

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫  成果報告  
期中進度報告

3-3 史都華—高夫平台之正向奇異位置分析

計畫類別： 個別型計畫          整合型計畫

計畫編號：NSC 91 - 2212 - E - 032 - 003 -

執行期間： 91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：劉昭華

共同主持人：

計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告          完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、  
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

## 中文摘要：

本研究針對 3-3 史都華-高夫平台(3-3 Stewart-Gough Platform)進行探討，期望找出所有正向位置分析時的奇異位置(Direct Kinematic Singularities)。首先利用幾何的關係將原本具有六根驅動桿的 3-3 史都華-高夫平台轉換為等效之 6 自由度並聯式平台，稱之為非對稱之 3RPS 並聯式機械手臂。

若以此等效機械手臂之活動平台上的三個球窩接頭與基座之間的垂直距離  $L_{1N}$ 、 $L_{2N}$ 、 $L_{3N}$  為座標，則在  $L_{1N}-L_{2N}-L_{3N}$  座標系中，活動平台的工作空間會因為滑塊位置的不同，可以表示成不同半徑之圓柱狀範圍。此範圍內任一點在其所在圓截面上的位置，表示活動平台的方向；而此點與座標原點的距離則代表平台的高度。

本研究所用之求解方法分為兩步驟，先假設三個滑塊的位置以及活動平台的方向，利用 3RPS 並聯式機械手臂運動限制條件的關係可以推導出活動平台的水平位置；接著針對此並聯式機械手臂以幾何方式推導出一個  $3 \times 3$  的 Jacobian 矩陣，再尋找出使此矩陣行列式值為零的活動平台高度，解出其正向奇異位置。

本研究發現在圓柱狀工作空間截面上任意一點，至少出現一組的實根，因此 3-3 史都華-高夫平台有無限多正向奇異位置。本研究亦發現在圓柱狀工作空間的邊緣，正向奇異位置的活動平台高度可能不受限制(unbounded)。

關鍵字：3-3 史都華-高夫平台；正向奇異位置

## 英文摘要(Abstract)：

In this study, all direct kinematic singularities of a 3-3 Stewart-Gough platform are determined. Analyses are performed on a kinematically mechanism- the asymmetric 3RPS parallel manipulator. The Jacobian matrix of this equivalent mechanism has the size  $3 \times 3$ . It is shown in this study that the workspace of the moving platform on an asymmetric 3RPS parallel manipulator may be represented as a circular cylinder, the radius of which is determined by locations of the 3 revolute joints on the fixed base.

If locations of the 3 revolute joints, as well as moving platform's orientation are arbitrarily assumed, then the horizontal position of the moving platform can be determined from motion constraints, and the determinant of the  $3 \times 3$  Jacobian matrix can be expressed as a cubic polynomial of the height of the moving platform. The direct singular position can be located by solving the cubic polynomial equation. It is found in this study that there always exists a real root for any point on a cross-section of the circular cylinder, implying that there are infinitely many direct singular positions for a 3-3 Stewart-Gough platform. Also, on the boundary of the cylindrical work-space, moving platform's heights at the direct singular position may be unbounded.

Keyword：3-3 Stewart-Gough platform；Direct kinematic singularities

## 前言：

3-3 史都華平台並不具有逆向奇異位置[1][2]，其合併奇異位置亦可歸入正向奇異位置考慮。而關於正向奇異位置的尋找，首先 Hunt [3]發現當活動平台與四個肢幹共面時，此時活動平台將增加一自由度，會繞著六個肢幹的共同交線而旋轉。Fichter [4]發現當活動平台與基座平行，而且繞著 Z 軸旋轉正負 90 度之後，亦是奇異位置。Merlet [5]說明奇異位置可

用格拉斯曼幾何 (Grassmann Geometry) 的方法尋找，並且用此方法找出 Hunt 及 Fichter 的奇異位置，也找出數個新的奇異位置。St-Onge 及 Gosselin [6] 推導出所有六自由度並聯式手臂正向奇異位置的通式，該方程式為座標 xyz 的四次方程式，共有 32 項，每項的係數又再包括 6 至 15 項常數，共有 617 個係數。Kim etc.[2] 將此方程式簡化成 xyz 的三次方程式，共有 20 項。

由以上的說明可知至今尚無有效的方法找出所有史都華平台的正向奇異位置，Merlet[7] 提出 semi-Jacobian method 來尋找工作空間內部的正向奇異位置，此方法需利用格拉斯曼幾何、薄拉格向量 (Plucker vectors) 及螺旋理論 (screw theory)，但在數值運算時需不斷將位置代入，因此仍不能保證找出所有正向奇異位置。

鄭勝嘉[8] 在分析 3RPS 三自由度平台時，發現活動平台所有位置皆可限制在一個圓柱狀範圍之內，而圓柱內任一點在其所在截面的座標即代表活動平台的方向，且此點與圓心的距離，會跟活動平台高度成正比。若當此座標位於圓柱狀範圍內的不同位置時，會造成由 Jacobian 矩陣行列式值為零所得之三次方程式僅會有兩個根或是只有一個實根的情況。

本研究的構想是將 3-3 史都華-高夫平台轉換為等效之非對稱 3RPS 並聯式機械手臂，並假設此機構滑塊的位置以及活動平台的方向，由運動限制條件推導出活動平台的水平位置，再以幾何方式求出平台之 Jacobian 矩陣，並找出使矩陣行列式值為零的活動平台高度，即可得到此平台所有的正向奇異位置。

### 等效平台：

由於「正向運動奇異位置」的物理意義是當驅動器靜止時，活動平台在此位置卻仍然能夠作微量的運動。若圖一所示之 3-3 史都華-高夫平台其 6 個肢幹都是靜止時，則肢幹所構成交圓半徑、及交圓圓心 ( $i=1,2,3$ ) 亦是固定，這表示圖二所顯示的非對稱 3RPS 並聯式工作平台亦是靜止。而且當機構在靜止狀態時，3-3 史都華-高夫平台的桿件所加的運動限制(kinematic constraints)，與非對稱之 3RPS 並聯式工作平台在靜止時，對此平台所加的運動限制條件相同[9]。亦即在靜止的狀態下，這兩個機構對其活動平台所加的限制條件相同。因此，若是 3-3 史都華-高夫平台在驅動器靜止時仍能微量運動，那麼非對稱之 3RPS 並聯式工作平台在這位置亦可微量運動，所以兩組機構應該具有相同正向奇異位置。而非對稱之 3RPS 並聯式工作平台與原平台不同在其只有三根肢幹，肢幹本身以球窩接頭與活動平台連接，另一端則是由旋轉接頭以及滑件接頭與基座連接，肢幹是用兩根連桿經由稜柱接頭串接而成。並且由於非對稱 3RPS 並聯式工作平台之 Jacobian 矩陣為  $3 \times 3$  矩陣，而 3-3 史都華-高夫平台之 Jacobian 矩陣為  $6 \times 6$  矩陣，本研究因此將針對非對稱之 3RPS 並聯式工作平台，找出此平台之正向奇異位置，但所得結果仍應帶回 3-3 史都華-高夫平台驗證，此等效平台之 Jacobian 矩陣為[9]

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ 0 & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

如果將桿長  $L_i$  ( $i=1,2,3$ ) 分解成兩部分，平行於基座部分以  $L_{iP}$  表示，垂直於基座部分以  $L_{iN}$  表示，因此  $[J]$  矩陣內之各項值可以簡化為

$$J_{11} = (-\sqrt{3} \times C_{1x} + \sqrt{3} \times C_{2x} - C_{1y} + C_{2y})L_{1N} - L_{1N}L_{2P} - 2L_{1P}L_{2N} \quad (2a)$$

$$J_{22} = (\sqrt{3} \times C_{2x} - \sqrt{3} \times C_{3x} - C_{2y} + C_{3y})L_{2N} - L_{2N}L_{3P} - 2L_{2P}L_{3N} \quad (2b)$$

$$J_{33} = (2 \times C_{3y} - 2 \times C_{1y})L_{3N} - L_{3N}L_{1P} - 2L_{3P}L_{1N} \quad (2c)$$

$$J_{12} = (-\sqrt{3} \times C_{1x} + \sqrt{3} \times C_{2x} + C_{1y} - C_{2y})L_{2N} - L_{2N}L_{1P} - 2L_{2P}L_{1N} \quad (2d)$$

$$J_{23} = (-2 \times C_{2y} + 2 \times C_{3y})L_{3N} - L_{3N}L_{2P} - 2L_{3P}L_{2N} \quad (2e)$$

$$J_{31} = (\sqrt{3} \times C_{3x} - \sqrt{3} \times C_{1x} + C_{3y} - C_{1y})L_{1N} - L_{1N}L_{3P} - 2L_{1P}L_{3N} \quad (2f)$$

而本研究所要探討的正向奇異位置，其目標就是要找出 $[J]$ 矩陣行列式值為零的所有情況，並且代入 3-3 史都華-高夫平台之  $6 \times 6$  Jacobian 矩陣，以驗證結果。

### 數值結果：

本研究發現 3-3 史都華-高夫平台有無限多個正向奇異位置[9]，當  $W = 0.75$ 、 $(C_{1X}, C_{1Y}) = (0.2165, 0.625)$ 、 $(C_{2X}, C_{2Y}) = (-0.6495, -0.125)$ 、 $(C_{3X}, C_{3Y}) = (0, -0.5)$ 、 $(H_1, H_2, H_3) = (-0.118, 0.236, -0.118)$ 、 $(\phi, \theta, \psi) = (3.37, -0.32, -2.62)$ 、 $L_{ave} = 0.1939$  時的正向奇異位置。其他正向奇異位置，以及奇異位置的分佈，請參見[9]。

### 結論：

本研究先將 3-3 史都華-高夫並聯式平台經由幾何方法轉換成一等效平台，稱為非對稱之 3RPS 並聯式工作平台，再以幾何方式推導出此平台正向分析時的  $3 \times 3$  Jacobian 矩陣，並且得知此機構活動平台所有位置皆限制在  $(L_{1N}, L_{2N}, L_{3N})$  座標系中一圓柱狀的區間內。此圓柱區間範圍內任意一點的位置可分解成為兩部分，此點在其所在橫截面上的座標為  $(H_1, H_2, H_3)$ ，表示此活動平台的方向，而此點與座標原點的距離則表示活動平台的高度。

因此本研究在尋找正向奇異位置時分成兩個步驟，首先在滑塊的作動空間內假定三個滑塊的位置，接著由三個滑塊的位置可得上述活動平台的圓柱狀作動範圍，在此圓柱狀範圍內假定活動平台的高度差  $H_1$ 、 $H_2$  及  $H_3$ ，利用運動限制條件推導出三個球窩接頭的水平位置，帶入 Jacobian 矩陣並強迫其行列式值為零，可得到一條活動平台高度  $L_{ave}$  的三次方程式，求解出此方程式的實根即代表活動平台在正向奇異位置時的高度。

由計算出的數值顯示當在  $0 < H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 < \frac{3W^2}{2} - \frac{K^2}{2}$  時，三次方程式至少解出一組實根；而在  $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \frac{3W^2}{2} - \frac{K^2}{2}$  時，方程式會因為三次項的係數為零而成為一條二次方程式，因此只能求出兩組實根；而當在  $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \frac{3W^2}{2}$  時，機構之正向奇異位置會產生活動平台與基座互相垂直之狀況。

本研究亦繪出奇異位置時平台高度  $L_{ave}$  的分佈圖，如果史都華-高夫平台的伸長量為對稱，亦即可用對稱 3RPS 機械手臂模擬時，則在圓柱狀工作空間區域內部，所有  $L_{ave}$  值皆受限制(bounded)，而在圓柱邊緣時，在  $\alpha = 30^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $150^\circ$ 、 $210^\circ$ 、 $270^\circ$  及  $330^\circ$  附近，正向

奇異位置的平台高度  $L_{ave}$  會不受限制( unbounded )。在一般非對稱 3RPS 的情況下，亦是在圓柱狀工作空間邊緣時，奇異位置的平台高度  $L_{ave}$  不受限制。

#### 計畫成果自我評估：

- 1.研究成果完全依照申請內容。
- 2.找出 3-3 史都華-高夫平台的奇異位置，已全部達成預期目標。
- 3.研究成果包含奇異位置分布，可用在史都華平台之設計。
- 4.本研究完成一篇碩士論文，且研究成果適合在國際著名期刊發表。

#### 參考文獻：

- [1] Tsai, L. W., Robot Analysis-The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, Johy Wiley and Sons, NY, 1999.
- [2] Kim, D., Chung, W., and Youm, Y., “Analytic Singularity Expression for 6-DOF Stewart Platform-Type Parallel Manipulator,” Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, 1998.
- [3] Hunt, K. H., Kinematic Geometry of Mechanisms, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1978.
- [4] Fichter, E. F., “A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction,” Int. J. of Robotics Research, Vol. 5, No. 2, pp.157-182, 1986.
- [5] Merlet, J. P., “Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry,” Int. J. of Robotics Research, Vol. 8, NO. 5, pp. 45-56, 1989.
- [6] St-Onge, B. M., and Gosselin, C. M., “Singularity Analysis and Representation of Spatial Six-DOF Parallel Manipulators,” Recent Advances in Robot Kinematics, Kluwer Academic Publishers, pp. 389-398, the Netherlands, 1996.
- [7] Merlet, J. P., Parallel Robots, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 2000.
- [8] 鄭勝嘉, “三軸 RPS 並聯式機械手臂正向奇異位置”, 淡江大學機械工程學系碩士論文, 2002。
- [9] 邱建源, “3-3 史都華-高夫平台之正向奇異位置分析”, 淡江大學機械與機電工程學系碩士論文, 2003。

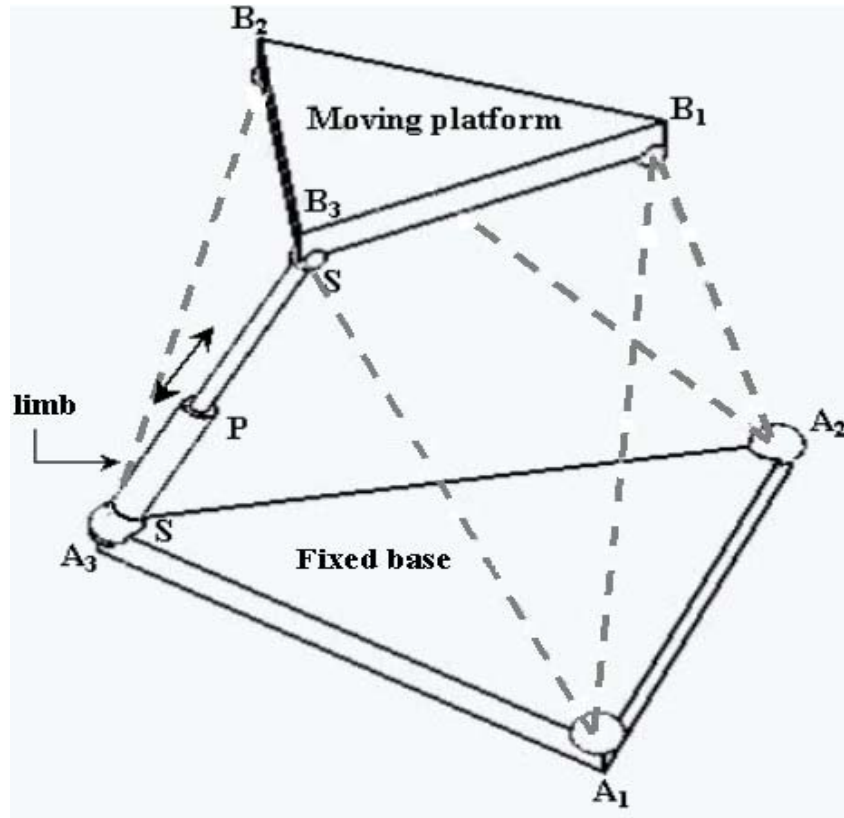


Figure 1 3-3 Stewart-Gough platform.

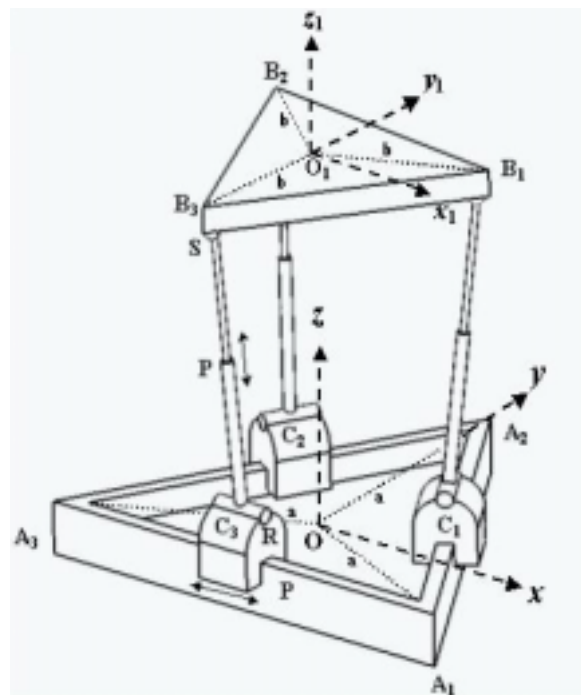
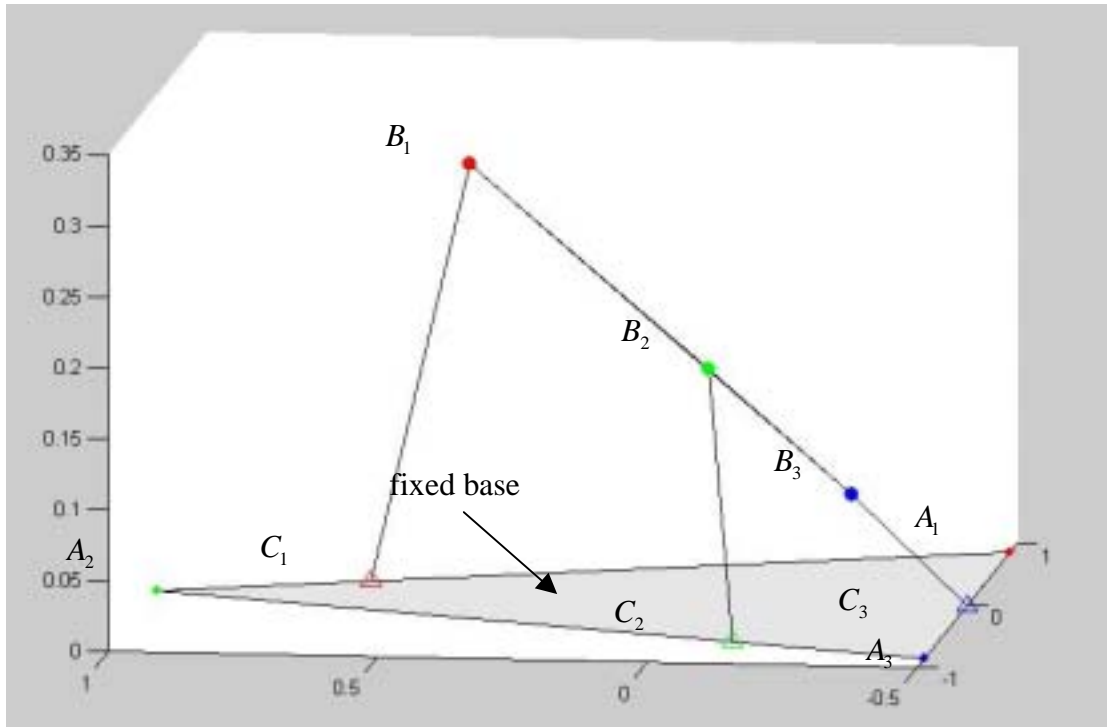
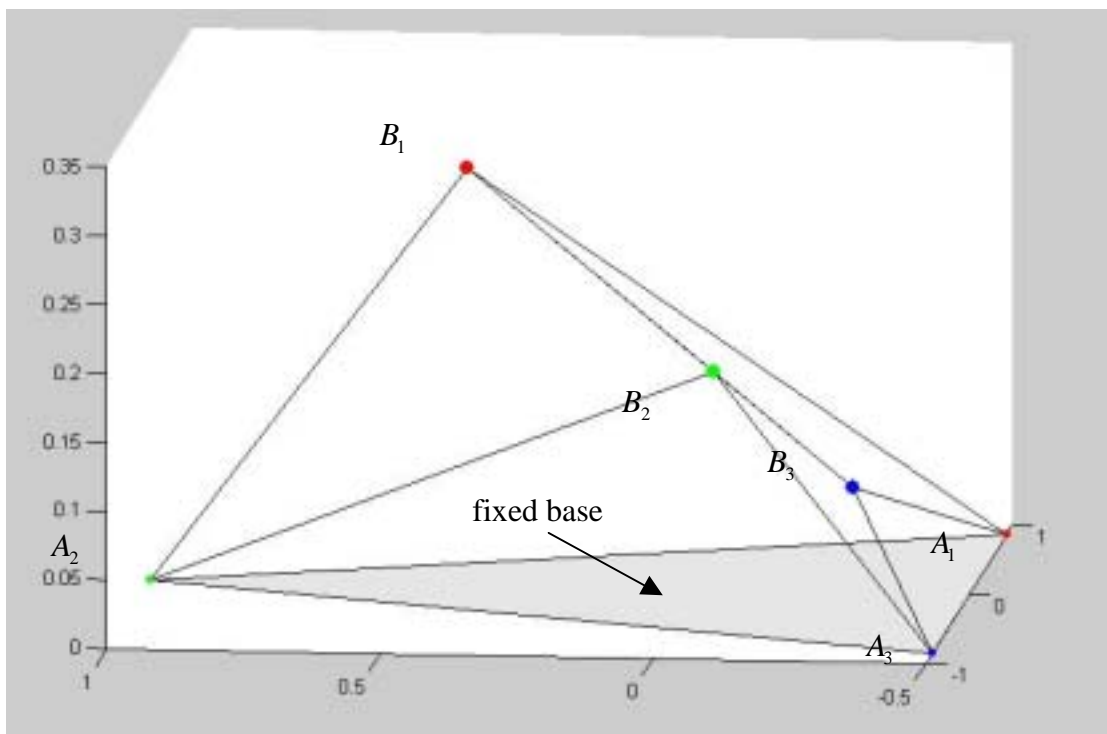


Figure 2 Asymmetric 3RPS parallel manipulator.



(a)



(b)

**Figure 3** Direct singular configuration for the case  $W = 0.75$ 、 $L_{ave} = 0.1939$ 、 $(C_{1X}, C_{1Y}) = (0.2165, 0.625)$ 、 $(C_{2X}, C_{2Y}) = (-0.6495, -0.125)$ 、 $(C_{3X}, C_{3Y}) = (0, -0.5)$ 、 $(H_1, H_2, H_3) = (-0.118, 0.236, -0.118)$ 、  
 (a) asymmetric 3RPS platform (b) 3-3 Stewart-Gough platform.