

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

異向性材料層域之反平面暫態解析

Transient analysis of multi-layered anisotropic media subjected to antiplane loading

計畫編號：NSC 89-2212-E302-009

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

主持人：應宜雄 博士

計畫參與人員：陳志忠 莊淙斌

一、中文摘要

本計畫擬探討由異向性材料所構成的複合層域介質承受反平面動力載荷之暫態問題。本計畫擬運用座標轉換技巧將反平面異向性問題轉換成相對之等向性問題，並利用特殊之邊界轉換技巧來處理邊界接合問題，再運用積分轉換法與矩陣展開法解此層狀介質問題，將轉換域中的解表示成矩陣形式，最後利用 Cagniard-de Hoop method 做逆轉換而得到時域解。數值計算部份則將以薄膜問題為例探討在不同材料常數與觀察點之暫態波傳響應。

關鍵詞：多層介質、波傳異向性、暫態、反平面

Abstract

In this study, the transient response of an anisotropic multi-layered medium subjected to arbitrarily distributed antiplane loadings is investigated. In order to solve the complicated problem, a linear coordinate transformation is introduced and successfully used to transform the anisotropic layered medium problem to the isotropic case. The geometric configuration in the isotropic case is similar to that in an anisotropic material. The relationship between field quantities of the anisotropic problem and the corresponding isotropic problem are established for Cartesian coordinate system. The exact transient solutions for shear stresses are obtained by using the integral transform method. The solutions in transform domain are constructed in a form of power series of the phase-related reflection and transmission matrices. Each term in the series represents a reflected or transmitted

wave. The transient response is then obtained by means of Cagniard-de Hoop method. The corresponding static solution is also derived by application of the final value theorem. For numerical calculations, a thin-film half-space is selected to be an example and the results are discussed in detail.

Keywords: multi-layered medium, wave propagation anisotropic, transient, antiplane

二、緣由與目的

本計畫擬探討由異向性(anisotropic)材料所構成的複合層域(multi-layered)承受反平面動力載荷之暫態問題。

為避免直接解多層介質的邊界值問題，Spencer[1]提出了廣義射線路徑(generalized ray path)來處理邊界反射與透射的問題。Cagniard[2]將 Laplace 轉換域中的解，利用變數變換將積分路徑改變得到形式上與正向 Laplace 轉換公式一樣的積分，而直接得到時域中的解。de Hoop[3]進一步將 Cagniard's method 簡化，使其在解析上更為簡潔方便。楊清利[4]與 Ma, Liu and Lee[5]利用了矩陣 Bromwich 展開法，將暫態解以級數形式表示來解決等向性層狀介質問題。Ma and Lee[6-7]同樣地利用了矩陣 Bromwich 展開法，將暫態解以級數形式表示來解決等向性層狀介質之平面問題。對於異向性問題，Lin and Ma[8]對多層介質作座標轉換時，加入了一修正項，使得由異向性幾何結構轉換至等向性時不會發生不連續脫層或重疊的現象，使得可以直接解相對應的等向性問題，本計畫亦將利用此一方法進行分析。

三、結果與討論

考慮一多層介質為 n 層異向性均質材料以平行面完美接合而組成，其幾何結構與座標示意圖如圖(一)所示。所有關於第 i 層的量均冠以上標或下標 (i) 來表示。對每一層之控制方程式可表示成

$$C_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} + 2C_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x \partial y} + C_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial y^2} = \rho^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1)$$

其中 $w^{(i)}$ 為第 (i) 層在 z 方向的位移， $C_{44}^{(i)}$ 、 $C_{45}^{(i)}$ 與 $C_{55}^{(i)}$ 為第 (i) 層的材料常數， $\rho^{(i)}$ 為第 (i) 層的材料密度。而相關的應力分量與位移的關係為

$$\tau_{yz}^{(i)} = C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + C_{44}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2)$$

$$\tau_{xz}^{(i)} = C_{55}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3)$$

此多層介質之上下表面限制為曳引力型邊界條件，其為

上表面：

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0,t) = \tau_{yz}^{[1]}(x,t), \quad \text{for } -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

下表面：

$$\tau_{yz}^{(n)}(x,-h_n,t) = \tau_{yz}^{[n]}(x,t), \quad \text{for } -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

其中 $h_n = \sum_{i=1}^n h^{(i)}$ ， $h^{(i)}$ 為第 (i) 層的厚度， $\tau^{[i]}$ 為加載曳引力。

若加載位移或曳引力介於兩層介質的界面，則第 (i) 層與第 $(i+1)$ 層界面之不連續條件為

$$w^{(i)}(x,-h_i,t) - w^{(i+1)}(x,-h_i,t) = w^{[i]}(x,t), \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad (6)$$

$$\tau_{yz}^{(i)}(x,-h_i,t) - \tau_{yz}^{(i+1)}(x,-h_i,t) = \tau_{yz}^{[i]}(x,t), \quad i=1,2,\dots,n-1. \quad (7)$$

其中 $w^{[i]}$ 為加載位移。

為了將原來的異向性問題轉換成等向性問題，在此運用 Lin and Ma[8]所作之修正轉換關係如下

$$X = x + \alpha^{(i)} y + \sum_{k=1}^{i-1} h_k (\alpha^{(k)} - \alpha^{(k+1)}), \quad (8)$$

$$Y = \beta^{(i)} y + \sum_{k=1}^{i-1} h_k (\beta^{(k)} - \beta^{(k+1)}), \quad (9)$$

其中

$$\alpha^{(i)} = -\frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}},$$

$$\beta^{(i)} = \frac{C_e^{(i)}}{C_{44}^{(i)}},$$

$$C_e^{(i)} = \sqrt{C_{44}^{(i)} C_{55}^{(i)} - C_{45}^{(i)^2}},$$

透過(8)、(9)式的轉換後，原來圖(一)的幾何形態轉換成圖(二)的幾何形態。

為簡化起見，接下來將探討一層板覆蓋在半無窮域上且受動力點載荷的暫態問題，即所謂的薄層問題。在時間 $t=0$ 時，加載一個大小為 τ_0 的反平面動力點載荷在 $(x,y)=(0,-h_p)$ 的第一層薄層內，上層板厚為 h ，如圖(三)所示。而時間有關的加載為單位步階函數 $H(t)$ ，經由座標轉換後，反平面集中力之位置在 $(X,Y)=(H',-H_p)$ ，上層板厚則變為 H ，如圖(四)所示。

經整理後可將矩陣內之元素簡化為一級數型態，最後可以得到位移與應力在轉換域中的解，其表示式如下

$$\bar{w}^{*(1)}(Y;\lambda,s) = \frac{\tau_0}{2sC_e^{(1)}\gamma_T^{(1)}} \left[e^{-\gamma_T^{(1)}|Y+H_p|-s\lambda H'} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[r_{V0}^{j+1} r_{V2}^j e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j1}-s\lambda H'} + r_{V0}^j r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j2}-s\lambda H'} + r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j3}-s\lambda H'} + r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j4}-s\lambda H'} \right] \right]. \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{yz}^{*(1)}(Y;\lambda,s) = \frac{\tau_0}{2s} \left[(\pm) e^{-\gamma_T^{(1)}|Y+H_p|-s\lambda H'} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[r_{V0}^{j+1} r_{V2}^j e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j1}-s\lambda H'} - r_{V0}^j r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j2}-s\lambda H'} - r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j3}-s\lambda H'} + r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j4}-s\lambda H'} \right] \right]. \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^{*(1)}(Y;\lambda,s) = \frac{\lambda\tau_0}{2\gamma_T^{(1)}} \left[e^{-\gamma_T^{(1)}|Y+H_p|-s\lambda H'} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[r_{V0}^{j+1} r_{V2}^j e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j1}-s\lambda H'} + r_{V0}^j r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j2}-s\lambda H'} + r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j3}-s\lambda H'} + r_{V0}^{j+1} r_{V2}^{j+1} e^{-\gamma_T^{(1)}Y_{j4}-s\lambda H'} \right] \right]. \quad (12)$$

將(10)、(11)及(12)式化為 Cagniard-de

Hoop method 的標準形式，藉由 Cagniard-de Hoop method 進行積分路徑變換作逆轉換，可得到在上層材料的 $\tau_{yz}^{(1)}$ 、 $\tau_{xz}^{(1)}$ 暫態解為

$$\tau_{yz}^{(1)}(X, Y, t) = \frac{\tau_0}{2\pi} \left[\begin{aligned} & (\pm) \text{Im} \left[\frac{\partial \lambda_0^+}{\partial t} \right] H(t-t_0) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^j \frac{\partial \lambda_{j1}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j1}) \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^j r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\partial \lambda_{j2}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j2}) \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\partial \lambda_{j3}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j3}) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\partial \lambda_{j4}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j4}) \end{aligned} \right] \quad (13)$$

$$\tau_{xz}^{(1)}(X, Y, t) = \frac{\tau_0}{2\pi} \left[\begin{aligned} & \text{Im} \left[\frac{\lambda_0^+}{\alpha_{(1)}} \frac{\partial \lambda_0^+}{\partial t} \right] H(t-t_0) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^j \frac{\lambda_{j1}^+}{\alpha_{(1)}} \frac{\partial \lambda_{j1}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j1}) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^j r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\lambda_{j2}^+}{\alpha_{(1)}} \frac{\partial \lambda_{j2}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j2}) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\lambda_{j3}^+}{\alpha_{(1)}} \frac{\partial \lambda_{j3}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j3}) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \text{Im} \left[r_{\sqrt{0}}^{j+1} r_{\sqrt{2}}^{j+1} \frac{\lambda_{j4}^+}{\alpha_{(1)}} \frac{\partial \lambda_{j4}^+}{\partial t} \right] H(t-t_{j4}) \end{aligned} \right] \quad (14)$$

其中 $\lambda_0, \lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3}, \lambda_{j4}$ 為波前方程式，其中 $t_0, t_{j1}, t_{j2}, t_{j3}$ 和 t_{j4} 為這些波到達觀察點的起始時間。

當相對應等向性問題之下層材料的波速大於上層材料時，上層材料的 $\tau_{yz}^{(1)}$ 、 $\tau_{xz}^{(1)}$ 的暫態解除了有(13)、(14)式的解，還需加上頭前波所貢獻的值。

其異向性問題在上層材料的 $\tau_{yz}^{(1)}$ 、 $\tau_{xz}^{(1)}$ 暫態解為

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(x, y) &= \tau_{yz}^{(1)}(X, Y) \\ \tau_{xz}^{(1)}(x, y) &= \beta^{(1)} \tau_{xz}^{(1)}(X, Y) - \alpha^{(1)} \tau_{yz}^{(1)}(X, Y) \end{aligned} \quad (15)$$

接著看一些數值計算的結果，考慮一上層板厚為 h 之異向性薄層問題，在上層中央受一單位步階函數之動力點載荷加載，即波源座標為 $(x_0, y_0) = (0, -0.5h)$ ，其加載之曳引力大小為 1 單位。本計畫數值計算所用之靜力解乃採用自 Lin and Ma[8]，其結果與本文所推導之靜力解相同。

圖(五)、(六)為觀察點距離負載為板厚的 200 倍時之遠場暫態應力解，其下層材料的波速小於上層材料的波速。由於觀察點距離負載點較遠，當入射波到達觀察點之後，在很短的時間內有很多個反射波也抵達觀察點，其應力值會發生震盪。所以由圖(五)、(六)中可以得知，當時間 $t/b^{(1)}h=200$ 時，其應力值開始震盪，當前面多個反射波通過之後，其應力值即會平順地趨向靜力值。當時間 $t/b^{(1)}h$ 在 203 至 250 這段時間內，其應力值非常的小，會讓人誤以為已經趨向於靜力值了，但是事實上，當時間 $t/b^{(1)}h$ 約等於 250 時，其應力值又開始變大，最後才又慢慢地趨向於靜力值，此特殊現象於 Ma, Liu and Lee[5] 亦有討論。

四、計畫成果自評

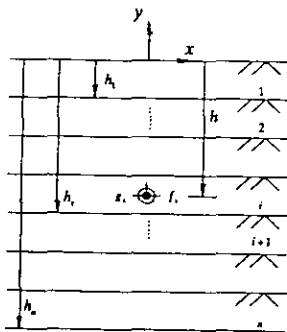
本計畫利用座標轉換技巧將反平面異向性問題轉換成相對之等向性問題，並利用 Lin and Ma[8] 所提出之邊界轉換技巧來處理邊界接合問題，再運用積分轉換的技巧並透過矩陣展開法及 Cagniard-de Hoop 逆積分轉換法成功地解決異向性層狀介質中的反平面暫態波傳問題，並以一薄層覆於半無窮域固體，表面中央受一點集中力的異向性問題為數值計算例，對數值結果作了詳盡的討論。本計畫所推導的理論解析解適用於異向性材料，使得多層介質應力波傳之應用不在侷限於等向性或正交性之材料。

五、參考文獻

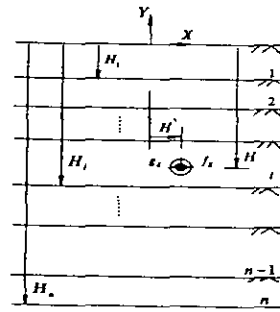
- [1] Spencer, T. W., "The Method of Generalized Reflection and

Transmission Coefficients," *Geophysics*, Vol. 25, pp.625-641, 1960.

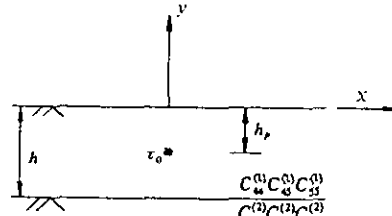
- [2] Cagniard, L., *Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives*, Cauthuers-Villars, Paris, 1939; Translated into English and revised by Flinn, E. A., and Dix, C. H., *Reflection and refraction of Progressive Seismic Waves*, McGraw Hill, New York, 1962.
- [3] de Hoop, A. T., "A Modification of Cagniard's Method for Solving Seismic Pulse Problems," *Appl. Sci. Res.*, Vol. B8, pp.349, 1960.
- [4] 楊清利, 薄層材料系統剪力波之暫態及穩態波傳解析, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 民國八十八年。
- [5] Ma, C. C., Liu, S. W., and Lee, G. S., "Dynamic Response of a Layered Medium Subjected to Antiplane Loadings," accepted by *Int. J. Solids and Structures*, 2001.
- [6] Ma, C. C., and Lee, G. S., "Transient Elastic Waves Propagating in a Multi-Layered Medium Subjected to In-Plane Dynamic Loadings. I. Theory," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 456, pp.1355-1374, 2000.
- [7] Ma, C. C., and Lee, G. S., "Transient Elastic Waves Propagating in a Multi-Layered Medium Subjected to In-Plane Dynamic Loadings. II. Numerical Calculation and Experimental Measurement," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 456, pp.1375-1396, 2000.
- [8] Lin, R. L., and Ma, C. C., "Antiplane Deformations for Anisotropic Multilayered Media by Using the Coordinate Transform Method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, pp.597-605, 2000.



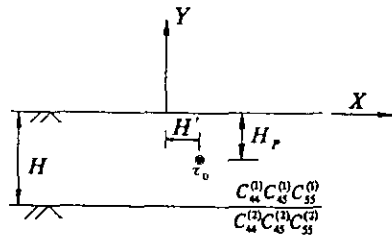
圖(一) n 層異向性複合層域結構示意圖



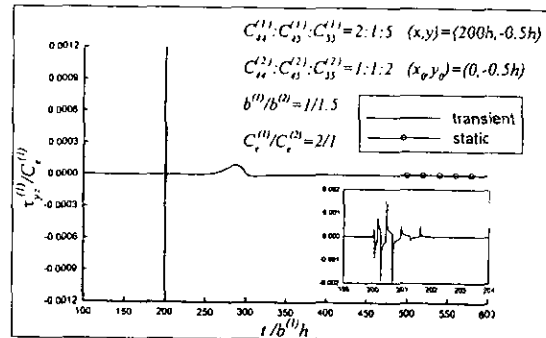
圖(二) 經座標轉換後的 n 層相對應之等向性複合層域問題



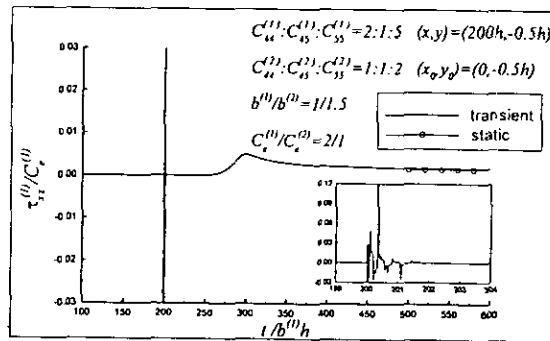
圖(三) 薄膜受動力點載荷之幾何座標示意圖



圖(四) 經座標轉換後之幾何座標示意圖



圖(五) 慢速下層材料之遠場暫態解 τ_{yz}



圖(六) 慢速下層材料之遠場暫態解 τ_{xz}