}{v} d\bar{r} \sin(m\psi_q) \quad (7)$$

其中 L_q 代表第 q 片葉片的升力。

六、耦合模式的建立

式 (1)、(2) 及 (3) 其右邊項之 L_v ， L_w 及 L_γ 則分別由式 (4) 代入。至於式 (5) 右邊的壓力項 (式 (6)、(7)) 內的 L_q 則由式 (4) 之 L_q 代入。準此可建立一個整合了結構動力、空氣動力及尾流動力之氣體彈性方程式。然而細觀這一組方程式的各項，其中包括了積分、偏微分及諸多非線性項，因此再進一步的展開或簡化乃是求解的必要

步驟。

首先我們利用 Galerkin's method, 將變數轉換為 equilibrium term 與 disturbant term 和 comparison function 的積:

$$v = \sum_{k=1}^3 (\bar{v}_k + \delta v_k) \Psi_k, \quad w = \sum_{k=1}^3 (\bar{w}_k + \delta w_k) \Psi_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^3 (\bar{\gamma}_k + \delta \gamma_k) \Theta_k \quad (8)$$

其中, Ψ_k 、 Θ_k 為 comparison function, 我們採用 modified Duncan 的多項式, 就一個 hingeless 的葉片而言 modified Duncan 多項式的偶數次方項正好可滿足本研究將探討的無銜接 (hingeless) 葉片的邊界條件之要求。將式 (8) 代入式 (1)~(3) 及式 (5) 中, 對其中的 v 、 w 、 γ 做展開, 如此則可到非線性耦合方程式。

七、結構頻率與其硬度之關係

為了瞭解不同材料對懸停時系統特徵值的影響, 本研究將扭轉向的振動頻率固定 ($\omega_\phi = 2.5$), 且令拍撲向 (flapping) 的振動頻率 $\omega_w = 1.05$, 然後變動 lead-lag 的振動頻率 (ω_v) 由 0.7~1.5; 而葉片扭角 (θ_0) 的變化由 0~0.3 (rad.), 因此吾人有必要求得相對於此頻率範圍之內的結構硬度值。據筆者事前資料的收集, 參考文獻 [17], Peters 發展出一套解析的公式可提供吾人上述的關係。該理論首先就一旋轉旋臂採用能量法及特徵向量之正交性求出一個結構之非旋轉振動頻率 (nonrotating frequency (ω_{NR})) 及硬度 (Stiffness) (η (for flap or lead-lag) 及 γ (for rotation)) 之間的關係然後再利用下式求取 η_v (lead-lag stiffness), η_w (flapping stiffness) 及 γ (rotation stiffness) 與旋轉頻率 (rotating frequency ω_v , ω_w 及 ω_ϕ) 之間的關係式

$$\omega_{Flap}^2 = n(2n-1) + \omega_{NR}^2 + f\omega_{NR} \tan^{-1} \left[\frac{A_m - n(2n-1)}{f\omega_{NR}} \right] \quad (9)$$

$$\omega_{Lead-lag}^2 = n(2n-1) - 1 + \omega_{NR}^2 + f\omega_{NR} \tan^{-1} \left[\frac{A_m - n(2n-1)}{f\omega_{NR}} \right] \quad (10)$$

$$\omega_{Torsion}^2 = \omega_N^2 + \frac{5}{4} + \frac{\pi^2}{12} (2n-1)^2 \quad (11)$$

準此, 則相對於各種結構振動頻率範圍的 stiffness 值便可求得。而將其代入本計畫所建立之耦合系統之後, 將可進行特徵值的分析。

八、特徵值的分析

本計畫的目的係求解非線性彈性葉片受到尾流的效應之下, 在不同旋轉自然振動頻率範圍之內其 lead-lag 的特徵值及其相對物理現象之分析。吾人將嘗試著先解出平衡態時如前述之頻率範圍內 ($0.7 \leq \omega_v \leq 1.5$, $\omega_w = 1.05$ 及 $\omega_\phi = 2.5$) 的 lead-lag、flapping 及 torsion 的位移量。由於擾動值係一極小量, 因此可求解一線性化之聯立方程組, 且令外力項為零, 則可構成一個在時域內的線性葉片—尾流擾動方程組, 然而 $[L_{ij}]$ 實則為時

間函數 (\bar{f}) 因此本研究將利用 Floquet Theory 所得之過渡矩陣 (transient matrix) 之複數型態特徵值求取系統之真正特徵值。如此將可求解系統之特徵值及特徵向量。

九、結果與討論

與 Da Silva 平衡態比較, 請先參考圖一~三: 在 lead-lag 方面, 由於我們考量了動力尾流的效應, 在此方向上, 就相同的材料性質而言, 理應有較大的位移量, 如圖一所示, 我們有此趨勢的位移量; 另者, 也許 Pai 的葉片結構方程在弦向的考量上較 Da Silva 的軟。在 flapping 方面, 如圖二所示, 我們有較大位移量的趨勢; 這是因為 Pai 的葉片結構方程在拍撲向的考量上較 Da Silva 的軟。在 torsional 方面, 如圖三所示, 由於動力尾流在高攻角的影響導致; 在 pitch angle=14° 後的位移量才明顯超越 Da Silva 的位移量。於弦向頻率與三方向位移敏感性分析比較方面, 請先參考圖四~六。lead-lag 的運動, 在相同的葉片結構方程、空氣動力、動力尾流的考量上, 如圖四所示, 在此自由度而言, 弦向頻率的增加, 則材料較硬, 因此位移量漸小。在 flapping 方面; 如圖五所示, 改變弦向的頻率並不會對拍撲向有任何影響, 這是因為我們將所有的自由度皆用 flapping 方向的 D33 正交化, 因此 flapping 的 stiffness 不變, 則其位移也不變; 此外, 另一個因素可能為弦向硬度的改變對於 in-plane 的運動才会有影響; 然而 flapping 是屬於 out-of-plane 的運動, 其受 in-plane 的影響不大。在 torsional 方面; 如圖六所示, 我們在較高的弦向頻率時, 葉片結構會有較硬的趨勢, 以致使當在翼根處打了 pitch angle 後, 翼尖跟著翼根做 torsion 的運動, 較不受空氣動力與動力尾流的影響, 如此, 隨著 pitch angle 的增加, 則 tip 攻角也隨著增加, 因此有正的 torsion 角度。而在較低弦向頻率影響之下的 torsion 自由度, 其相對的材料較軟, 因此當 pitch angle 增加時, tip 仍為負的攻角, 則其 torsion 的角度就負的越大了。

在參考文獻 [18] 中提及一個非線性的結構系統 (未考慮尾流影響時) 在 $\omega_v = 1.02$, $\theta_0 = 0.15$ (約 9°) 時有兩諧模虛部相近的 veering 的現象謂之非線性共振。而本研究發覺 (圖七) 由於尾流的影響所有的模態幾乎被耦合在一起, 而約 $\theta_0 = 8^\circ \sim 11^\circ$ 之間 (圖七的 θ_0 是由最右方的特徵值系列為 0°, 每隔 1° 為一區間, 至最左方為 12°) 有共振 (或 veering) 的現象。此共振發生的區間與 [18] 相比雖較廣, 可能是尾流耦合的緣故, 而幾乎所有的模態無論何種 ω_v (或材料) 在此區間都有共振的可能。此外在 [18] 中, 於 $\theta_0 = 0^\circ$ 時其特徵值虛部與原先 ω_v 的設定 (0.7~1.5) 相同, 然後依序隨著 θ_0 的增加而改變之。而本研究在 $\theta_0 = 0^\circ$ 時的起始特徵值並未與 ω_v 相同且不是呈直線分佈 (即實部有不同的值), 其原因可能是尾流及空氣

動力項已經耦合到整個系統內，因此會改變系統的特徵值，不似 [18] 的系統是一個純結構的方程式。

十、結論

(1) 不論在弦向、拍撲向及扭曲角向的尖端位移，我們的結果均有較大的趨勢，可見我們所使用 Pai 的結構方程在旋翼葉片 Stiffness 模擬上有較前人保守的趨勢。

(2) 弦向頻率改變對於各方向位移的敏感性分析：隨著弦向結構頻率的增加，則在弦向方面，結構有變硬的趨勢，而尖端位移漸漸的減少。拍撲向方面，out-plane 的拍撲向運動，不受 in-plane 的弦向結構頻率改變的影響，而有所不同。扭曲角向方面，受到弦向頻率增加的影響，在扭曲角向也有材料變硬的現象，而導致在低，但弦向頻率時，隨著 Pitch Angle 的增加，葉片尖端位移會漸漸減少，一旦弦向頻率夠高時，葉片尖端位移已較不受空氣動力的影響，會隨著 Pitch Angle 的增加，葉片尖端位移也會漸漸成現正值的增加。

(3) 特徵值的分析：由於尾流耦合的影響，整個系統特徵值無論是何種材料，其模態皆在 $\theta_0 = 8^\circ \sim 11^\circ$ 之間產生 veering 或非線性共振，希望此結果可提供直昇機設計的人士參考。

十一、誌謝

本文承蒙中華民國行政院國科會贊助，計畫編號為 NSC 89-2612-E-032-001，本文作者特此誌謝。

十二、自我評量

本研究內容與原計畫相符程度約 90%。原計畫所提及之各項平衡態葉片尖端位移及擾動態特徵值分析皆已完成。與前人比較也印證本研究結果之準確性；相信在學術界及業界都有助於其對於尾流的影響有更進一步的認識。然而由於複合材料葉片的振動頻率與材料硬度 (stiffness) 的關係不似本研究目前所考慮的均勻材質葉片單純。因此本研究雖然已建立複合材料葉片的運動模式，卻仍缺乏複材葉片的材料及結構特性資料，所以目前尚無法執行相對不同複材硬度的特徵值分析；然而這方面的問題卻值得後續研究。

十三、參考文獻

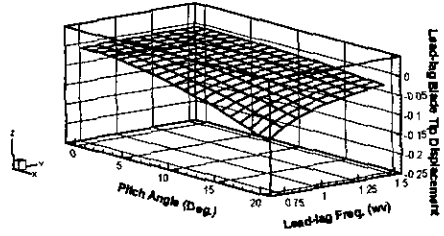
[1] Jones, J.O., "The Influence of the Wake on the Flutter and Vibration of Rotor Blades," *The Aeronautical Quarterly*, 9:3, August, 1958.
[2] Hodges, D. H. and Dowell, E. H., "Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades," NASA TN D-7818, December, 1974.
[3] Hodges, D. H. and Ormiston, R. A., "Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilever Rotor Blades in Hover with Variable Structural Coupling," NASA TN D-8192, April

1976.

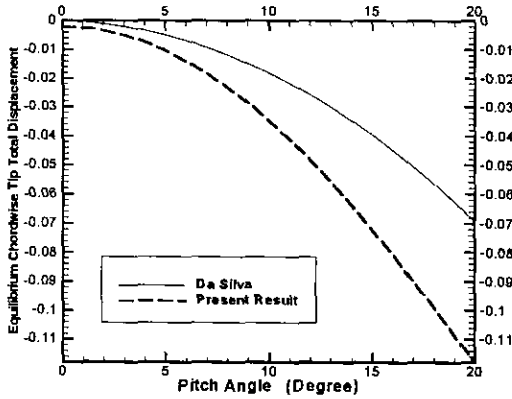
- [4] Loewy, R. G., "A Two Dimensional Approach to The Unsteady Aerodynamics of Rotary Wings," *Journal of Aerospace Science*, Vol., 24, pp.81-98, 1957
[5] Gray, R. B., "An Aerodynamic Analysis of a Single-Bladed Rotor in Hovering and Low Speed Forward Flight as Determined from Smoke Studies of the Vorticity Distribution in the Wake," Princeton University, Aeronautical Engineering Report No. 356, Sept. 1956.
[6] Clark, D. R., and Leiper, A. C., "The Free Wake Analysis - A Method for the Prediction of Helicopter Rotor Hovering Performance," the 25th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Washington, D. C., May, 1969.
[7] Sadler, S. G., "Development and Application of a Method for Predicting Rotor Free Wake Positions and Resulting Rotor Blade Airloads," NASA CR-1911 Vol. I; Model and Results, NASA CR-1912, Program Listing, 1971.
[8] Pitt, D. M., "Rotor Dynamic Inflow Derivatives and Time Constants From Various Inflow Models," Ph. D. Thesis, Sever Institute of Technology, Washington University, December, 1980.
[9] Peters, D. A., and He, C. J., "Comparison of Measured Induced Velocities with Results From a Closed Form Finite State Wake Model in Forward Flight," the 45th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Boston, Massachusetts, May 22-24, 1989.
[10] de Andrade, D., and Peters, D. A., "Correlation of Experimental Flap-Lag-Torsion Damping - A Case Study," *Mathematical and Computer Modeling - Rotorcraft Modeling, Part II*, Pergamon, pp. 135~158, 1994.
[11] He, C. J., "Development and Application of a Generalized Dynamic Wake Theory for Lifting Rotors," Ph. D. Thesis, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, July, 1989.
[12] Wang, Y.-R., and Peters, D.A., "The Lifting Rotor Inflow Mode Shapes and Blade Flapping Vibration System Eigen-Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 134, pp.91-105, 1996.
[13] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams - II. Flapwise Excitations," *Nonlinear Dynamics 2*, Kluwer Academic Publishers, pp.1-34, 1991.
[14] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "A Nonlinear Composite Beam Theory," *Nonlinear Dynamics 3*, Kluwer Academic Publishers, pp.273-303, 1992
[15] 王怡仁"三維尾流及旋翼葉片拍撲-延遲-扭轉耦合模式之建立及應用"國科會結案報

告，民國87年8月。

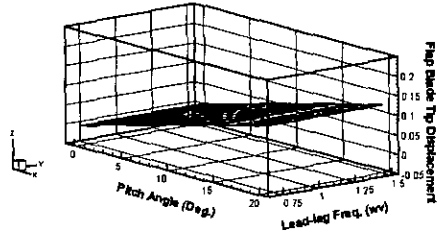
- [16] Wang, Y.-R., "The Effect of Wake Dynamics on Rotor Eigenvalues in Forward Flight," Ph. D. Thesis, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, May, 1992.
- [17] Peters, D. A., "An Approximate Solution For The Free Vibration of Rotating Uniform Cantilever Beams," NASA TM, X-62299, 1973.
- [18] Crespo da Silva, M. R. M., "A Comprehensive Analysis of The Dynamics of A Helicopter Rotor Blade," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 7-8, pp. 619-635., 1998.



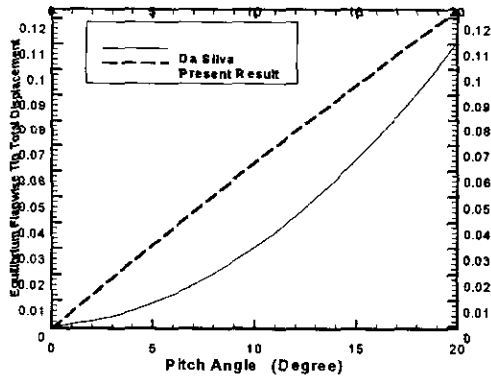
圖四. 擺振頻率 ω_v (0.7~1.5) 擺振向之葉片尖端位移



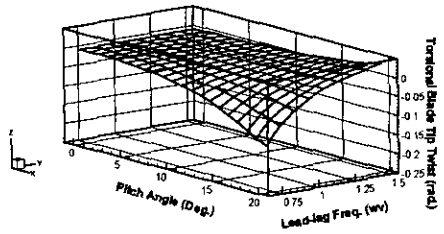
圖一. 擺振向之葉片尖端位移



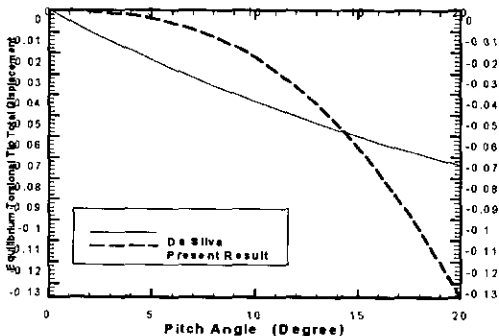
圖五. 擺振頻率 ω_v (0.7~1.5) 拍動向之葉片尖端位移



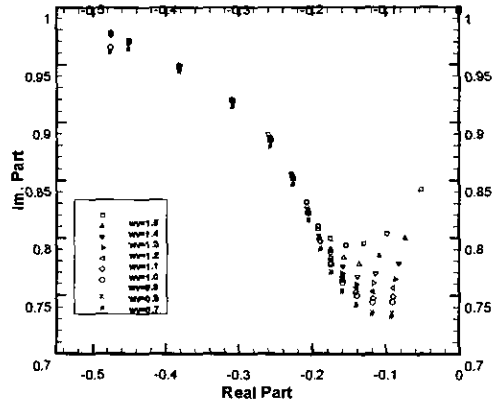
圖二. 拍動向之葉片尖端位移



圖六. 擺振頻率 ω_v (0.7~1.5) 扭轉向之葉片尖端扭曲角



圖三. 扭轉向之葉片尖端扭曲角



圖七. 擺振頻率 ω_v (0.7~1.5) 擺振模態特徵值