

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

表面裂紋承受移動負載之暫態效應解析與計算 Analysis and Calculation of transient response of a surface crack subjected to an anti-plane moving loading

計畫編號：NSC

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：應宜雄 淡江大學航空太空工程學系

計畫參與人員：林瑞庭 淡江大學航空太空工程研究所

一、中文摘要

本研究利用拉普拉斯域之裂紋曳引力與位移基本解以及引用 Cagniard-de Hoop 積分路徑變換法，來分析表面裂紋受反平面移動動力點載荷之動力破壞問題，透過拉普拉斯轉換域中基本解的疊加與映射法的分析，獲得時域中之應力強度因子的完整顯式解，並實際以數值計算討論其暫態效應。

關鍵詞：表面裂紋、動力破壞、應力強度因子、移動載荷

Abstract

In this study, the transient response of a surface crack in an elastic solid subjected to a dynamic anti-plane moving concentrated loading is investigated. This problem is solved by superposition of proposed fundamental solutions in the Laplace transform domain and by using the image method. The exact transient closed form solutions of dynamic stress intensity factor are obtained. Numerical results are evaluated and are discussed in detail.

Keywords: a surface crack, dynamic fracture, stress intensity factor, a moving loading

二、緣由與目的

表面裂紋受一反平面移動點載荷之動力效應，對許多結構體受動態移動負載的情形，皆可利用此問題作一適當模擬，故對此問題的瞭解可幫助工程師在設計時對移動負載的動力效應有進一步的認識。

Thau and Lu (1971)研究有限長裂紋受任意平面體積變化波(dilatational wave)的暫態反應，但其結果僅適用於縱波來回兩裂紋尖端一次的時間。Sih and Embley (1972)對有限長裂紋受動力平面負載時的近場解做了探討，他們將混合邊界的問題簡化成標準的Fredholm積分方程，且利用 Cagniard de-Hoop (de-Hoop 1958)逆轉換法配合數值逆轉換法來求得時域中的解，但並未能得到完整的解析解。

直到 Tsai and Ma(1992)與 Ma and Chen(1993)提出了拉普拉斯域(Laplace transform domain)疊加的觀念，才得以解析了無窮域中含半無窮長裂紋受動力體力(body force)的平面(in-plane)與反平面(anti-plane)問題，並展示了應用拉普拉斯域疊加方法能同時處理擁有多個特徵長度問題的優越性。

因此，在 Ing and Ma(1996)成功獲得表面裂紋受反平面動力負載之暫態效應後，本研究進一步利用其所提之應力與位移基本解來分析垂直表面裂紋受一反平面移動動力點載荷之動力破壞問題。

三、反平面裂紋基本解

等向均質線彈性體的二維反平面波動方程式於靜止(x,y)座標中可寫成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中w為z方向的位移，b為剪力波(shear wave)的慢度(slowness)，且

$$b = \frac{1}{c_s} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

c_s 是剪力波波速 (shear wave speed), μ 和 ρ 分別為材料的剪力係數 (shear modulus) 與密度 (density)。其應力位移關係式為

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2)$$

其函數間相對之拉氏轉換關係如下

$$\bar{f}(x, y, s) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (3)$$

$$\bar{f}^*(\lambda, y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x, y, s) e^{-s\lambda x} dx. \quad (4)$$

(一) 裂紋曳引力基本解

考慮一無窮域中之半無窮長靜止裂紋, 其裂紋面受一指數分佈的對稱曳引力, 邊界條件可描述如下

$$\bar{\tau}_{yz}(x, 0, s) = e^{s\eta x} \quad \text{for } -\infty < x < 0, \quad (5)$$

$$\bar{w}(x, 0, s) = 0 \quad \text{for } 0 < x < \infty. \quad (6)$$

其中 s 為拉普拉斯轉換域參數, 而 η 為一常數。為解(1)、(5)與(6)式之混合型邊界值問題 (mixed boundary value problem), 可使用標準的積分轉換法, 利用(2)-(4)式配合運用 Wiener-Hopf 技巧, 在 $\text{Re}(\eta) > \text{Re}(\lambda)$ 的限制下可解得拉普拉斯域中的應力與位移場 ($y \geq 0$) 如下

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha_+(\lambda) e^{-s(|y|-\lambda x)}}{\alpha_+(\eta)(\eta-\lambda)} d\lambda, \quad (7)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-\text{sign}(y)\lambda e^{-s(|y|-\lambda x)}}{\alpha_-(\lambda)(\eta-\lambda)\alpha_+(\eta)} d\lambda, \quad (8)$$

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-\text{sign}(y) e^{-s(|y|-\lambda x)}}{\mu s \alpha_-(\lambda)(\eta-\lambda)\alpha_+(\eta)} d\lambda. \quad (9)$$

且 Mode III 的應力集中因子為

$$\bar{K}_{III}(s) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi x} \bar{\tau}_{yz}(x, 0, s) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s\alpha_+(\eta)}}, \quad (10)$$

其中

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y > 0^+, \\ -1 & \text{if } y < 0^-, \end{cases}$$

$$\alpha_+(\lambda) = \sqrt{b+\lambda}; \quad \alpha_-(\lambda) = \sqrt{b-\lambda}.$$

(二) 裂紋位移基本解

其邊界條件如下

$$\bar{\tau}_{yz}(x, 0, s) = 0 \quad \text{for } -\infty < x < 0, \quad (11)$$

$$\bar{w}(x, 0, s) = e^{s\eta x} \quad \text{for } 0 < x < \infty. \quad (12)$$

依照前述之推導可得拉普拉斯域之全場解與應力強度因子如下

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mu s \alpha_-(\eta) \alpha_+(\lambda)}{\eta - \lambda} \times e^{-s(|y|-\lambda x)} d\lambda, \quad (13)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-\text{sign}(y)\mu s \lambda \alpha_-(\eta)}{\alpha_-(\lambda)(\eta-\lambda)} \times e^{-s(|y|-\lambda x)} d\lambda, \quad (14)$$

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-\text{sign}(y)\alpha_-(\eta)}{\alpha_-(\lambda)(\eta-\lambda)} \times e^{-s(|y|-\lambda x)} d\lambda, \quad (15)$$

$$\bar{K}_{III}(s) = -\mu\sqrt{2s}\alpha_-(\eta). \quad (16)$$

四、應力強度因子

考慮一與自由邊界垂直之表面裂紋, 如圖 1 所示, 其邊界條件於 (x', y') 座標中可描述如下

$$\tau_{y'z'}(x', 0, t) = p\delta(x'-h-vt)H(t) \\ = pd\delta(t-d(x'-h))H(t), \quad (17)$$

其中

$$d = \frac{1}{v}.$$

此問題之入射波可求得如下:

$$\bar{\tau}_{y'z'}(x', y', s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{pd}{(\lambda+d)} e^{s\alpha y' + s\lambda(x'-h)} d\lambda, \quad (18)$$

$$\bar{\tau}_{x'z'}(x', y', s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{pd\lambda}{(\lambda+d)\alpha} e^{s\alpha y' + s\lambda(x'-h)} d\lambda. \quad (19)$$

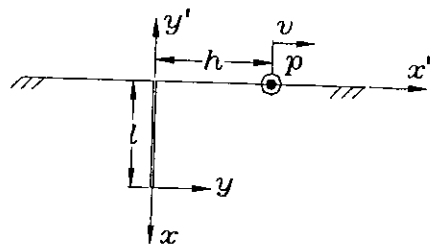


圖 1 表面裂紋受反平面移動動力點載荷之幾何關係圖

(一) 入射波對裂紋尖端之應力強度因子

由圖 2 之暫態波前圖可知因裂紋面與自由邊界垂直，因此只有繞射波遇到自由邊界後會產生反射波而回到裂紋尖端。

為滿足裂紋面無曳引力，此處先以裂紋曳引力基本解疊加，找出入射波對裂紋尖端應力強度因子的影響，之後再利用裂紋位移基本解疊加，以求得無窮多個由自由邊界反射的波對表面裂紋尖端的應力強度因子之所有影響。

將(18)，(19)式轉至 (x, y) 座標系可得

$$\bar{v}_{yz}^i(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{pd}{\alpha(\lambda) + d} e^{-s\alpha(\lambda)y - h|+s\lambda(x+l)} d\lambda. \quad (20)$$

利用裂紋曳引力基本解(10)式反加(20)式在 $y=0$ 處之曳引力，可得到入射波對裂紋尖端所造成之應力強度因子為

$$\bar{K}^{d_1}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\sqrt{2}pd}{\sqrt{s\alpha_+(\eta_1)(\alpha_1 + d)}} e^{-s\alpha_1 h + s\eta_1 l} d\eta_1. \quad (21)$$

利用 Cagniard-de Hoop method 對(21)式進行拉普拉斯逆轉換，可求得時間域中的應力強度因子如下

$$K^{d_1}(t) = \frac{\sqrt{2}pd}{\pi^{3/2}} \int_{b r_1}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \times \text{Im} \left[\frac{1}{\alpha_+(\eta_1^+) (\alpha_1^+ + d)} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial \tau} \right]_{t=\tau} d\tau, \quad (22)$$

其中

$$\eta_1^\pm = -\frac{t \cos \theta_1}{r_1} \pm i \frac{\sin \theta_1}{r_1} (t^2 - b^2 r_1^2)^{1/2},$$

$$r_1 = (l^2 + h^2)^{1/2}, \quad \theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{l}{r_1} \right).$$

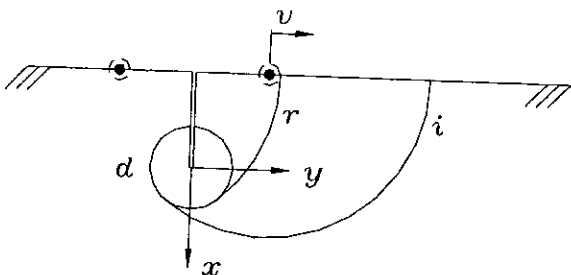


圖 2 暫態波前圖

(二) 繞射波遇自由邊界的再反射

利用(9)式與(20)式反加可得繞射波在一次拉普拉斯域的表示式為

$$\bar{w}^d(x, y, s) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_n} \int_{\Gamma_{n_2}} \frac{pde^{-s(\alpha_1 h - \eta_1 l)} e^{-s(\alpha_2 y - \eta_2 x)}}{(\alpha_1 + d)\mu s \alpha_+(\eta_1)(\eta_1 - \eta_2)\alpha_-(\eta_2)} d\eta_2 d\eta_1. \quad (23)$$

利用映射法(Image method)求得反射波為

$$\bar{w}^{dr}(x, y, s) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_n} \int_{\Gamma_{n_2}} \frac{pde^{-s(\alpha_1 h - \eta_1 l)} e^{-s\alpha_2 y + s\eta_2(x+2l)}}{(\alpha_1 + d)\mu s \alpha_+(\eta_1)(\eta_1 + \eta_2)\alpha_-(\eta_2)} d\eta_2 d\eta_1. \quad (24)$$

為滿足在 $x > 0, y = 0$ 裂紋前端沿長線上之 z 方向位移為零的邊界條件，必須抵銷(24)式的位移，利用裂紋位移基本解(16)式與(24)式疊加可得

$$\bar{K}^{d_2} = \bar{K}^{drd}(s) = \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_n} \int_{\Gamma_{n_2}} \frac{\sqrt{2}pdG(\eta_1, \eta_2)}{\sqrt{s(\alpha_1 + d)\alpha_+(\eta_1)} \times e^{-s(\alpha_1 h - \eta_1 l)} e^{2s\eta_2 l}} d\eta_2 d\eta_1, \quad (25)$$

其中

$$G(\eta_1, \eta_2) = \frac{\alpha_-(\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)\alpha_-(\eta_2)}$$

逆轉換可得到應力強度因子 K^{d_2} 的時域解為

$$K^{d_2}(t) = \frac{-\sqrt{2}pd}{2\pi^{5/2}} \int_{b r_1 + 2bl}^t \int_{b r_1}^{\tau - 2bl} \times \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \text{Re} \left[\frac{G(\eta_1^+, \eta_2^+)}{(\alpha_1^+ + d)\alpha_+(\eta_1^+)} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial t_2} - \frac{G(\eta_1^-, \eta_2^-)}{(\alpha_1^- + d)\alpha_+(\eta_1^-)} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^-}{\partial t_2} \right] dt_1 dt_2, \quad (26)$$

其中

$$\eta_1^\pm = \frac{-t_1 \cos \theta_1}{r_1} \pm i \frac{\sin \theta_1}{r_1} (t_1^2 - b^2 r_1^2)^{1/2},$$

$$\eta_2^\pm = \frac{-t_2}{2l} \pm i\epsilon,$$

$$r_1 = (l^2 + h^2)^{1/2}, \quad \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{l}{r_1}\right),$$

$$t_1 + t_2 = t.$$

利用以上相同的方法，可推導出所有由繞射波所造成的一系列反射波對裂紋尖端應力強度因子的影響。其所有解可整理如下：

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{d_n}(t), \quad (27)$$

其中

$$K^{d_n}(t) = \frac{\sqrt{2pd}(i)^n}{2\sqrt{\pi}\pi^n(i)^n} \int_{b_{n-1}+2(n-1)bl}^t \int_{b_{n-1}}^{a_1} \int_{2bl}^{a_2} \cdots \int_{2bl}^{a_{n-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} Op[FUN]_{t=\tau} dt_{n-1} dt_{n-2} \cdots dt_1 d\tau,$$

for $n = 2, 3, 4, \dots$,

$$a_1 = \tau - 2(n-1)bl,$$

$$a_v = \tau - t_1 - t_2 - \cdots - t_{v-1} - 2(n-v)bl,$$

$$v = 2, 3, 4, \dots, n-1$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1} = t,$$

$$FUN = \frac{G(\eta_1^+, \eta_2^+) G(\eta_2^+, \eta_3^+) \cdots G(\eta_{n-1}^+, \eta_n^+)}{(\alpha_1^+ + d)\alpha_+(\eta_1^+)}$$

$$\times \frac{\partial \eta_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial \eta_n^+}{\partial t_n}$$

$$- \frac{G(\eta_1^-, \eta_2^+) G(\eta_2^+, \eta_3^+) \cdots G(\eta_{n-1}^+, \eta_n^+)}{(\alpha_1^- + d)\alpha_-(\eta_1^-)}$$

$$\times \frac{\partial \eta_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial \eta_n^+}{\partial t_n},$$

$$Op = \text{Re}, \quad q = 0, \quad \text{when } n = 2, 4, 6, \dots,$$

$$Op = \text{Im}, \quad q = 1, \quad \text{when } n = 3, 5, 7, \dots,$$

$$\eta_i^\pm = \frac{-t_1 \cos \theta_1}{r_1} \pm i \frac{\sin \theta_1}{r_1} (t_1^2 - b^2 r_1^2)^{1/2},$$

$$\eta_n^\pm = \frac{-t_n}{2l} \pm i\varepsilon, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

$$r_1 = (l^2 + h^2)^{1/2}, \quad \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{l}{r_1}\right).$$

在不同載荷移動速度下的數值計算結果如圖 3 所示，由圖可知，當載荷移動速度越快，動力超越會越小，且隨著載荷移動速度的增加，應力強度因子在一次繞射波到達後，其衰退的現象也逐漸增加，載荷移動速度越快，四次繞射波通過後，應力強度因子也將漸趨於零。

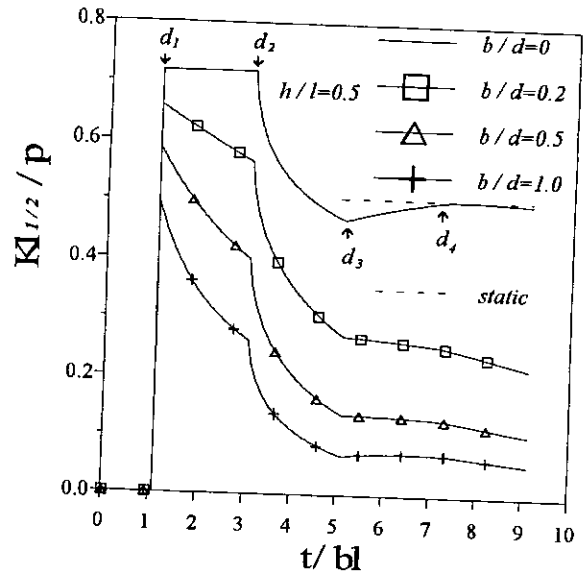


圖 3 不同載荷移動速度下之應力強度因子

五、計畫成果自評

本研究結果已完全達成原計畫之預期成果，並適合進一步發表在相關之學術期刊，具備一定之學術價值。

六、參考文獻

- [1] de Hoop, A. T. (1958). Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory. Doctoral dissertation, Technische hoeghschool, Delft.
- [2] Ing, Y. S. and Ma, C. C. (1996), "Transient response of a finite crack subjected to dynamic antiplane loading", *International Journal of Fracture* 82, 345-362.
- [3] Ma, C. C. and Chen, S. K. (1993), "Exact transient analysis of an anti-plane semi-infinite crack subjected to dynamic body force", *Wave Motion* 17, 1-11.
- [4] Sih, G. C. (1965), "Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problem", *Journal of applied Mechanics* 32, 51-58.
- [5] Sih, G. C. and Embley, G. T. (1972), "Impact response of a finite crack in plane extension," *International Journal of Solids and Structures* 8, 977-993.
- [6] Thau, S. A. and Lu, T. H. (1971), "Transient stress intensity factor for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave", *International Journal of Solids and Structures* 7, 731-750.
- [7] Tasi, C. H. and Ma, C. C. (1992), "Transient analysis of a semi-infinite crack subjected to dynamic concentrated forces", *Journal of applied Mechanics* 59, 804-811.
- [8] 林瑞庭 (2000), "表面裂紋承受反平面移動動力載荷之暫態全場解析與計算", 淡江大學航空太空工程學系碩士班碩士論文。