

反平面角域波傳問題之理論解析與計算

Theoretical analysis and numerical calculation of anti-plane wave problems involving corners

計畫編號：NSC 88-2212-E-032-015

執行期限：87年11月1日至88年7月31日

主持人：應宜雄 淡江大學航空太空工程學系

一、中文摘要

本研究從有限域觀點出發，利用拉氏域疊加法與映射法，來處理反平面銳角角域之波傳問題。文中利用映射法對特殊夾角之角域問題獲得了暫態解析解，並實際以數值計算討論其暫態效應。對於非特殊夾角之角域問題，本研究利用拉氏域疊加法說明了銳角角域尖端繞射波之大小將趨近於零，故其解應為無窮多個反射波所構成。

關鍵詞：動力破壞、波動、角域

Abstract

In this study, a wedge with arbitrary apex angle φ subjected to a dynamic anti-plane point loading in the traction-free boundary is considered. The problem with special apex angles is solved by the method of image and the other by the superposition method. A half-plane fundamental solution is proposed and is used for solving the problem with general apex angle. The fundamental solution is superposed in the Laplace transform domain. The result indicates that the magnitude of the diffracted wave induced by the apex approaches to zero. The solution is constructed only by the reflected waves.

Keywords: dynamic fracture, wave motion, corner

二、背景與目的

角域的波傳問題存在於許多的實際應用中，如淺水海岸的偵測與地層探勘。當應力波遇到自由邊界時會產生反射波，遇到角域尖端則會產生繞射波，由於應力波

在角域內會不斷地產生反射與繞射現象，造成域內會有無窮多個波，所以造成了解析上的困難。而實際應用時，若能瞭解更多波的行為效應，將會使應用的範圍更廣以及應用結果更準確。

Love(1944)在處理圓形桿一端受均勻動力載荷時，企圖藉助 Pochhammer 頻率方程以傳統直接分離的技巧，來處理圓柱面一端表面曳引力為零的問題，結果並不能順利得到解答。近年來，Lee and Freund(1990) 針對 Kalthoff and Winkler(1987)與 Kalthoff(1985)在動力破壞研究中的試片做分析，其中亦包含兩個角域問題，只是他採用的分析方式是 Wright(1965)所提出的混合邊界問題之一。其他，在反平面楔形體問題上，Achenbach(1970)利用 Chaplygin 轉換方法將波動方程式變換為拉普拉斯方程式後，以保角映射法(conformal mapping)處理了邊界上具有均勻載荷的問題。

蔡傳暉(1991)與 Ma and Ing(1995,1996)利用所發展的拉普拉氏域疊加法成功的克服了傳統無法解析特徵長度的困難，使彈性波與邊界或裂紋的反射與繞射效應得以獲得完整的解析。故本研究擴展此疊加法於解析角域的問題上，利用拉普拉氏域疊加法與座標轉換關係式來處理角域邊界的無窮反射與角域尖端的繞射問題。

三、反平面半平面基本解

等向均質線彈性體的二維反平面波動方程式於靜止 (x, y) 座標中可寫成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中 w 為 z 方向的位移， b 為剪力波(shear

wave)的慢度(slowness), 且

$$b = \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

v 是剪力波波速(shear wave speed), μ 和 ρ 分別為材料的剪力係數(shear modulus)與密度(density)。其應力位移關係式為

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2)$$

考慮一半無窮彈性體, x 軸位於自由邊界上, 其邊界 $x > 0$ 上受一指數分佈的曳引力, 邊界條件描述如下

$$\bar{w}_{yz}(x, 0, s) = e^{\eta x} H(x), \quad (3)$$

其中 s 為拉氏轉換域參數, 而 η 為一常數。其函數間相對之拉氏轉換關係如下

$$\bar{f}(x, y, s) = \int_0^\infty f(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (4)$$

$$\bar{f}'(\lambda, y, s) = \int_{-\infty}^\infty \bar{f}(x, y, s) e^{-s\lambda x} dx. \quad (5)$$

在 $\text{Re}(\lambda) > \text{Re}(\eta)$ 的限制下可解得拉氏域中的應力與位移場如下

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{e^{-s\alpha|y|+s\lambda x}}{(\eta - \lambda)} d\lambda, \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\text{sign}(y)\lambda e^{-s\alpha|y|+s\lambda x}}{(\eta - \lambda)\alpha(\lambda)} d\lambda, \quad (7)$$

$$\bar{w}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\text{sign}(y)e^{-s\alpha|y|+s\lambda x}}{\mu s(\eta - \lambda)\alpha(\lambda)} d\lambda, \quad (8)$$

其中

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y > 0, \\ -1 & \text{if } y < 0, \end{cases}$$

$$\alpha(\lambda) = (b^2 - \lambda^2)^{1/2}.$$

四、座標轉換關係式

考慮如圖 1 所示之角域問題, 兩座標系統 (x, y) 與 (x', y') 之夾角為 φ 。由幾何關係可知

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad (9)$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{x'z'} = \bar{\tau}_{xz} \cos \varphi + \bar{\tau}_{yz} \sin \varphi, \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_{y'z'} = -\bar{\tau}_{xz} \sin \varphi + \bar{\tau}_{yz} \cos \varphi. \quad (12)$$

若有一圓柱波在 (x, y) 座標中的拉氏域表示式為

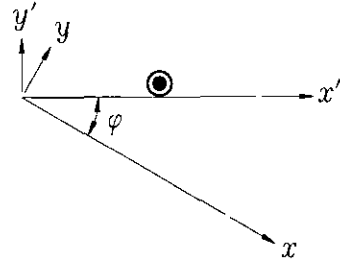


圖 1 夾角為 φ 之角域問題座標示意圖

$$\bar{\tau}_{yz}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int A(s, \lambda) e^{-s\beta y + s\lambda x} d\lambda, \quad (13)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x, y, s) = \frac{-1}{2\pi i} \int \frac{\lambda A(s, \lambda)}{\beta(\lambda)} e^{-s\beta y + s\lambda x} d\lambda, \quad (14)$$

利用(9)~(12)之關係式可將上兩式轉至 (x', y') 座標, 其中

$$\bar{\tau}_{y'z'}(x', y', s) = \frac{1}{2\pi i} \int A(s, \lambda) M(\lambda) \times e^{-sT(\lambda)|y'| + sN(\lambda)x'} d\lambda, \quad (15)$$

且

$$M(\lambda) = \cos \varphi + \frac{\lambda}{\beta(\lambda)} \sin \varphi, \quad (16)$$

$$T(\lambda) = \beta \cos \varphi + \lambda \sin \varphi, \quad (17)$$

$$N(\lambda) = -\beta \sin \varphi + \lambda \cos \varphi. \quad (18)$$

由(16)~(18)三式可得到以下關係

$$Md\lambda = dN,$$

$$T = \sqrt{b^2 - N^2},$$

$$\lambda = N \cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{b^2 - N^2}.$$

且當 $y' > 0$ 時, λ 取“+”; 當 $y' < 0$ 時, λ 取“-”。故(15)式可寫成

$$\bar{\tau}_{y'z'}(x', y', s) = \frac{1}{2\pi i} \int A(s, \xi) \times e^{-s\beta|y'| + s\lambda x'} d\lambda, \quad (19)$$

其中

$$\xi = \lambda \cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{b^2 - \lambda^2}.$$

同理, 可得

$$\bar{\tau}_{x'z'}(x', y', s) = \frac{-1}{2\pi i} \int \frac{\lambda A(s, \xi)}{\beta(\lambda)} \times e^{-s\beta|y'| + s\lambda x'} d\lambda. \quad (20)$$

總結可知, 若將(13)式與(14)式的 (x, y) 座標下之應力逆時針轉 φ 角至

(x', y') 座標時，則在 (x', y') 座標下之應力將可表示成(19)與(20)兩式。

五、映射法和特殊角

映射法(Imagined Method)可說是無限域的疊加法。若一反平面動力點載荷施於如圖 1 之楔形體自由邊界上，當楔形體為特殊角($\varphi = 180^\circ/m$, where m is an integer)時，可利用邊界需滿足無曳引力的條件，直接以映射法解出其動力解。

考慮自由邊界夾角 $\varphi = 60^\circ$ ($m=3$) 時的情況，一反平面動力點載荷施於自由邊界上，其邊界條件可描述成

$$\tau'_{yz}(x', 0, t) = p\delta(x' - l)H(t). \quad (21)$$

其入射波時域解為

$$\tau'_{yz}(x', y', t) = \frac{pt \sin \theta_0 H(t - br_0)}{\pi r_0 (t^2 - b^2 r_0^2)^{1/2}}, \quad (22)$$

其中

$$r_0 = [(x' - l)^2 + y'^2]^{1/2}, \quad \theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{x' - l}{r_0} \right).$$

觀察圖 2 可知，由三個點波源即可使兩邊的邊界滿足，而解得全場解為

$$\tau'_{yz}(x', y', t) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \frac{pt \sin \theta_n H(t - br_n)}{\pi r_n (t^2 - b^2 r_n^2)^{1/2}}, \quad (23)$$

其中

$$r_1 = \left\{ [x' - l \cos(-\frac{2\pi}{3})]^2 + [y' - l \sin(-\frac{2\pi}{3})]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{x' - l \cos(-2\pi/3)}{r_1},$$

$$r_2 = \left\{ [x' - l \cos(\frac{2\pi}{3})]^2 + [y' - l \sin(\frac{2\pi}{3})]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{x' - l \cos(2\pi/3)}{r_2}.$$

此問題之相對靜態解為

$$\tau'_{yz}(x', y', t) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \frac{p \sin \theta_n}{\pi r_n}. \quad (24)$$

對任意特殊角 $\varphi = 180^\circ/m$ ，

其通解為

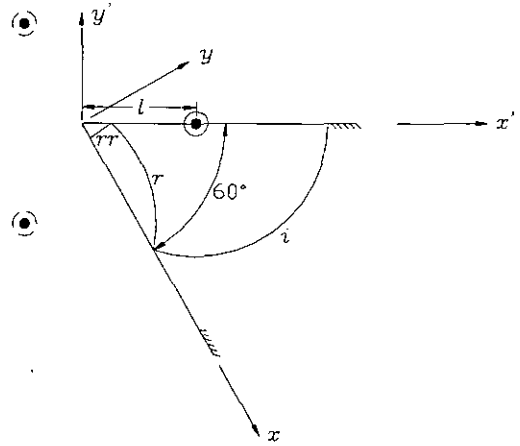


圖 2 夾角 60° 之楔形體暫態波前圖

$$\tau'_{yz}(x', y', t) = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{pt \sin \theta_n H(t - br_n)}{\pi r_n (t^2 - b^2 r_n^2)^{1/2}}, \quad (25)$$

其中

$$r_n = \left\{ [x' - l \cos(\xi)]^2 + [y' - l \sin(\xi)]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\theta_n = \cos^{-1} \frac{x' - l \cos(\xi)}{r_n}.$$

$$\xi = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2k\pi}{m}$$

在不同的觀察點下的數值計算結果如圖 3 所示，由圖中可看出入射波(i)、一次反射波(r)、二次反射波(rr)通過各觀察點的時間及其相對應的應力值大小，另外，由圖中可知，在入射波與兩次反射波通過之後，應力值即逐漸逼近靜態解。

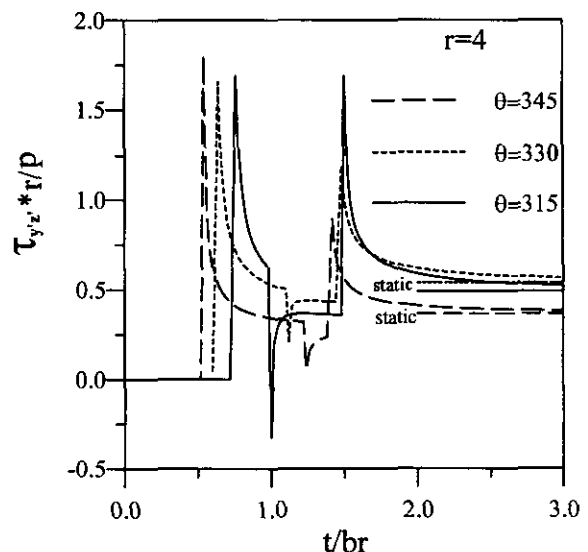


圖 3 不同觀察點應力隨時間變化情形

六、非特殊角問題研究

為研究楔形體夾角為非特殊角的情況，本文以拉氏域半平面基本解來做疊加。將(21)式所產生的入射波表示在拉氏域中可得

$$\bar{\tau}_{y'z'}^i(x', y', s) = \frac{1}{2\pi i} \int p e^{s\alpha y' + s\lambda(x'-h)} d\lambda. \quad (26)$$

將上式轉到 (x, y) 座標，可得

$$\bar{\tau}_{yz}^i(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int p e^{-s\alpha h} e^{s\alpha y + s\lambda x} d\lambda, \quad (27)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^i(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int p \frac{\lambda}{\alpha(\lambda)} e^{-s\alpha h} e^{s\alpha y + s\lambda x} d\lambda. \quad (28)$$

在 $y=0$ 處，為滿足邊界無曳引力，利用第三節的基本解做疊加可得轉換域中的繞射波 d_1 與反射波 r 如下

$$\bar{\tau}_{yz}^{d_1+r} = \iint \frac{p e^{-s\zeta_1 h}}{\eta_1 - \eta_2} e^{-s\alpha y + s\eta_2 x} d\eta_2 d\eta_1, \quad (29)$$

其中

$$\zeta_n = \eta_n \cos \varphi + \alpha(\eta_n) \sin \varphi.$$

逆轉換可得

$$\tau_{yz}^{d_1} = \frac{-p}{2\pi^2} \int_{bh}^{t-br} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\eta_1^+ - \eta_2^+} \frac{\partial \eta_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial t_2} - \frac{1}{\eta_1^- - \eta_2^+} \frac{\partial \eta_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial \eta_2^+}{\partial t_2} \right] dt_1, \quad (30)$$

$$\tau_{yz}^r = \frac{-pt \sin \theta_r}{\pi r_r (t^2 - b^2 r_r^2)^{1/2}} H(t - br_r), \quad (31)$$

其中

$$\eta_1^\pm = \frac{t_1 \cos \varphi}{h} \pm \frac{\sin \varphi}{h} \sqrt{t_1^2 - b^2 h^2},$$

$$\eta_2^\pm = \frac{-t_2 \cos \theta}{r} \pm \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{t_2^2 - b^2 r^2},$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{x}{r} \right),$$

$$r_r = [(x - h \cos \varphi)^2 + (y + h \sin \varphi)^2]^{1/2},$$

$$\theta_r = \cos^{-1} \left(\frac{x - h \cos \varphi}{r_r} \right).$$

以相同方法亦可得到 $\tau_{xz}^{d_1}$ 與 τ_{xz}^r ，此不贅述。將(29)式轉回到原來的 (x', y') 座標，於 $y'=0$ 處利用基本解進行疊加，可得到

$$\bar{\tau}_{y'z'}^{d_2+r} = \iiint \frac{p e^{-s\zeta_1 h} e^{s\alpha y' + s\eta_3 x'}}{(\eta_1 - \zeta_2)(\eta_2 - \eta_3)} d\eta_3 d\eta_2 d\eta_1. \quad (32)$$

上式三重積分為 $\bar{\tau}_{y'z'}^{d_2}$ ，由逆轉換結果得知其值趨近於零，且 pole $\eta_2 = \eta_3$ 之貢獻包括兩項，其中一項為二次反射波 $\bar{\tau}_{y'z'}^{rr}$ ，另一項恰好等於 $\bar{\tau}_{y'z'}^{d_1}$ 的負值，也就是會將第一次疊加所得到的繞射波抵消掉，亦即所產生的繞射波總和其值趨近於零，若繼續疊加下去其結果亦同。

由於在此所考慮的是一銳角角域問題，當入射波產生後，要行進到角域尖端，理論上是必須經過無窮多次反射後才會到達，所以每經過一次反射後，其能量就依次遞減，而且，當越接近尖端附近時，其反射波的數目越多，故而使得理論上角域尖端的繞射波其值會趨近於零。數學上亦可知，當第一次疊加產生第一個由角域尖端所繞射的 $\tau_{yz}^{d_1}$ 波後，欲再滿足 $y'=0$ 處無曳引力且其波前必須與第一個繞射波 $\tau_{yz}^{d_1}$ 相同，其結果僅有等於 $\tau_{yz}^{d_1}$ 波負值的波才可能存在，而上述疊加之結果正與此相同。

故此非特殊角之銳角角域反平面問題，其解與特殊角相同，為諸多反射波疊加後的結果，只是特殊角所需疊加的反射波數目為有限個，而非特殊角則為無窮多個。

七、參考文獻

- [1] Achenbach J. D. (1970). "Shear waves in an elastic wedge", *Int. J. Solids and Structures*, 6, 379
- [2] Kalthoff J. K. (1985). "Shadow optical analysis of dynamic shear fracture", *International Conference on Photomechanics and Speckel Metrology, SPIE*, 814, 531.
- [3] Kalthoff J. K. and Winkler S. (1987). "Failure mode transition at high rates of shear loading", *Impact '87 (International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials)*, May, Bremen, West Germany.
- [4] Lee Y. J. and Freund L. B. (1990). "Fracture initiation due to asymmetric impact loading of an edge cracked plate", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 57, 104.
- [5] Love A. E. H. (1944). "Mathematical theory of elasticity", 4th edition, Dover Publications, Inc., New York.
- [6] Ma C. C. and Ing Y. S. (1995). "Transient Analysis of Dynamic Crack Propagation with Boundary Effect", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 62, 1029.
- [7] Ma C. C. and Ing Y. S. (1996). "Transient Wave Analysis of an Antiplane Crack Interaction with Half-Plane Boundary", *International Journal of Engineering Science*, 34, 1507.
- [8] 蔡傳輝(1991). "彈性波基本解與動力破壞之理論解析", 國立台灣大學機械工程研究所博士論文。