



極音速三維擾動圓錐流場之漸近展開理論及其應用

Asymptotic Theory of Hypersonic Flow

Past a Three-Dimensional Perturbed Cone with Its Application

計劃編號：NSC 88-2212-E-032-007

執行期限：86年8月1日~87年7月31日

主持人：馮朝剛 淡江大學工學院航空太空工程系教授

共同主持人：林顯群 國立台灣科技大學機械系教授

一、摘要

本研究應用擾動法與座標變數變換的技巧，以三維圓錐流場的震波層外解為基礎，向內延伸至錐體表面附近作內解的擾動展開，探討漩渦層氣動力現象，而依據漸近匹配的原理，為整個震波層推導出一致地適用之封閉形式的近似解。經由探討內解擾動展開的氣動力性質可明顯看出，在漩渦層區域內熵與密度等氣動力性質其梯度急遽變化的趨勢，對於錐體表面附近的流場特徵能有完整而清晰的瞭解。本研究除了在極音速三維擾動流場的理論解析獲得完整的結果，也為流場震波層歸納出詳細而嚴謹的氣動力分析。

關鍵詞：擾動法、漩渦層、極音速、圓錐流場

Abstract

This study investigates the vortical-layer phenomenon associated with hypersonic flow past a conical body with multi-directional curvature. By means of the perturbation method and the stretching coordinates, the inner expansion, which based on the outer solution of the shock layer, is proceeded near the body surface. Thereafter, in accordance with the asymptotic matching principle, the uniformly valid approximate solutions are derived and expressed in closed form. In summary, this work obtains not only complete closed-form approximations by means of theoretical approach for the hypersonic three-dimensional conical flow, but also provides detailed and rigorous analysis for the whole shock layer in conical flow.

Keywords: perturbation method, vortical layer, hypersonic, conical flowfield

二、計畫緣由及目的

在氣動力學的解析研究領域裡，有關攻角圓錐流場的研究，Stone[1,2]針對微小攻角 α 為變數作密級數的連續展開，獲得了一階與二階的擾動解；然而不幸Stone的解析在流體接近圓錐體表面附近時失效，這是因為具攻角的擾動圓錐流場失去其軸對稱特性，因而產生方位方向的擾動變化，使得流體在到達錐體表面附近，方位方向的擾動顯得十分重要，因此Ferri[3]在1950年提出漩渦層的概念，並以數學解析證明Stone的結果於錐體表面附近失效，無法一致地適用於整個擾動流場的震波層中，探究其原因是由於圓錐體表面為等熵面，必需依賴一個區域來調整外解熵值的改變，此調整熵值變化的區域即為漩渦層。

1962年，Cheng[4]利用Newtonian理論分析Stone問題而獲得近似的解析解，修正了具攻角的第一階解其適用於漩渦層外部的區域，其次使用修正的展開式解析了漩渦層內部的區域。而同時Woods[5]也應用Stone的理論研究錐體表面的漩渦層部分，但並未找出適合整個流場的解析結果。Munson[6]於1964年針對具攻角之正圓錐流場，應用漸近展開的匹配方法得到一致適用於整個流場之結果，其外解部分相當於Stone的結果，而內解則可適用於錐體表面附近的漩渦層中；他同時發現外解的速度方位，於第一階擾動參數的具攻角流場中均一致適用，而外解的壓力則於任何階數之擾動參數的流場中一致適用。Melnik[7]則分析流經傾斜圓錐體與橢圓錐體的問題，並且探討漩渦奇異性在圓錐流場具大攻角的情況下會逐漸遠離錐體表面。

Rasmussen[8]在1985年對徑向曲度圓錐流場的震波層作了完整而嚴謹的解

析研究，在外解中應用座標伸張變換的原理重新定義新的座標變數，避免其第一階解奇異性的產生；在內解部分則應用 Munson[6]所建議的座標變數變換，順利地推導出擾動流場漩渦層的解析結果，同時藉由漸近匹配的原則，將外解與內解撮合成複合解，該解於整個流場的震波層中一致地適用。1988年 Lin[9]結合軸向與徑向曲度圓錐流場作外解的擾動展開，獲得了震波層氣動力的理論近似解。

本計畫是根據擾動法的原理，對極音速三維擾動之圓錐流場作解析的研究，並以探討錐體表面附近的漩渦層為主，應用內解擾動展開分析該區域的氣動力性質，找出震波層內一致適用的解析結果。應用擾動法與座標變數變換的技巧，以流場震波層的外解為基礎，向內延伸至錐體附近作內解的擾動展開，進一步探討流場漩渦層的氣動力現象；同時依據漸近匹配的原理，為整個震波層推導出一致適用的近似解析結果，可歸納出極音速三維擾動流場之震波層氣動力性質完整的分析。

三、研究方法及成果

3.1 統御方程式與邊界條件

三維擾動圓錐流場的形成如圖一所示，同時為方便解析研究而採用球座標 (r, θ, φ) 來描述該流場。在擾動流場中，速度向量的表示式為

$$\vec{v} = u\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta + w\hat{e}_\varphi \quad (1)$$

三維曲度的圓錐體如圖二所示，其關係式可表示為

$$\theta_0 = \delta [1 - \epsilon_{mn}(r/l)^m \cos n\phi] \quad (2)$$

其中三維擾動流場外形的曲度變化中，軸向曲度的擾動由參數值 m 所控制，而徑向曲度的擾動變化則受參數值 n 所影響。因此震波外形的擾動關係式為

$$\theta_0 = \delta [\sigma - \epsilon_{mn} G_{mn}(r/l)^m \cos n\phi] \quad (3)$$

由於基本圓錐流場受擾動變數的作用而變形，必需引進新的座標變數 $\theta_0 = \theta_0(\theta, r, \phi)$ ，在錐體表面與震波間對極角 θ 作轉換，其定義為[9]

$$\frac{\theta_0 - \delta}{\beta - \delta} = \frac{\theta - \theta_0(r, \phi)}{\theta_s(r, \phi) - \theta_0(r, \phi)} \quad (4)$$

因此，當 $\theta = \theta_0(r, \phi)$ 位於實際的錐體表面時，則新的座標變數則為 $\theta_0 = \delta$ ；而若 $\theta = \theta_s(r, \phi)$ 位於實際的錐體表面時，則新的

座標變數則為 $\theta_0 = \beta$ 。

假設穩定、無黏性、絕熱且理想氣體的條件下，其流場的質量、動量、能量、伯努力與狀態方程式等統御方程式經變數(4)轉換後，其形式為

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left[2\rho u + \rho v \cot \theta + r \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \phi} \right] - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) r \frac{\partial(\rho u)}{\partial \theta_0} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta_0} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right) \csc \theta \frac{\partial(\rho w)}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5a)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta_0} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left[ru \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - v^2 - w^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right] - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) ru \frac{\partial u}{\partial \theta_0} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta_0} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right) \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5b)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta_0} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left[ru \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + uv - w^2 \cot \theta \right] - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) ru \left(\frac{\partial v}{\partial \theta_0}\right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right) \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5c)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial \theta_0} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left[ru \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} uv + vw \cot \theta \right] - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) ru \left(\frac{\partial w}{\partial \theta_0}\right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right) \left(\frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta_0} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta_0} \right) = 0 \quad (5d)$$

$$v \frac{\partial s}{\partial \theta_0} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left[ru \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial s}{\partial \phi} \right] - \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) ru \left(\frac{\partial s}{\partial \theta_0}\right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi}\right) \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial s}{\partial \theta_0} = 0 \quad (5e)$$

至於在錐體表面 $\theta_0 = \delta$ 的邊界條件，可由無黏性流體流經之錐體表面的切線條件得到，即

$$\vec{v} \cdot \hat{n}_0 = 0 \quad (6a)$$

其中 \hat{n}_0 代表垂直於錐體表面向外的單位向量。而在震波上 $\theta_0 = \beta$ ，則應用陡變條件的原理，從質量守恆與切線方向的動量守恆式來推導

$$\rho_\infty \vec{V}_\infty \cdot \hat{n}_s = \rho \vec{V}_s \cdot \hat{n}_s \quad (6b)$$

$$\vec{V}_\infty \times \hat{n}_s = \vec{V}_s \times \hat{n}_s \quad (6c)$$

上述的邊界條件經由外解展開式的代入與展開後，可獲得適用於該流場的擾動邊界條件，其結果可見於文獻[9]。

3.2 外解展開

將擾動錐體及震波的表示式(2)、(3)代入(4)式中，經分離合併後，則原座標變數 θ 可寫成以 θ_0 為變數的展開式如下

$$\theta = \theta_0 + \epsilon_{mn} \theta_{mn}(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi \quad (7a)$$

其中

$$\theta_{mn}(\theta_0) = \delta \left[(1 - G_{mn}) \frac{\theta_0 - \delta}{\beta - \delta} - 1 \right] \quad (7b)$$

由於三維流場軸向與徑向曲度比例於小擾動參數 ϵ_{mn} ，因此假設擾動流場外解的第一階展開式為

$$u(r, \theta, \phi) = u_0(\theta_0) + \epsilon_{mn} U_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \quad (8a)$$

$$v(r, \theta, \phi) = v_0(\theta_0) + \epsilon_{mn} V_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \quad (8b)$$

$$w(r, \theta, \phi) = \epsilon_{mn} W_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \sin n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \quad (8c)$$

$$p(r, \theta, \phi) = p_0(\theta_0) \left[1 + \epsilon_{mn} P_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \right] \quad (8d)$$

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0(\theta_0) \left[1 + \epsilon_{mn} \rho_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \right] \quad (8e)$$

$$s(r, \theta, \phi) = s_0 + \epsilon_{mn} S_{mn}^o(\theta_0)(r/l)^m \cos n\phi + O(\epsilon_{mn}^2) \quad (8f)$$

其中第零階解 $u_0(\theta_0)$ 、 $v_0(\theta_0)$ 、 $p_0(\theta_0)$ 、 $\rho_0(\theta_0)$ 與 s_0 為基本的圓錐流場解 [9]。

將外解的擾動展開式 (7) 與 (8) 代入統御方程式 (5) 中，經分離變數與各階擾動項的展開合併後，可得出第零階擾動方程式合併後的方程式為

$$\left(1 - \frac{v_0^2}{a_0^2} \right) \frac{dv_0}{d\theta_0} + v_0 \cot \theta_0 + \left(2 - \frac{v_0^2}{a_0^2} \right) u_0 = 0 \quad (9)$$

此式為基本圓錐流場之統御方程式。

第一階擾動方程式經過合併後可為下列表示：

$$\text{能量：} \quad \mu u_0 S_{mn}^o + v_0 \frac{dS_{mn}^o}{d\theta_0} = 0 \quad (10a)$$

$$\text{柏努力：} \quad \frac{a_0^2}{\gamma - 1} (P_{mn}^o - \rho_{mn}^o) + u_0 U_{mn}^o + v_0 V_{mn}^o = 0 \quad (10b)$$

$$\text{狀態：} \quad P_{mn}^o - \gamma \rho_{mn}^o = S_{mn}^o \quad (10c)$$

$$\text{動量：} \quad \frac{dU_{mn}^o}{d\theta_0} - (1+m)V_{mn}^o - \frac{m}{\gamma(\gamma-1)} \frac{a_0^2}{v_0} S_{mn}^o = -m \frac{dv_0}{d\theta_0} \theta_{mn} + v_0 \frac{d\theta_{mn}}{d\theta_0} \quad (10d)$$

$$\left(\frac{dW_{mn}^o}{d\theta_0} + \cot \theta_0 W_{mn}^o \right) v_0 \sin \theta_0 + (m+1) u_0 \sin \theta_0 W_{mn}^o = n \left(\frac{p_0}{\rho_0} P_{mn}^o - \frac{\theta_{mn}}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\theta_0} \right) \quad (10e)$$

$$\text{質量：} \quad \left[(1-B) \cot \theta_0 + (1-m) \frac{u_0 v_0}{a_0^2} \right] V_{mn}^o + \left[(2+m-C) - m \frac{u_0^2}{a_0^2} \right] U_{mn}^o + (1-A) \frac{dV_{mn}^o}{d\theta_0} - \frac{u_0 v_0}{a_0^2} \frac{dU_{mn}^o}{d\theta_0} + \frac{n}{\sin \theta_0} W_{mn}^o = \frac{v_0}{\sin \theta_0} \theta_{mn} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d(\rho_0 v_0)}{d\theta_0} \frac{d\theta_{mn}}{\theta_0} \quad (10f)$$

其中

$$A(\theta_0) = \frac{v_0^2}{a_0^2} \quad (11a)$$

$$B(\theta_0) = \tan \theta_0 \left[\frac{v_0}{a_0^2} \left(\frac{dv_0}{d\theta_0} + u_0 \right) - \frac{d(\ln \rho_0)}{d\theta_0} - \frac{v_0^2}{a_0^2} \frac{d(\ln a_0^2)}{d\theta_0} \right] \quad (11b)$$

$$C(\theta_0) = \frac{v_0^2}{a_0^2} - \frac{u_0 v_0}{a_0^2} \frac{d(\ln a_0^2)}{d\theta_0} \quad (11c)$$

整個流場的震波層外解經計算後可以完全解出，所有的氣動力性質均以封閉的形式表示出，結果參考文獻 [9]。當流動靠近錐體表面附近時，外解的第一階擾動解將失效而無法在震波層內一致有效，這個區域即為漩渦層；若以外解擾動展開至第二階作修正時，則會發現完全地發散而失效 [8]。因此，必需對漩渦層內作內解的擾動展開，以求得震波層一致有效的流場解。

3.3 擾動展開

根據 Munson [6] 的研究可知，由於漩渦層相其階數相當於 $\theta_0 (\partial/\partial \theta_0) = O(\epsilon_{mn})$ ，因此建議以原外解座標變數 (4) 式為基礎，重新定義與擾動參數 ϵ_{mn} 有關的新獨立變數，所以對漩渦層解析所引用的內解座標變數為

$$\Psi = \left[\frac{\theta - \theta_b(r, \phi)}{\theta_s - \theta_b(r, \phi)} \right]^{1-m} = \left[\frac{\theta_0 - \delta}{\beta - \delta} \right]^{1-m} \quad (12)$$

$$\Phi = \phi \quad (13)$$

$$R = r \quad (14)$$

若以上標 i 表示內解，則流場性質之變數為

$$u(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = U^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15a)$$

$$v(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = \Psi^{1-m} V^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) + r \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial r} \right) U^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) + \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \phi} \right) W^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15b)$$

$$w(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = W^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15c)$$

$$p(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = P^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15d)$$

$$\rho(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = \rho^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15e)$$

$$s(r, \theta_0, \phi; \epsilon_{mn}) = S^i(R, \Psi, \Phi; \epsilon_{mn}) \quad (15f)$$

將以上各式代入統御方程式 (5) 中，由於 ϵ_{mn} 很小以致於造成與其他項比較之下，可看出 Ψ^{1-m} 為很小的項，因此在內解的變數變換時含有此項者可被忽略之，所以經過座標變換後的漩渦層統御方程式如下

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right) \left[2\rho^i U^i + R \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R} \right) \rho^i U^i \cot \theta_b + R \frac{\partial(\rho^i U^i)}{\partial R} + \csc \theta_b \frac{\partial(\rho^i W^i)}{\partial \Phi} \right] + \frac{\rho^i V^i}{\beta - \delta} + \frac{\epsilon_{mn} \Psi}{\beta - \delta} \left[\frac{\partial(\rho^i V^i)}{\partial \Psi} - R \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial R} \right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R} \right) \right] \frac{\partial(\rho^i U^i)}{\partial \Psi} - \csc \theta_b \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial \Phi} \right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi} \right) \right] \frac{\partial(\rho^i W^i)}{\partial \Psi} \right] = 0 \quad (16a)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left\{ R U^i \frac{\partial U^i}{\partial R} + \frac{W^i}{\sin \theta_b} \frac{\partial U^i}{\partial \Phi} - R^2 \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right)^2 U^{i^2} - \frac{2R}{\sin \theta_b} \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) + \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) U^i W^i - \left[1 + \csc^2 \theta_b \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right)^2\right] W^{i^2} + \frac{R}{r^i} \frac{\partial P^i}{\partial R} \right\} + \frac{\varepsilon_{mn} \Psi}{\beta - \delta}$$

$$\left\{ V^i - R \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial R}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) \right] U^i - \csc \theta_b \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial \Phi}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) \right] W^i \right\} \frac{\partial U^i}{\partial \Psi} = 0 \quad (16b)$$

$$\frac{\partial P^i}{\partial \Psi} = 0 \quad (16c)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left\{ R U^i \frac{\partial W^i}{\partial R} + U^i W^i + \left[R \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) U^i + \csc \theta_b \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) W^i \right] W^i \cot \theta_b + \frac{W^i}{\sin \theta_b} \frac{\partial W^i}{\partial \Phi} + \frac{\csc \theta_b}{\rho^i} \frac{\partial P^i}{\partial \Phi} \right\} + \frac{\varepsilon_{mn} \Psi}{\beta - \delta} \left\{ V^i - R \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial R}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) \right] U^i - \csc \theta_b \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial \Phi}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) \right] W^i \right\} \frac{\partial W^i}{\partial \Psi} = 0 \quad (16d)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\right) \left\{ R U^i \frac{\partial S^i}{\partial R} + \frac{W^i}{\sin \theta_b} \frac{\partial S^i}{\partial \Phi} \right\} + \frac{\varepsilon_{mn} \Psi}{\beta - \delta} \left\{ V^i - R \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial R}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) \right] U^i - \csc \theta_b \left[\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial \Phi}\right) - \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) \right] W^i \right\} \frac{\partial S^i}{\partial \Psi} = 0 \quad (16e)$$

狀態方程式為

$$\frac{S^i - s_0}{c_v} = \ln \left[\frac{P^i}{p_0(\delta)} \right] - \gamma \ln \left[\frac{\rho^i}{\rho_0(\delta)} \right] \quad (16f)$$

可壓縮之伯努力方程式為

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P^i}{\rho^i} + \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + R^2 \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right)^2 \right] U^{i^2} + \left[1 + \csc^2 \theta_b \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right)^2 \right] W^{i^2} + \frac{2R}{\sin \theta_b} \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial R}\right) \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial \Phi}\right) U^i W^i \right\} = h_i \quad (16g)$$

若擾動參數 $\varepsilon_{mn} \rightarrow 0$ 時，表示圓錐流場的擾動消失亦即漩渦層也將隨之消去，因此內解獨立變數展開的低階項應與基本圓錐流場之錐體表面的解相符合，即

$$U_0^i = u_0(\delta), \quad P_0^i = p_0(\delta), \quad \rho_0^i = \rho_0(\delta), \quad S_0^i = s_0 \quad (17)$$

所以，假設內解的第一階擾動展開式為

$$U^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = u_0(\delta) + \varepsilon_{mn} U_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \quad (18a)$$

$$V^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = V_0^i + \varepsilon_{mn} V_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \quad (18b)$$

$$W^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = \varepsilon_{mn} W_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \quad (18c)$$

$$P^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = p_0(\delta) \left[1 + \varepsilon_{mn} P_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \right] \quad (18d)$$

$$\rho^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = \rho_0(\delta) \left[1 + \varepsilon_{mn} \rho_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \right] \quad (18e)$$

$$S^i(R, \Psi, \Phi; \varepsilon_{mn}) = s_0 + c_v \left[\varepsilon_{mn} S_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + O(\varepsilon_{mn}^2) \right] \quad (18f)$$

將內解的第一階擾動展開式(18)代入漩渦層之統御方程式(16)中，經分離變數

與各階擾動項的展開合併後，可得出第零階擾動式：

$$V_0^i = -2(\beta - \delta) u_0(\delta) \quad (19)$$

$$\frac{\partial S_{mn}^i}{\partial R} = 0 \quad (20)$$

第一階擾動方程式：

$$\text{質量：} \quad 2U_{mn}^i + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{W_{mn}^i}{\delta} \right) + R \frac{\partial}{\partial R} \left[U_{mn}^i + u_0(\delta) \rho_{mn}^i \right] + \frac{V_{mn}^i}{\beta - \delta} = u_0(\delta) \left(m - 2 \frac{d\theta}{d\theta_0} \right) (R/l)^m \cos n\Phi \quad (21a)$$

$$\text{動量：} \quad u_0(\delta) \frac{\partial U_{mn}^i}{\partial R} + \frac{p_0(\delta)}{\rho_0(\delta)} \frac{\partial P_{mn}^i}{\partial R} = 0 \quad (21b)$$

$$\frac{\partial P_{mn}^i}{\partial \Psi} = 0 \quad (21c)$$

$$R \frac{\partial W_{mn}^i}{\partial R} + W_{mn}^i = - \frac{a_0^2(\delta)}{\gamma \delta u_0(\delta)} \frac{\partial P_{mn}^i}{\partial \Phi} \quad (21d)$$

$$\text{能量：} \quad -2u_0(\delta) \Psi \frac{\partial S_{mn}^i}{\partial \Psi} + \frac{W_{mn}^i}{\delta} \frac{\partial S_{mn}^i}{\partial \Phi} = 0 \quad (21e)$$

$$\text{狀態：} \quad S_{mn}^i = P_{mn}^i - \gamma \rho_{mn}^i \quad (21f)$$

$$\text{伯努力：} \quad a_0^2(\delta) (P_{mn}^i - \rho_{mn}^i) + (\gamma - 1) u_0(\delta) U_{mn}^i = 0 \quad (21g)$$

3.4 第一階擾動方程式

由極向動量分量之擾動方程式(16c)可知 $P^i = P^i(R, \Phi, \varepsilon_{mn})$ ，也就是壓力的變化在漩渦層之中為常數，根據漸近匹配的原理[10]即外解展開的內極限等於內解展開的外極限，因此從外解展開式(8d)與內解展開式(18d)的匹配後，壓力的內解展開式即可決定為

$$P^i(R, \Phi, \varepsilon_{mn}) = p_0(\delta) \left[1 + \varepsilon_{mn} P_{mn}^i(\delta) (R/l)^m \cos n\Phi + O(\varepsilon_{mn}^2) \right] \quad (22)$$

上式的右手項解為壓力的外解展開式在錐體表面 $\theta_0 = \delta$ 的值，因此壓力的外解在震波層內對任何階數的 ε_{mn} 展開均一致地適用，與文獻[6]的結論相同，所以由方程式(21c)所得到壓力的第一階內解應為

$$P_{mn}^i(R, \Phi) = P_{mn}^i(\delta) (R/l)^m \cos n\Phi \quad (23)$$

由動量的外解擾動方程式(10e)來計算，當 $\theta_0 = \delta$ 時可得

$$P_{mn}^i(\delta) = \frac{(m+1)\gamma \delta u_0(\delta)}{n a_0^2(\delta)} W_{mn}^i(\delta) \quad (24)$$

再將(24)式代入動量內解擾動方程式(21d)，則

$$W_{mn}^i(R, \Phi) = W_{mn}^i(\delta) (R/l)^m \sin n\Phi \quad (25)$$

其中

$$W_{mn}^o(\delta) = \frac{na_0^2(\delta)}{(m+1)\gamma\delta u_0(\delta)} P_{mn}^o(\delta) \quad (26)$$

此解與(24)式相同，因此速度方位分量的外解亦在震波層內一致地適用。能量擾動方程式(20)可知熵為 $S_{mn}^i = S_{mn}^i(\Psi, \Phi)$ 的變數，而又由第一階擾動式(21e)發現該二維偏微分方程式具有特徵方程式，即

$$dS_{mn}^i = 0 \quad (27)$$

$$\frac{W_{mn}^o(\delta)}{\delta V_\infty} \frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{d\Phi}{\sin n\Phi} \quad (28)$$

經積分(28)式可得

$$\Psi^{\frac{A_{mn}^*}{2}} = \frac{\tan \frac{n\Phi}{2}}{\tan \frac{n\Phi_0}{2}} \quad (29)$$

其中 Φ_0 為積分常數，而 A_{mn}^* 的定義為

$$A_{mn}^* = -\frac{nW_{mn}^o(\delta)}{\delta V_\infty} = \frac{A^*}{\epsilon_{mn}} \quad (30)$$

因此，經由積分(27)式後可知 S_{mn}^i 為沿著(28)式所表示的特徵線上的常數值，所以 S_{mn}^i 必須為積分常數 Φ_0 的任意函數，應用漸近匹配的原理因此

$$\begin{aligned} S_{mn}^i(\Psi, \Phi) &= S_{mn}^o(\beta) \cos n\Phi \\ &= S_{mn}^o(\beta) \left[\frac{\Psi^{A_{mn}^*} - \tan^2 \frac{n\Phi}{2}}{\Psi^{A_{mn}^*} + \tan^2 \frac{n\Phi}{2}} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

可知當 $\Psi \rightarrow 1$ 時， S_{mn}^i 漸近地趨近於 $S_{mn}^o(\beta) \cos n\Phi$ 而有外解的作用；若 $\Psi \rightarrow 0$ ，則在錐體表面 $S_{mn}^i = -S_{mn}^o(\beta)$ 為常數值已有內解的修正效果，因此，該式運算的熵值在震波層內可一致地適用。由狀態的擾動方程式(21f)可求出內解的密度為

$$\rho_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) = \frac{1}{\gamma} \left[P_{mn}^o(\delta)(R/l)^m \cos n\Phi - S_{mn}^i(\Psi, \Phi) \right] \quad (32)$$

此外，速度徑向分量的內解可由擾動方程式(21g)求得

$$U_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) = -\frac{1}{\gamma} \frac{a_0^2(\delta)}{u_0(\delta)} \left[P_{mn}^o(\delta)(R/l)^m \cos n\Phi + \frac{S_{mn}^i(\Psi, \Phi)}{\gamma - 1} \right] \quad (33)$$

上式也可滿足動量擾動方程式(21b)。另外，由第一階的連續方程式推算出速度極向分量的內解為

$$\begin{aligned} \frac{V_{\theta mn}^i(R, \Psi, \Phi)}{\beta - \delta} &= -2U_{mn}^i(R, \Psi, \Phi) + \left\{ \left(m - 2 \frac{d\theta_{mn}}{d\theta_0} \right) u_0(\delta) \right. \\ &\quad \left. - \left[n + \frac{m(m+1)}{n} \left(\frac{u_0^2(\delta)}{a_0^2(\delta)} - 1 \right) \delta^2 \right] \frac{W_{mn}^o(\delta)}{\delta} \right\} (R/l)^m \cos n\Phi \end{aligned} \quad (34)$$

3.5 漩渦層之分析

關於漩渦層之氣動力分析方面，壓力如先前的解析過程中已知在震波層內一致地適用，所以外解的擾動壓力[9]即在整個震波層的變化趨勢，在漩渦層內無壓力梯度陡變的現象亦無須作內解展開修正。此外由公式(31)經漸近匹配後，可得出熵在震波層內具有一致地適用的結果，因此圖四顯示在震波層內第一階擾動熵的分布情形；藉由最大值 $(S_{mn}^i)_{\max} = -S_{mn}^o(\beta)$ 正交化後可看出對於各種 ϕ 角的擾動熵值，由震波層朝錐體表面緩慢地改變，直到趨近漩渦層時發生急遽的變化，尤其當 $\theta_0 \rightarrow \delta$ 時熵的梯度變化更大，在圖中所有的曲線皆在 $\theta_0 \rightarrow \delta$ 同時逼近 $S_{mn}^i(\theta_0)/(S_{mn}^i)_{\max} = 1$ 之值。至於圖五可看出不同擾動參數 ϵ_{mn} 下的趨勢，以變化較劇烈的 $\phi = 30^\circ$ 熵曲線為例，隨擾動值增加曲線變化逐漸和緩，這是由於漩渦層與流場擾動的變化有關，當漩渦層隨擾動值增加而厚度漸增時，則流體在漩渦層內的熵梯度變化也就不會太劇烈，因此呈現逐漸和緩趨勢的曲線。

當流體到達錐體表面時，密度擾動值(32)式則成為

$$\rho_{mn}^i(R, 0, \Phi) = \frac{1}{\gamma} \left[P_{mn}^o(\delta)(R/l)^m \cos n\Phi + S_{mn}^o(\beta) \right] \quad (35)$$

比較這個結果，顯然地外解的密度展開(8e)式在錐體表面已不適用，因此根據[10]Additive的原理找出其複合解 ρ_{mn}^c

$$\rho_{mn}^c = \rho_{mn}^o + \rho_{mn}^i - \rho_{cp} \quad (36)$$

其中 ρ_{cp} 為密度內解與外解共同的部分，為內解的外極限值而同樣也是外解的內極限值，經由漸近匹配所得的之，因此在底平面 $r=1$ 時

$$\rho_{mn}^c(\theta_0, \phi) = \frac{1}{\gamma} \left[P_{mn}^o(\theta_0) \cos n\phi - S_{mn}^o(\beta) \left[\frac{\Psi^{A_{mn}^*} - \tan^2 \frac{n\phi}{2}}{\Psi^{A_{mn}^*} + \tan^2 \frac{n\phi}{2}} \right] \right] \quad (37)$$

所以在圖六以 $\phi = 60^\circ$ 的密度變化曲線為例，可以看出外解的擾動值在錐體表附近並不準確，也就是在漩渦層中外解並不具有梯度變化的趨勢，然而隨著座標 θ_0 往震波方向移動時，外解才合用於震波層之中。另一方面在內解展開的部分，則可完整地呈現出漩渦層中梯度變化劇烈的程度，但是隨著座標往震波方向移動時，內解值卻失去正確性，所以也僅能適用於相當薄的漩渦層區域裡；由於內、外解均具有其適用的範圍，因此經過漸近匹配後所

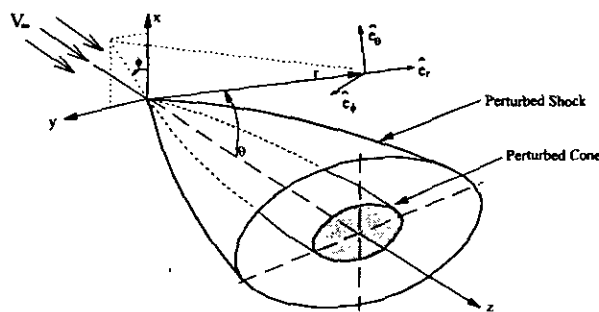
得之複合解，則完美地呈現出兼具內外解變化的趨勢，此解在震波層內一致地適用。在擾動值 $\varepsilon_{mn} = 0.1$ 而極音速相似參數 $K_s = 1.0$ 條件下，圖七顯示密度複合解在震波層內的適用情形，從震波往錐體表面而在漩渦層外的部分，密度擾動的變化較小，但在漩渦層之中則變化迅速，此外從圖中也可看出漩渦層是相當地薄。圖八則針對不同的擾動值所作的比較，對於較小的擾動變化，其接近錐體表面的梯度變化甚大，雖然漩渦層很薄但更容易顯示出內解修正的重要性，同時也了解擾動很小時震波的擾動變化比較錐體還小，因此流體密度的梯度變化在震波層中較和緩。但是當流體到達錐體表面附近時，由於錐體擾動的變化對流體的影響變得十分重要，因而密度的梯度變化在此區域呈現劇烈的陡變，所以錐體在方位方向的擾動變化即是形成漩渦層的主因。

四、結論與建議

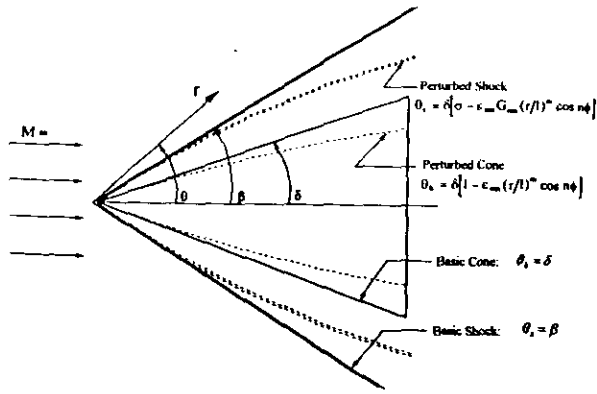
本研究探討三維擾動流場漩渦層區域的氣動力現象，發現當流體接近錐體表面時，熵與密度等氣動力性質有梯度陡變的趨勢，並且壓力與速度方位分量在震波層內則一致地適用，這與文獻[6]的結論不謀而合。而三維圓錐流場的內解均可簡化成爲徑向曲度二維圓錐流場的內解形式，並且也與文獻[8]的結果相同，因此經由以上早期的研究來驗證，足以說明三維圓錐流場的理論分析的嚴謹性。同時本研究的內解展開與漸近匹配所得之流場完整的氣動力分析結果，可以彌補外解展開在此漩渦層區域分析上的不足。此外，由於漩渦層很薄的特徵而引用座標伸張的原理將統御方程式重新變換，以利在三維流場的震波層作內解的擾動展開解析，事實上這部分的數學技巧也暗示在應用計算流體力學分析時，並非只有在考慮邊界層的黏滯效應上，錐體附近格點的安排才有加密的考慮；在本研究的分析中可知，即使是流場在無黏滯的條件下，由於漩渦層的形成造成錐體表面附近的部分氣動力性質，已有梯度變化劇烈的現象，使得在錐體附近的漩渦層格點數應有調整加密的必要，方能切確地分析該區域的氣動力現象，以獲得完整的流場模擬分析。

參考文獻

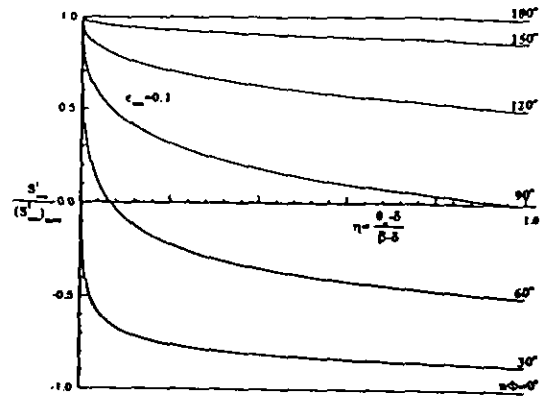
1. Stone, A. H., "On Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone," *Journal of Mathematics Physics*, (I), Vol. 27, pp. 67-81, 1948.
2. Stone, A. H., "On Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone," *Journal of Mathematics Physics*, (II), Vol. 30, pp. 220-233, 1952.
3. Ferri, A., "Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack," NACA, TN-2236, 1950.
4. Cheng, H. K., "Hypersonic Flows Past a Yawed Circular Cone and Other Pointed Bodies," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 12, No. 2, pp. 169-191, 1962.
5. Woods, B. A., "The Flow Close to the Surface of a Circular Cone at Incidence to a Supersonic Stream," *The Aeronautical Quarterly*, Vol. 23, pp. 115-128, 1962.
6. Munson, A. G., "The Vortical Layer on an Inclined Cone," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 20, pp. 625-643, 1964.
7. Melnik, R. E., "Vortical Singularities in Conical Flow," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 4, pp. 631-637, April 1967.
8. Rasmussen, M. L., "Aerodynamics of Cone-Derived Waveriders and Related Lifting Bodies," AFATL-TR-84-70, 1985.
9. Lin, S. C. and Rasmussen, M. L., "Cone-Derived Waverider with Combined Transverse and Longitudinal Curvature," *AIAA Paper-88-0371*, Jan. 1988.
10. Van Dyke, M. D., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic, New York, 1964.



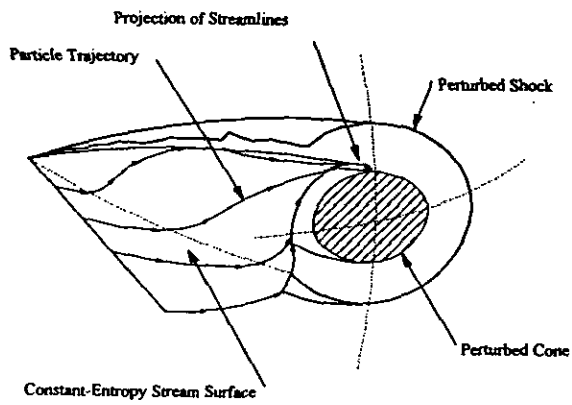
圖一、三維擾動流場的形成



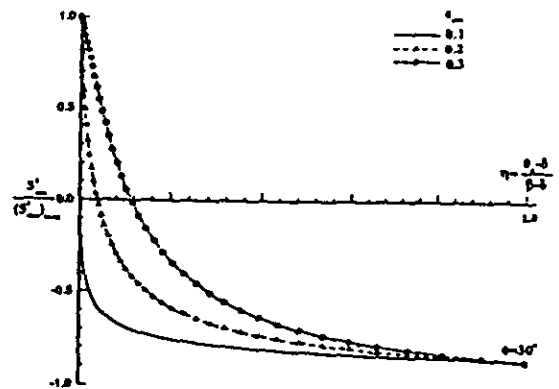
圖二、擾動錐體與震波



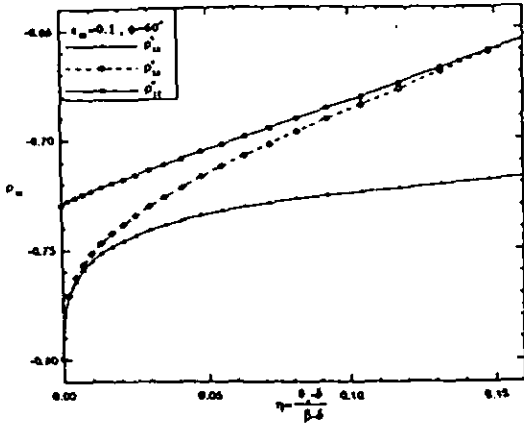
圖四、在震波層內第一階擾動熵的分布情形



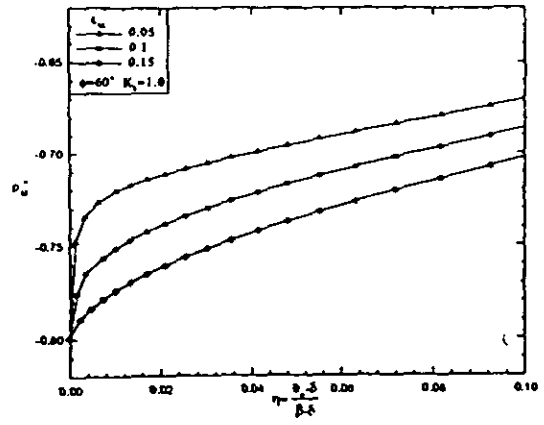
圖三、擾動流場之流線面



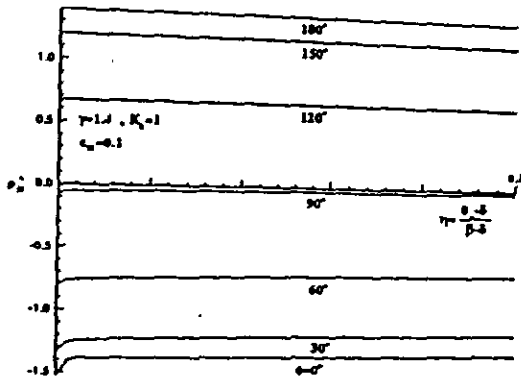
圖五、不同擾動參數 ϵ_m 下震波層中熵曲線的變化趨勢



圖六、密度變化曲線之漸進匹配的情形($\phi = 60^\circ$)



圖八、不同的擾動值影響擾動密度在漩渦層中變化的情形



圖七、震波層中擾動密度複合解之趨勢
($\epsilon_{mn} = 0.1, K_\beta = 1.0$)