



# 使用多層網格法建立非結構性網格點之視流系統

計畫編號: NSC 89-2612-E-035-005

執行期限: 88年8月1日至89年7月31日

主持人: 湯敬民 淡江大學航空太空工程學系

計畫參與人員: 廖崇堯, 陳仕崙 淡江大學航空太空工程學系

## 摘要

由於計算流體力學及電腦的快速發展, 研究中經常需要處理大量的三維流場數據。一般的數值資料, 如溫度、濃度、壓力等, 多使用曲線圖或曲面圖來表示。而二維甚至三維之簡單流場均可用箭頭或流線來表示流場之流動方向。但是對一複雜之三維流場, 這些表示法將因無法顯示深度或遠近而失去作用。本研究利用流線之構建以繪製流帶, 配合流場之旋性所造成的自轉, 並藉助模擬之獨立光源以表現流場結構。

在流線的構建上則利用粒子追蹤的方法, 在流場範圍內將流場分割為數個較小的區域, 以減少粒子在追蹤時計算的次數與時間, 並採用多層網格法 (Multi-Layer Staggered Grids) 以解決粒子位於網格邊界時之格點判斷問題。

研究之結果顯示, 非結構性網格之粒子追蹤過程雖較結構性網格之追蹤過程複雜、且耗時。然而在任易外型流場的數據中, 非結構網格之粒子追蹤則可以處理穩定與非穩定之流場, 並且得以完全的契合其流場外型。

關鍵詞: 非結構網格 (四面體網格)、多層結構法、粒子追蹤。

## VISUALIZATION OF A 3-D FLOWFIELD TRACKING WITH MULTI-LAYER STAGGERED GRIDS

Jing-Min Tang and Ching-Ching Yeh  
Department of Aerospace Engineering  
Tamkang University

### ABSTRACT

To interpret the highly complicated 3-D vector field, a computer program used for the visualization of 3-D vector fields was developed. In the study of flow fields, streamlines are often used to depict 2-D flows. However, in a 3-D vector field, lack of depth cues hinders the correct interpretation of a 3-D streamline plot. One way to overcome this limitation is to construct a narrow ribbon which is everywhere aligned with the streamline and is rotated about its axis like a rigid body to indicate the local rotationality of the flow. Instead of using a streamribbon whose edges were laid along a pair of streamlines, the streamribbon in this program was constructed by placing a strip of polygons centered along a streamline, and orienting the surface according to the rotation of flow. The rotation of the flow was indicated by the twist and shading of the ribbon to simulate its appearance as though it was illuminated by a light source placed near the observer.

Keywords: Unstructured Grids (Tetrahedral grids), Multi-Layer Staggered Grids, Particle Tracking

### 一、前言

近年來科學與工程分析程式所產生的大量數據對數值觀測分析的能力造成相當大的挑戰, 然而事實上, 沒有任何一種秀圖方法可以一次就將所有計算出的資料完全的表達出來。基本上, 數據的表示方法可以分為兩大類, 一為數值數據 (scalar data), 一為向量數據 (vector data)。數值數據通常使用二維等位線圖和三維曲面圖等來表示, 而一般最常用於圖示向量數據的方法則是流線。流線的定義則是在一穩態流場內, 粒子所流經之路線。

二維向量場中一般常以箭頭來表示速度向量之大小與方向, 但是在一個三維的向量場中, 則無法直接使用向量箭頭來表示, 此因各點所繪之大小方向即使不重疊亦無法表達出與觀測者之遠近、前後與方向關係, 如此使得觀測者無法辨清流場之實際流向。若真要在三維的向量場中使用此法, 則需以切面之形式表示, 每次僅表示數個切面。

一般的圖形表示法如流線、流帶、流面等均是向由向量場中之流場軌跡線積分來的。這些方法中有三個主要的步驟是必須完成的:

(1) 找出  $(x, y, z)$  點在格點中的實際位置, (2) 利用內插得到該點之速度, 與 (3) 積分  $v = dx/dt$  以找出粒子之位移量  $\Delta x$ ; 而每個步驟中均有適當的理論以決定之。

若所欲觀測之流場情況複雜, 則如以流面表示會需要許多條起始線段, 所形成的流面數量增加, 則同時會使畫面變得過於複雜不易分析。以彩帶來表現流線則是專注於流線之流動方向與自旋度, 故在三維向量場之分析上較易判別, 是而選定為本研究之對象。

彩帶流線之構建一般可分為兩種, 一為直接將彩帶貼附於流線上, 另一種是以兩條沿主流線發展的流線所構成, 二流線間以多邊形舖上, 達成彩帶的效果。但前者僅隨流線進行而無自旋的部分, 後者則必須另加條件控制兩流線 (即彩帶之兩邊緣) 不致發散。因此本研究研究綜合兩者之優點, 以單條流線為主軸舖上彩帶, 並根據所經各點之旋性 (vorticity) 調整旋轉之角度。

在整個計算流線軌跡的過程中，網格點的取決是非常重要的。對於穩定流場之數據，或簡單規則外型之流場數據，使用一般性之結構網格點 (Structured Grids) 即可迅速且精確的計算出質點之格點位置、速度內插、及粒子之位移量  $\Delta x$ 。然而對複雜外型，或是非穩定流場之數據而言，使用結構性網格則可能無法完全符合流場之外型，或是無法表現細部複雜之數據改變。對此，四面體 (Tetrahedral) 之非結構網格 (Unstructured Grid) 則可以解決這一方面的問題。然而在四面體網格的使用上，雖然較結構性網格精確，然而相對的卻更加的費時，因此，發展一套精確且節省時間與記憶體之非結構網格則是一項必要的工作與趨勢。

由於一般流場之性質並非均為穩定，或且流場之外形不一定是為規則之多邊形，因此非結構網格之發展是為必然之趨勢。故本研究即以非結構性網格點作為處理數據的方法。

## 二、文獻回顧

屬於流線類之表示法甚多，其中包含流線 (Stream-Lines)，流帶 (Stream-Ribbons)，及流面 (Stream-Surfaces) 等。

### 1. 流線 (Stream-Lines)：

粒子追蹤 (類似於流場觀測中之染料或煙霧注入) 一直是表現向量流場數值之良好方法。它不僅提供了觀測數值流場的方法，也使得實驗與數值間之比較更直接有效。最簡單的作法是將一向量場中之某起始點隨時間積分，求出各點之位置，再將這些點連起來，即為此點之軌跡線。在一穩定流場中所繪之軌跡線亦即為流線。如果流線過於複雜不易追蹤，則可在各瞬時僅繪出點之位置；若在初始時是有一排許多連續密接的起始點，則會造成氣泡般的效果。此與水洞中之氣泡觀測之情形非常相似。

### 2. 流帶 (Stream-Ribbons)：

三維向量場可視化的另一種方法是建構一細長之彩帶，使彩帶貼附在曲線上隨流場延伸。除了幾何狀態上隨流場變化之外，Arrott [1] 將自旋量加入彩帶之變化過程中，使彩帶在高旋轉區呈現螺旋般的自旋效果。

Belie [2] 是以相鄰近於曲線兩側之兩點 (point pair) 做向量場自旋性之描繪。此兩點於起始時即已定出，在曲線延伸發展的過程中不斷計算此兩點所相對應之位置。此兩點所各自形成之曲線的間格則以四邊行平版鋪上，造成彩帶之效果。但若過擴散流場，兩點之間距會被拉開，此時必須另加限制以保證彩帶不致變的過寬。

Volpe [3] 藉由鄰近的數條流線來組合創造一條新的流帶。然而，要得到較平滑的流帶表面往往需要大量的流線，因此其常常會花費過大。

Darmofal 與 Haimes [4]，Ma 與 Smith [5]，及 Pagendam [6] 使用一條流線與流線上的垂直速度向量來形成一條流帶。使用這個方法產生的流線只能表現出流場的位移和旋轉角度 (Angle Rotation)。

這種以彩帶表現流場的最大好處是流場的自旋可以很清楚的由彩帶的旋轉看出，但必須克服或接受這些彩帶即是流場的心理障礙。

### 3. 流面 (Stream-Surfaces)：

正如同流線是一點在一時間片段內所流經之軌跡，流面是由一條段隨流場發展而形成之面，亦可視為彩帶之進一步延伸。初始線可視為流場觀測中所使用的一整排連續之油滴注入口，在流場發展的過程中，此一線段會隨著時間變化而擴張、收縮、及旋轉，如此即會掃出一連續曲面代表流場之變化情形。

在 Hultquist [7] 的研究中，他是利用一排不連續之起始點作為曲面之開始，這些點每次往前進一小段，各點間若開始發散，則機動的加入粒子點，以增加精確度，在收縮時則將點抽取出來以節省計算的時間與步驟。Krueger [8] 曾經完成一流場觀測系統，稱為 VideoDesk，系統中即包含流面之表現法，不同時間之線段間是以多邊形鋪上，以形成連續之曲面。類似的建構法亦曾在 Weston [9] 的研究中討論過。Helman 與 Hesslink [10][11] 及 Eder [12] 亦分別在流面之建構上有深入之研究。

在穩定流場的可視化中，流線結構是最常用也是最基本的技術，Shyh-Kuang [13] 即利用流線之粒子追蹤作為非結構網格之流場生成方法，而對於旋轉或擴張之流場，則採用流帶和流管之表示法。Shyh-Kuang 為了簡化數學公式且降低計算成本，研究中所有的計算工作均在正則座標 (Canonical coordinate) 中進行，而非物理座標 (Physical coordinate)。

在其研究中，粒子追蹤有幾項主要的步驟：

- 在物理座標  $(x, y, z)$  中選擇一粒子追蹤之起始點。

- 找出此點所在之網格。
- 將此點轉換至正則座標系統  $(\xi, \eta, \zeta)$ 。
- 繼續以下之步驟至流線完成
  - ※ 沿粒子之路徑計算下一點之位置。
  - ※ 對於流帶與流管之結構，應注意其增加之計算。
  - ※ 計算並儲存新值之物理座標。
  - ※ 求出新點所在之網格。

對於四面體非結構性網格，如圖一所示，其由物理座標轉換至正則座標之座標轉換方程式可寫成

$$\bar{\xi} = T \cdot \bar{x} + \bar{k}, \quad (2-1)$$

其中  $\bar{x}$  為物理座標向量  $\bar{x} = [x, y, z]^T$ ， $\bar{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]^T$  為  $\bar{x}$  在正則座標中之座標向量， $\bar{k}$  為平移量。經過轉換之後，原本物理座標中四面體網格之四個端點則轉換為正則座標上包含原點與三軸上之線性單位格點。此外，利用線性之座標轉換方程式亦可以將正則座標轉換為物理座標，此反置座標轉換方程式為

$$\bar{x} = (1 - \xi - \eta - \zeta) \cdot \bar{x}_0 + \xi \cdot \bar{x}_1 + \eta \cdot \bar{x}_2 + \zeta \cdot \bar{x}_3 \quad (2-2)$$

如圖二所示。速度場之內插可表示為

$$\bar{u} \cdot (\bar{\xi}) = (1 - \xi - \eta - \zeta) \cdot \bar{u}_0 + \xi \cdot \bar{u}_1 + \eta \cdot \bar{u}_2 + \zeta \cdot \bar{u}_3 \quad (2-3)$$

而流線之計算方法則為解

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\xi}}{dt} &= T \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = T \cdot \bar{u}(\bar{x}) = T \cdot \bar{u} \cdot (\bar{\xi}) \\ &= T \cdot (B \cdot \bar{\xi} + \bar{a}) = C \cdot \bar{\xi} + \bar{e} \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中所有之數值計算方法均使用 4 階之 Runge-Kutta method (RK4)。在 Shyh-Kuang 的研究中，流帶的平面是由該點速度的垂直向量端點與其所在流線上之相對點間的連線而得 (如圖三)。在旋轉的流場中，流帶的旋轉角度和變形量，可由公式計算得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} (\bar{\omega} \cdot \bar{s}) \quad (2-5)$$

式中  $\theta$  為旋轉之角度。

對於非穩定 (un-steady) 的流場而言，粒子追蹤成為一更複雜的工作。相對於在穩定流場中只需使用一組網格格點 (one set of grid) 與結果資料即可完成模擬的情形，非穩定流場中則需要數百或數千筆時間間隔的資料以模擬流場，而每個時間間隔均有其個別相關之格點位置與資料。

對於非穩定之流場和非穩定之粒子追蹤，David N. Kenwright 和 David A. Lane [14] 發展出另一套的四面體 (tetrahedral) 非結構性網格，以曲線的格點加速計算點之位置和速度內插。

其研究中的四面體網格乃是由六面體網格 (hexahedral cells) 如正方體或長方體網格) 切割而得。一個六面體至少可以切成 5 個四面體 (如圖四)，而其切法則由流場的流向和流經位置來決定，可分為兩類。

其四面體網格之粒子追蹤作法是在流場中取一起始點，在一時間間隔後移動至另一點，此點之所走的距離是由速度對時間作積分而得，而其速度則是經由數據或內插而得。其中速度對時間的積分在數值的作法上乃是使用多階段法 (multi-stage method) 如 Runge-Kutta 等，或多步驟法 (multi-step method) 如 backwards differentiation 等。

其四面體格點之粒子追蹤，整個過程可以分成 7 個步驟：

1. 在物理域中取一粒子之起始點  $(x, y, z, t)$ 。
2. 決定包含此點之四面體格點。
3. (在模擬的過程中，利用內插時間間隔) 計算時間  $t$  時之格點速度與位置座標。
4. 內插速度場以計算現在此點  $(x, y, z)$  之速度向量。
5. 積分速度場以求得粒子在時間  $t + \Delta t$  時之新位置。
6. 驗證積分誤差。如果誤差太大則減小時間之間隔，並重複積分之動作。
7. 重複 (2) ~ (6) 之步驟直至追蹤粒子離開流場或時間  $t$  達到最後之模擬時間間隔。

在他們的作法中，由於使用 4 階之 Runge-Kutta 方法，因此步驟 (2) ~ (4) 實際上會重複 3 次以求出時間  $t + \Delta t$  時之粒子位置與速度。

在 David 之四面體網格中，粒子在 natural 座標中的位置  $(\xi, \eta, \zeta)$  可以直接由物理座標計算而得：

$$x(\xi, \eta, \zeta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta$$

(2-6)

如圖五所示，方程式(2-6)對網格中某一特定之物理域點  $(x_p, y_p, z_p)$  所得之解  $\xi, \eta, \zeta$  之值若符合

$$\xi \geq 0; \eta \geq 0; \zeta \geq 0; 1 - \xi - \eta - \zeta \geq 0$$

(2-7)

四個條件，則點  $(\xi, \eta, \zeta)$  與  $(x_p, y_p, z_p)$  在同一晶格內，如圖六所示。由  $(\xi, \eta, \zeta)$  之值可以得知粒子之流動方向，並繼續其計算過程以追蹤粒子。

四面體格點之速度內插包括時間與空間之內插。時間項之內插 Temporal Interpolation 的作法是在相鄰之兩時間間隔內作線性之內插；對一位於  $(i, j, k)$  之格點在時間  $t$  時 (由時間  $t_i$  至  $t_{i+1}$ ) 之速度  $u$  之作法為

$$u_{i,j,k}^t = (1 - \delta)u_{i,j,k}^{t_i} + \delta u_{i,j,k}^{t_{i+1}}$$

其中  $\delta = (t - t_i) / (t_{i+1} - t_i)$

(2-8)

而空間項之速度內插亦使用線性之空間內插：

$$u(\xi, \eta, \zeta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta + (u_4 - u_1)\zeta$$

(2-9)

在 David 之四面體網格中，時間間隔之大小是一個重要的參數。在計算過程中，時間間隔的大小通常是一固定的常數，但在某些流場變化劇烈之區域，需要較小之時間間隔。

在非結構網格的粒子追蹤過程中，確定粒子所在的範圍與網格位置 (particle's true host element or cell) 乃是最重要的一個步驟。Löhner 和 Ambrosio [15] 在文章中提到，決定粒子所在網格的方法有很多，大致來說最常使用的有以下三種：

(1) 卡氏背景座標網格 (A Cartesian background grid)

此方法是將一非規則背景網格區域重疊於一規則結構之背景網格區域上 (如圖七)，並記錄兩組間之關係。給定一新的粒子位置  $(x_p, y_p)$ ，則此點在卡氏網格中的位置可由

$$i_c = \text{Int} \left\{ \left[ \frac{(x_p - x_{\min})}{(x_{\max} - x_{\min})} N_x \right] + 1 \right\}$$

$$j_c = \text{Int} \left\{ \left[ \frac{(y_p - y_{\min})}{(y_{\max} - y_{\min})} N_y \right] + 1 \right\}$$

(2-10)

其中  $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$  為現有網格之最小、最大座標範圍值， $N_x, N_y$  為  $x, y$  方向上之網格數目。

求得，由包含於此區域中的點內求得包含粒子之網格。

然而，如果網格區域過大，則每個區域內的點數會過多，計算時不但耗時，耗記憶體，還會降低計算效率與精確度。因此，只要網格區域大小適當，則是一貫行簡單，易向量化之方法。

(2) 樹狀結構 (Tree Structures)

為解決前一方法中取決區域過大的問題，則有樹狀結構網格的出現。如 quad trees (如圖八) 等。quad trees 法是先以相同大小的正方形填滿整個 Domain (有些正方形將超出 Domain)，再視邊界情況，將超出之正方形修正，亦可視需要而細分某些方形而局部增加密度。

(3) 連續之鄰近網格搜尋 (Successive neighbor searches)

鄰近網格搜尋法則是在粒子所在位置的鄰近網格中，猜測粒子下一位置之包含區域網格。在粒子的相鄰網格區域中，先猜測一可能的新網格，在計算後若與粒子之條件不合，則換下一個鄰近網格，依此類推。這個方法實施起來較為簡單，也較為快速，然而其前提必須是在粒子之相鄰網格不會太多之時。另一方面來說，搜尋的次數則會因粒子的位置不同而亦，而這即會影響限制其向量化 (vectorization)。

本研究則參考 (2) 的方法，將流場分割為幾個部分，而分割區域的範圍則由邊界長度、粒子密度等作為分割區域的大小。並發展出另一套多層網格 (Stagger Grids) 方法，在粒子位流經邊界時，做為跨網格間之粒子追蹤工具。其作法將在下一章詳述。

### 三、粒子追蹤與流場及圖像處理

#### 3.1 粒子追蹤與流場處理

粒子追蹤常用於實驗及數值計算上，主要是觀測無質量粒子在流場中流動所行經之路線。流線的最基本畫法是在穩態流場中由一起始點隨時間逐步作速度積分而得之路徑線。此線即表示一無質量

粒子在此時間區間內之運動路線。如第二章所述，表示此路徑之方法可以為點、線、彩帶，甚至到面，不過所有的這些表示法均由基本的路線積分過程而得，其間包括了三個重要的步驟：(1) 決定路徑上各點所屬之晶格 (grid cell)，(2) 利用內插法求得此點之速度，及 (3) 積分速度以求得粒子之移動量。本研究中亦含彩帶沿軸向之旋轉量，因此尚含第四個步驟，即求取旋性及其沿前進方向之投影量。其中 (1) 和 (2) 之重要性在於：粒子是在一連續空間之流場內移動，但是所計算或量得之速度向量卻僅存於各計算格點上，因此除非恰在各晶格點上，否則均需根據所處晶格之各格點的值以內插來取正確值。

以上這些計算皆是在計算域內進行，各步驟完成後將再轉換至物理域作為實際繪圖之根據。整個系統之工作流程圖示於圖九。

#### 3.1.1 粒子追蹤

在粒子追蹤的過程最重要的工作是確定粒子所在之格點位置。如圖十，在四面體網格中，粒子在 natural 座標中的位置  $(\xi, \eta, \zeta)$  可以直接由物理座標計算得知：

$$x(\xi, \eta, \zeta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta$$

(3-1)

此方程式對網格中某一特定之物理域 P 點  $(x_p, y_p, z_p)$  所得之解為：

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p - x_1 \\ y_p - y_1 \\ z_p - z_1 \end{bmatrix}$$

(3-2)

其中  $a_{11} = (z_4 - z_1)(y_3 - y_4) - (z_3 - z_4)(y_4 - y_1)$ ，

$$a_{21} = (z_4 - z_1)(x_3 - x_4) - (z_3 - z_4)(x_4 - x_1)$$

$$a_{31} = (z_2 - z_3)(y_1 - y_2) - (z_1 - z_2)(y_2 - y_3)$$

$$a_{12} = (x_4 - x_1)(z_3 - z_4) - (x_3 - x_4)(z_4 - z_1)$$

$$a_{22} = (x_4 - x_1)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_4 - z_1)$$

$$a_{32} = (x_2 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_2 - z_3)$$

$$a_{13} = (y_4 - y_1)(x_3 - x_4) - (y_3 - y_4)(x_4 - x_1)$$

$$a_{23} = (y_4 - y_1)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)(x_4 - x_1)$$

$$a_{33} = (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$$

$$V = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_4 - y_1) +$$

$$(x_3 - x_1)(y_1 - y_2)(z_4 - z_1) - (z_1 - z_2)(y_4 - y_1) +$$

$$(x_4 - x_1)(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$

在其求得之解中，我們可由  $\xi, \eta, \zeta$  之值判斷粒子所在之格點位置。

當求得之解符合

$$\xi \geq 0; \eta \geq 0; \zeta \geq 0; 1 - \xi - \eta - \zeta \geq 0$$

(3-3)

四個條件，則點  $(\xi, \eta, \zeta)$  與  $(x_p, y_p, z_p)$  在同一晶格內。反之，若  $\xi < 0$  表示粒子之流動穿過  $\xi = 0$  之平面； $\eta < 0$  表示粒子之流動穿過  $\eta = 0$  之平面； $\zeta < 0$  表示粒子之流動穿過  $\zeta = 0$  之平面； $1 - \xi - \eta - \zeta < 0$  表示粒子之流動穿過對角之平面，若同時不符合的條件不只一個，則表示粒子通過二或三個平面之交角 (如圖六)。

當我們在流場中任意決定一粒子追蹤的起始點 P 時，欲決定包含此點之四面體時，即有許多不同的選擇，為求所得流場處理之精確，因此包含此 P 點最小之四面體是我們程式處理中必須決定的。

對於任一起始 P 點，其包含 P 點之四面體四個端點，乃是在所有數據資料中，距離 P 點最近，且符合 (3-3) 式之四組數據。因此，包含 P 點之四面體四端點之計算取得，即由與 P 點距離最小之四點開始，將其位置之  $X, Y, Z$  方向分量帶入 (3-2) 式，以判斷 P 點是否包含在此四面體之內，若是條件不合，則換掉其中不合之點以新的最小距離點取代之，直至 (3-3) 式成立。然而，每當產生一個新的 P 點，就需重新計算一次各點與 P 點間的距離。由於我們所處理的數據資料筆數往往極大，因此，在決定粒子所存在之網格時，計算的過程與次數則是可以愈少愈好。

本研究研究中採取了幾個簡化計算次數的步驟。

1. 在讀取資料時即先將各筆數據依位置分為幾個較小區域，且分別計算各區域之總筆數。
2. 決定起始點 P 點時，判斷其在流場中的那個小區域內。在做四面體端點計算取法時，則以此小區域為範

圖。

3. 當 P 點位置位於小區域之邊界附近，無法在該小區域中找出包含 P 點之四面體時，則需跨區域找出相鄰區域中符合條件的點。為簡化 P 點在靠近邊界時該選擇那個相鄰區域做選擇計算的問題，我們使用多層網格 (Multi-Layer Staggered Grids) 之結構以簡化邊界上的計算。

所謂的多層網格 (Multi-Layer Staggered Grids)，如圖十一，即是使用兩套相互交錯的網格，其優點是在當 P 點在第一套網格中過上了網格的邊界時，即可將此點之所在區域轉換為在第二套網格的相對區域 (如圖十二)，若在數次計算之後，P 點過上了第二套網格之邊界時，即可將 P 點之所在區域再轉回至第一套網格之相對區域，以此類推。其缺點是必須在一組基本小區域網格外在加上另一組區域大小相同，但位置在三方向均平移一半網格寬度之新加大網格，如此一來，在做數據存取時，即會增加電腦處理時所需的記憶體。雖然如此，在對邊界附近點的處理上，仍有其方便可取的地方。

### 3.1.2 速度值之內插

在四面體網格之速度內插中，使用

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta + (u_4 - u_1)\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= v_1 + (v_2 - v_1)\xi + (v_3 - v_1)\eta + (v_4 - v_1)\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= w_1 + (w_2 - w_1)\xi + (w_3 - w_1)\eta + (w_4 - w_1)\zeta \end{aligned} \quad (3-4)$$

作為 P 點粒子在空間上之速度內插，其中  $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4$  為四面體之四端點速度之速度分量。

### 3.1.3 路徑積分

在四面體網格中，粒子移動路徑之計算可由解下列之偏微分方程式而得

$$\frac{dr}{dt} = v(r(t), t) \quad (3-5)$$

其中， $r$  為粒子的位置， $v$  為粒子在時間  $t$  時之速度。此方程式的解可表示為

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \int_t^{t+\Delta t} v(r(t), t) dt \quad (3-6)$$

### 3.1.4 自旋性之計算

在旋轉的流場中，流帶的自旋角和寬度變形量，可計算得到 (如圖三)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}(\bar{\omega} \cdot \bar{s}) \quad (3-7)$$

$$\text{其中 } \bar{\omega} = \text{curl}(\bar{u}^*), \quad \bar{s} = \frac{\bar{u}^*}{\|\bar{u}^*\|}$$

式中  $\theta$  為旋轉之角度。

## 3.2 圖像之處理

流線彩帶的繪製是由許多的彩色板 (panel) 貼附在流線上而得，每一塊小板的寬度是在程式執行前就已設定好的，長度則是為流線在每一個  $\Delta t$  時間內所行進的距離。以下就各結構性網格與非結構性網格之小板的呈像所必須決定之步驟，按彩色板之變形、光源與陰影、螢幕呈像、以及立體圖 (stereoscope) 之製作依序介紹。

### 3.2.1 彩色板之變形

流線在流動之過程中若無自旋之情形，亦即旋性為零，則各彩色小板只要依序貼上流線即可，但在實際的流場呈像中則罕見如此簡單之流場。流動過程若含有自轉，各彩色小板也必須跟著做旋轉。已生活中常見物舉例則如一長方形金屬片，固定一端而扭曲另一端。因此，呈像時亦要先定出流線線段本次之起點 (亦為前次小板之終點)，即可按所預計之寬度求出兩側之點座標。除了流線起始第一點所製作之小板的方向是任意決定的外，此後之小板方向均依前一片做變化。

前面提過，小板之長度是流線在此次  $\Delta t$  時間內所行進之距離，因此在流線線段之起點決定時終點也隨即決定 (圖十三)。終

點兩側之點 (即前例中金屬片之尾端) 所形成之扭轉量，可按 3.1.4 節結尾部分所提之旋轉量求法求得，並以之決定此二點之座標。有一點值得一提的是，所稱之旋轉量是為沿流線方向所得之值，在真正用於呈像時必須先求出  $\xi, \eta, \zeta$  方向之投影量。綜合而言，本節所做之工作為決定所欲貼附之彩色小板之四端點的座標。座標求取之過程中則包含了旋轉量及其投影之計算，以下就此部分之計算過程作簡單之介紹。

假設流線小板之起點至終點之連線方程式為  $b + \mu d$ ，其中  $b = (b_x, b_y, b_z)$  而  $d = (d_x, d_y, d_z)$ 。則若假設任意向量相對於此軸做  $\phi$  角度之旋轉與 P 矩陣運算，而 P 可表為

$$P = F^{-1} \times G^{-1} \times H^{-1} \times W \times H \times G \times F \quad (3-8)$$

式中 F 矩陣將座標先移至原點，

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_x \\ 0 & 1 & 0 & -b_y \\ 0 & 0 & 1 & -b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩陣 G 之運算會將座標相對於 z 軸作  $\theta = \tan^{-1}(d_y/d_x)$  之旋轉，

$$G = \frac{1}{v} \begin{bmatrix} d_x & d_y & 0 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{v} \begin{bmatrix} d_x & -d_y & 0 & 0 \\ d_y & d_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$$

式中  $v^2 = d_x^2 + d_y^2$ ，經此運算後旋轉軸是在 x-z 平面上。

矩陣 H 之運算是相對於 y 軸作  $\beta = \tan^{-1}(v/d_x)$  之旋轉，

$$H = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} d_x & 0 & -v & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ v & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} d_x & 0 & v & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ -v & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

式中  $w^2 = v^2 + d_x^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_x^2$ 。完成此步驟後，旋轉軸是在 z 軸上，亦即  $H * G * F$  之組合會將任意之旋轉軸移至原點且與 z 軸一致，而所要作的  $\phi$  角度旋轉則已轉換至相對於 z 軸，透過 W 矩

$$\text{陣作旋轉運算，} \quad W = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

這些動作完成後再依反向經  $H^{-1}$ 、 $G^{-1}$  與  $F^{-1}$  之運算將旋轉軸移回原來之方向與位置。

### 3.2.2 光源與陰影

在物理域中之彩色小板的四端點位置決定後即可進入小板上顏色如何決定之步驟。基本上，每一條彩帶均有可設定其特有之顏色，但彩帶之正反兩面則需加以區分。作法是在被觀測區之附近另置一點光源，在照射下彩帶會依其受光之角度及目視之角度而呈現不同亮度之色彩，但是這種反光現象僅存於彩帶之正面 (任意設定之)，背面則無任何反光或色彩被改變之作用，而在實際處理過程中即以一暗色彩帶為起始色，正面部分受光則亮度被加強 (圖十三)。

就理論而言，無論彩帶之顏色為何，其反射係數 (reflective

coefficient) 均與表面性質有關。彩帶本身之顏色即為絕對色彩 (absolute color)，而從表面反射至觀測點所察覺之色彩稱 apparent color。因此，apparent color 與反射角、入射光源與絕對色彩有密切的關係。系統處理時，先計算光源在入射於彩帶表面後，其反射角與觀測點的角度。此處所使用之反射模式是為擴散反射 (Diffuse reflection) 之 Lambert's Cosine Law，運算式為

$$I_{dR} = R * (I_s * (1 - I_a) * \cos \theta) \quad (3-9)$$

其中， $I_s$  是為光源之光強度， $\theta$  為入射角， $I_a$  為入射之背景光強度，以及反射係數  $R$ 。又若入射光之方向  $m$  及小板表面之法線方向  $n$  知道，則  $\cos \theta = m \cdot n / (|m| |n|)$ 。因此，

$$I_{dR} = R * I_s * (1 - I_a) * (m \cdot n) / (|m| |n|) \quad (3-10)$$

如果  $|\theta| > 90^\circ$  則小板之正面是背向光源，此時無反射光，小板是為原來之暗色。若  $|\theta| < 90^\circ$ ，則按反射光強度計算色彩應加強之數值。

事實上，就前面所述，小板類似於一長形金屬薄片，若在  $\Delta t$  時段內有自旋之行為則就如金屬片受到扭力般會有扭曲的現象。但在本系統之處理過程中，為了簡化而假設因變形量不大，其小板之法線方向一致，由起始點兩側與終點兩側未旋轉前之點所構成之平面決定，且板上使用 constant shading 模式，故顯示出之顏色一致。

### 3.2.3 螢幕呈像

物理域中之各點座標及所應表現之色彩均決定後即可在螢幕上繪出，第一步的工作是必須將三維中之座標轉換為螢幕所使用之二維座標，亦即透視。因本系統所使用之觀測點是為任意指定，故不屬於中央透視 (central projection)。座標轉換過程中包含兩個重要關係必須考慮，一為觀測點與被觀測區之相對位置，一為三維中之觀測點與二維螢幕座標之關係。

被觀測區相對於觀測點所作之轉換是將相對於原點之座標轉換為相對於觀測點之座標，即從絕對座標 (absolute coordinate) 轉換為視座標 (eye coordinate system)。所需之轉換包括平移 ( $F$  矩陣)、對  $z$  軸旋轉 ( $G$  矩陣)、及對  $y$  軸之旋轉 ( $H$  矩陣)。設視座標原點在  $(E_x, E_y, E_z)$ ，注視方向是為  $(D_x, D_y, D_z)$ ，則

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E_x \\ 0 & 1 & 0 & -E_y \\ 0 & 0 & 1 & -E_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$$G = \frac{1}{v} \begin{bmatrix} -D_x & -D_y & 0 & 0 \\ D_y & -D_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$$H = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} -D_x & 0 & -v & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ -v & 0 & -D_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$w^2 = v^2 + d_x^2 = d_z^2 + d_y^2 + d_x^2$$

做完  $F * G * H$  之轉換後之值可直接投影至一位於觀測點前二維平面 (即系統中之螢幕)，但在本系統中則是以透視法處理此投影，其轉換方程式是為

$$x_{screen} = -xd/z, \quad y_{screen} = -yd/z \quad (3-14)$$

$d$  為觀測點至投影平面間之距離。

至此已得小板四端點對應於螢幕之各點位置及應有之色彩。原則上只要從小板起點兩端開始沿板線往前，並一路將其間之螢幕圖素 (pixel) 點亮即可。但因各彩帶相距於觀測點之距離遠近不一，必須考慮到較近之彩帶會遮到後方之彩帶的前後關係，本系統使用  $z$  緩衝器 ( $z$ -buffer) 解決此問題。

$z$  緩衝器是一簡單但花費時間的一種遮蔽面 (hidden surface) 的處理方法。它是圖像緩衝器 (frame buffer) 觀念的一種簡單延伸。圖像緩衝器內儲存了整個螢幕上各點的彩色與亮度。 $z$  緩衝器則儲存了從觀測點看過去所有可以看見的點之深度 (亦即距離) 值。作圖像之處理時所有要呈現在螢幕上的點與觀測點之間距都必須與  $z$

緩衝器內同一位置所儲存之值作比較。若較原有值小則表示距離近且可見，此時即將新的點性質 (色彩、強度) 寫入圖像緩衝器內，點亮螢幕上之相對位置並將新的距離值寫入圖像緩衝器內。如距離較原有值大則表示距離較遠，此點會被原有點遮蔽而無法看見，二緩衝器均無任何動作 (圖十四)。

綜合而言，使用  $z$  緩衝器作遮蔽面處理的過程包括下列數點：

1. 圖像緩衝器內所有的顏色均設為背景色。
2. 設定  $z$  緩衝器內各位置的距離值為一極遠之參考深度。
3. 所有欲繪之點均作距離之計算。
4. 將計算所得與  $z$  緩衝器儲存值作比較。
5. 若新計算值較小，則將新資料，包括色彩、強度、及距離，分別寫入圖像與  $z$  緩衝器內。

如此已完成所有之工作，只要重複流線之前進步驟至流線離開觀測區或過停滯點為止，就可繪出流線彩帶之變化情形。

## 四、結果與討論

在三維流場的可視化過程中，粒子追蹤是一個十分重要的步驟，根據流場不同的特性可以採用不同的粒子追蹤方法。假若流場內是一穩定的流體，且其邊界外型是為立方體或長方體，則可以採用結構性網格 (六面體) 作為粒子追蹤的方法；相反的，若是流場為不穩定、非長方體或非規則外型，則非結構性網格 (四面體) 之粒子追蹤則是一般佳的選擇。因此，本研究以非結構網格作為三維流場可視化中粒子追蹤的計算方法。

在非結構網格，即四面體網格的粒子追蹤上，本研究亦採取一新的方法，將流場先劃分為數個較小的區域，以減少粒子在流場中計算其所在網格位置時之計算次數，再以另一套各邊加大一單位之網格，與原先之網格交錯，作為當粒子在網格邊界附近時，減少判斷下一網格之時間。

根據程式執行的結果，在結構性網格的粒子追蹤上，由於在判斷粒子所在網格的部分只需利用六面體的八個頂點做速度的線性內差，相對於非結構性網格中，必須在眾多網格點中計算距離該點最近且可包含該點之四面體之四個頂點，其在速度上即有很大的差異，結構性網格之粒子追蹤所需時間大約較非結構性網格的所需時間小於五倍左右。然而對於此測試對象，由於其外型為長方六面體，因此無法完全的顯示出非結構性網格點在對於任意邊界外型網格流場之優點。

在圖十五顯示如上所述之燃燒爐內流場，在其流場中共有 2185 組數據資料，其在  $x$  方向長度為 12，分為 23 個格點，在做粒子追蹤時將之切為 4 等分； $y$  方向長度 3，有 5 個格點，切為 2 等分；而在  $z$  方向則長度 10，有 19 個格點，共切為 4 等分。因此，在平均切成的小區域內，每一個區域網格內有大約 70 個原來的數據資料網格點。一般而言，在流場中分割區域的大小和流場的數據有密切的關係，如果數據資料較平均或資料筆數較少，則所切成的區域數目可較少；若數據資料筆數越大或數據位置較不均勻，則所切區域的範圍也越小，即其所切之區域數目也需增加。

第二組數據資料為一虛擬之長方形彎管內部分流場，亦為一非規則外型之流場。其  $x$  方向長度為 14， $y$  方向長度 16， $z$  方向長度則為 10，如圖十六所示。此筆向量數據包含了 849,828 組位置和速度，在流場數據範圍中即依各邊之長度劃分為 3,060 個小計算區域，由於此組數據之各點位置分佈較不均勻，因此每個小區域內之格點數即有很大的差異，再加上數據的龐大，故在做粒子追蹤的計算時即需較大的記憶體和較長的時間。由圖十六可見沿流場外型之流管，依循流線軌跡前進，直至離開流場數據區域。

在非規則外型的流場中，若以結構性網格做粒子追蹤的網格，往往無法符合其外型，但若以非結構性之四面體網格做追蹤計算，則得以和流場外型完全吻合，不會有這方面的問題，且對於非穩定流場或變化劇烈之流場，以結構性網格之計算則容易產生網格過大，無法表現流場細部變化的情形，而採用非結構性網格點因為只需四點即可做粒子追蹤的計算，因此可以更加微、完整的表現流場之細部特性。

## 五、結論

因為一般計算流體力學所產生之數值解在使用於流場可視化之圖像時均需記錄該點與其相鄰近之網格格點之關係，因此大幅增

加電腦記憶體所需之空間，如果格點數目龐大時即必須轉至工作站上進行下一步之處理；本研究即在個人電腦上發展出一套使用不同的計算法以降低顯像之過程中對記憶體需求之流場可視化系統。

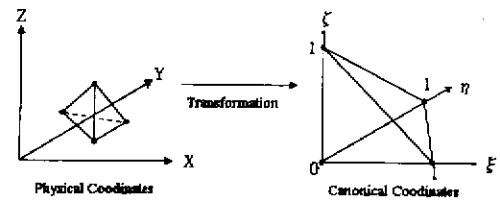
程式中主要以類似彩帶般之流帶表現流場中之流線，並藉彩帶之自旋以表現流場旋性。事實上，此系統亦可應用於任何向量場之繪製，如磁場中之磁力線繪製。

由於本系統採用四面體型之非結構性網格點，因此，不論是穩定或不穩定流場，立方體或是其他規則與不規則之流場外型，均可處理、表現其流場。由於四面體網格點之建構困難、複雜，加上其所產生的龐大資料庫 (database) 必須處理。因此在粒子追蹤方面是使用多層網格進行分析，其中使用了兩套相互交錯的網格，其優點是在當某特定点在第一套網格中遇上了網格的邊界時，即可將此點之所在位置之區域轉換為第二套網格的相對區域，若在數次計算之後，此點遇上了第二套網格之邊界時，又可將此點之所在區域再轉回至第一套網格之相對區域。各點之速度則是使用四面體之四端點進行內差。結果顯示使用本計算法在結構性或非結構性網格系統中均可輕易處理將近百萬格點數之流場。

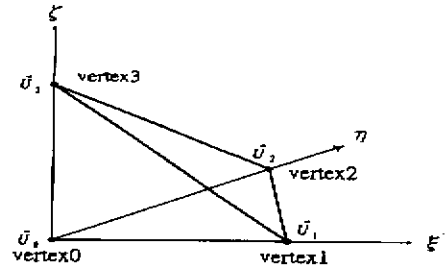
### 參考資料

- [1] Arrott, R., "Visualization in Computational Fluid Dynamics: A Case Study", Proceedings of Visualization '91, pp. 392-397, San Diego CA, Oct, 1990.
- [2] Belie, R.G., "Flow Visualization in the Space Shuttle's Main Engine", Mechanical Engineering, pp. 27-33, Sep, 1985.
- [3] G. Vlop, "Streamlines and Streamribbons in Aerodynamics", Proc. AIAA 27<sup>th</sup> Aerospace Science Meeting, Reno, Nev. Jan. 1989.
- [4] D. Darmofal and R. Haimes, "Visualization of 3-D Vector Fields: Variations on a Stream", Proc. AIAA 30<sup>th</sup> Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, Nev., Jan. 1992.
- [5] K.-L. Ma and P. J. Smith, "Cloud Tracking in Convection-Diffusion Systems", Proc. Visualization '93 Conf., pp. 253-260. IEEE CS Press, 1993.
- [6] H.-G. Pagendarm and B. Walter, "Feature Detection from Vector Quantities in a Numerically Simulated Hypersonic Flow Field in Combination with Experimental Flow Visualization", Proc. Visualization '94 conf., pp. 117-123. IEEE CS Press, 1994.
- [7] Hultquist, J.P.M., "Interactive Numerical Flow Visualization Using Stream Surface", Journal of Computing System in Engineering, vol. 1, No. 24, pp. 349-353, 1990.
- [8] Kruger, M.W., *Artificial Reality*, Addison-Wesley, pp. 175-176, 2<sup>nd</sup> Ed., 1991.
- [9] Weston, R.P., "Color Graphics Techniques for Shaded Surface Displays of Aerodynamics Flowfield Parameters", AIAA Paper 87-42125, Reno, Nv, 1987.
- [10] Helman, J.L., and Hesslink, L., "Representations and Display of vector field topology in fluid flow data sets", IEEE Computer, pp. 27-36, Aug, 1988.
- [11] Helman, J.L., and Hesslink, L., "Surface Representations of Two- and Three-Dimensionals Fluid Flow Topology", Proceedings of Visualization '91, pp. 6-13, San Diego, CA, Oct, 1991.
- [12] Eder, E., "Visualisierung von Teilchenstoemungun mit Hilfe eines Vektorrechners", Ph.D. Thesis, Fachhochschule Muenchen Fachbereich Informatik, Munich, Feb, 1991.
- [13] Shyh-Kuang Ueng, Christopher Sikorski, and Kwan-Liu Ma, "Efficient Streamline, Streamribbon, and Streamtube Constructions on Unstructured Grids", IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 2, No. 2, pp. 100-110, June, 1996.
- [14] David N. Kenwright and David A. Lane, "Interactive Time-Dependent Particle Tracking Using Tetrahedral Decomposition", IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 2, No. 2, pp. 120-129, June, 1996.
- [15] Stolk, J. and van Wijk, J.J., "Surface-Particles for 3D Flow Visualization", unpublished.
- [16] Dickinson, R.R., *Three-Dimensional Visualization and Display Technologies*, SPIE, vol. 1083, pp. 173-180, 1989.

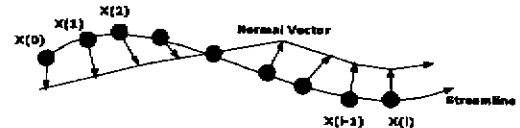
### 附圖



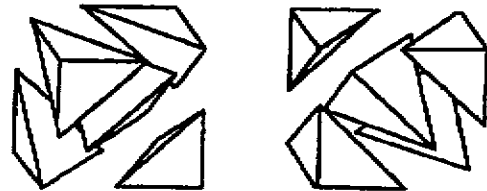
圖一 座標系統轉換



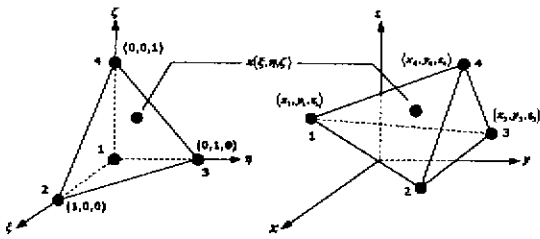
圖二 Canonical 座標系統中之單位四面體網格



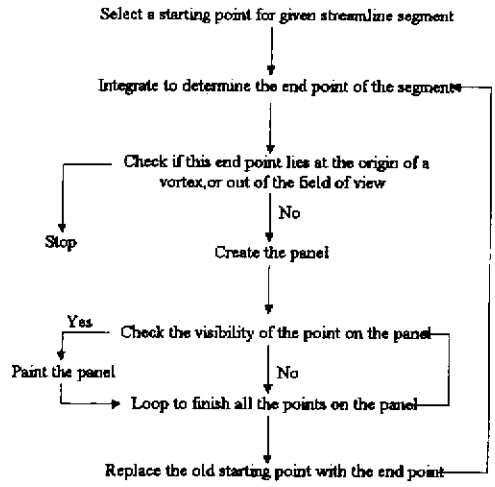
圖三 流帶結構示意圖



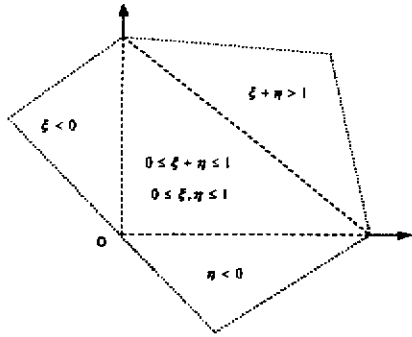
圖四 六面體切割為多個四面體之不同方式



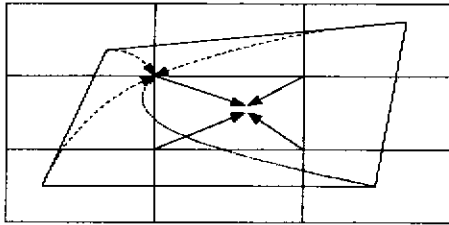
圖五 natural 座標與物理座標中之幾何四面體網格點



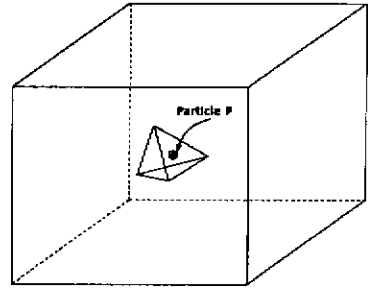
圖九 程式之工作流程



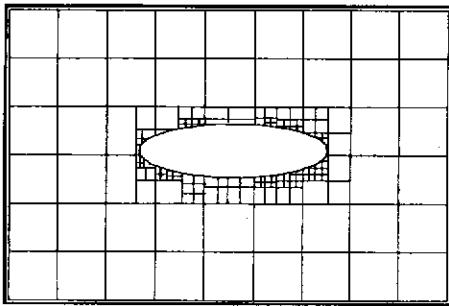
圖六 在 2D Canonical 座標系統中之網格搜尋方法



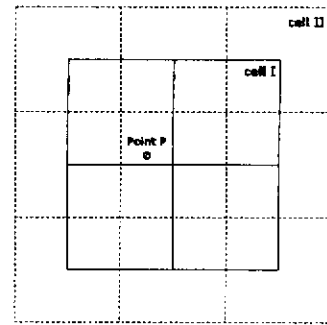
圖七 非規則網格與 Cartesian 網格



圖十 粒子在流場中的網格位置

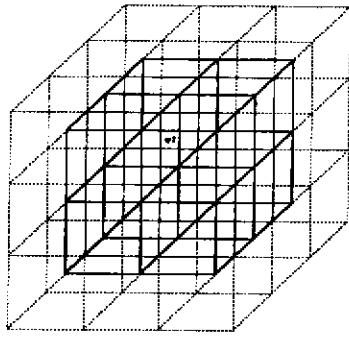


圖八 Quad-tree 網格

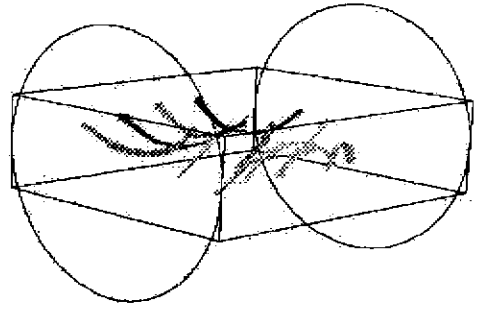


圖十一 網格轉換

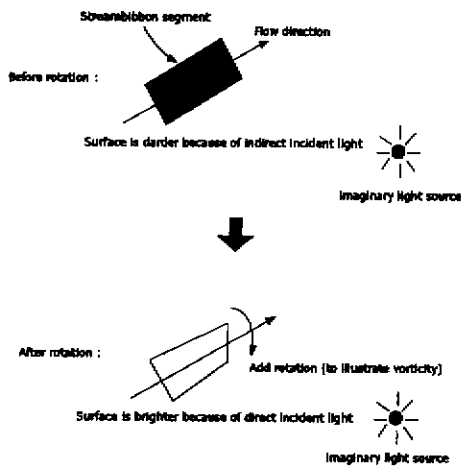




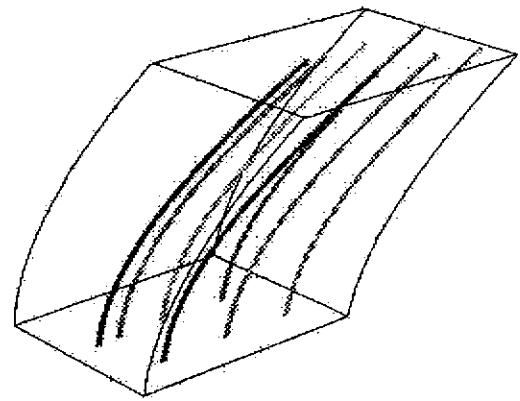
圖十二 多層網格 (Multi-Layer Grid System)



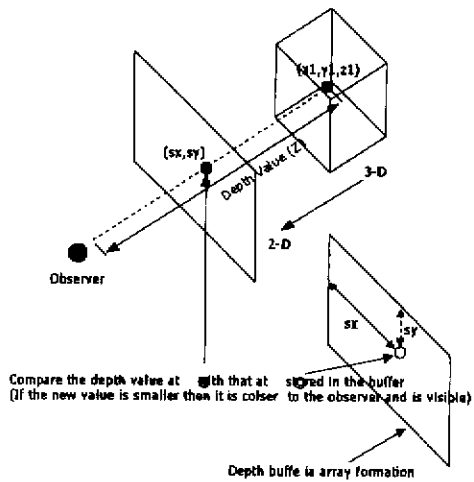
圖十五 198度相角時混合室內流帶隨流場變化之情形  
(採非結構性網格之粒子追蹤—2,185筆數據)



圖十三 彩色小板之變形與光影變化



圖十六 長方形彎管中流帶隨流場變化之情形



圖十四 以 z 緩衝器做可視測試