

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

拋光自動化中之接觸力分析及量測

Contact Force Analysis and Measurement in

Automatic Polishing

計畫類別：整合型計畫

計畫編號 **NSC 88-2212-E-032-012**

執行時間：87年08月01日至88年07月31日

計畫主持人：劉昭華

處理方式：可立即對外提供參考

執行單位：淡江大學機械工程學系

中華民國 88 年 10 月 31 日

中文摘要：

本文係利用有限元素法中的多節點約束條件，模擬接觸區域內的位移與應力情況，以分析自動化磨拋加工中夾持具的接觸問題。作者討論三種情況下的接觸，亦即：1. 接觸而沒有滑動，2. 接觸且有摩擦滑動，3. 接觸沒有摩擦而有滑動。

作者依上述三種不同的情況，推導出所應該加入位移與應力的多點限制條件，再利用拉格郎齊乘數(Lagrange Multiplier)，使多點限制條件與有限元素的平衡方程式 $[K]\{D\}=\{F\}$ 相結合，並且針對以下三種情形，說明限制條件加入的方式，包含：1. 接觸點的正向或切線位移量相等 ($u_1=u_2, v_1=v_2$)，2. 接觸點的正向應力相等 (等 $\sigma_{yy}=\sigma_{yy}$)，3. 接觸點上的剪應力與正向應力須滿足庫倫摩擦定律 (律 $\tau_{xy}=\mu\sigma_{yy}$)。

作者所發展出的程式，係利用八節點元素，並以 3×3 高斯積分從事計算，元素節點上的應力，係將高斯點應力外插求得。本論文以兩圓柱的接觸為例，探討這種方法是否適用，結果發現在無摩擦赫茲接觸時可得到滿意結果，而在有摩擦力存在時，分析結果與數值結果間有顯著差異。

Abstract :

Multiple point constraints are used to simulate displacements and stresses in the contact region of finite element analyses of holders and fixtures used in an automatic grinding or polishing system. Three contact cases are treated: 1. contact with no slip, 2. sliding contact with friction, and 3. sliding contact with no friction.

Displacements and stresses conditions for each case are converted into multiple point constraints. Lagrange Multiplier technique are used to impose multiple point constraints on equilibrium equations $[K]\{D\}=\{F\}$. How constraint conditions are imposed are illustrated by three cases : 1. normal and/or tangential displacements are equal ($u_1=u_2, v_1=v_2$), 2. normal stresses are equal ($\sigma_{1yy}=\sigma_{2yy}$), and 3. shear stresses and normal stresses are related by Coulomb's law of friction ($\tau_{xy}=\mu\sigma_{yy}$).

A finite element program using eight node quadrilateral elements and 3×3 Gaussian rule have been developed to verify results. Nodal stresses are obtained by extrapolation of stresses at Gaussian points. Two examples of two cylinders in contact are given. Results for Hertzian contact with no friction gives satisfactory results. But results for frictional contact between two dissimilar cylinders show obvious disagreements with analytical results.

第一章 緒論

1.1 研究背景及目的

許多的機構是由多個零件所組合而成，零件與零件的組合處可通稱為接頭(joints)，通常在接頭處會產生接觸，接觸問題通常可分為靜態接觸(static contact)及動態接觸(dynamic contact)，動態接觸又可在區分為滾動(rolling)與滑動(sliding)兩種情況，例如軸承是滾動，而滑塊是滑動，齒輪與凸輪的接觸則同時包含滾動及滑動。這些接觸情況的應力分析，是從事機械設計時必須步驟。

在各種力學分析及計算方法中，有限元素法已成為最有效的方法之一，但在研究滾動及滑動的接觸問題時，仍然需要艱深的理論基礎(如 1.2 節中所述)。本論文的目的是嘗試使用多點約束條件(multiple point constraints ; mpc)，以模擬接觸區域內的邊界條件，以解決二維彈性體的滑動接觸問題。

1.2 文獻回顧

在相關於接觸問題的論文中，國內曾有作者蔡哲雄、廖崇禮(1993)提出混合形有限元素法特別適用於接觸問題。國外有 Sano(1996)使用二次高階型函數(quadratic shape functions)解決三維曲線物體的接觸問題。Papadopoulos and Taylor (1993)利用接觸表面投影在平面上，再以數值分析解決三維接觸問題。Mechnik(1991)以增加限制條件求解，用以取代使用 Lagrange Multiplier 的方法(屬於混合型有限元素法)。Mottershead 等作者(1992)提出，在接觸區應增加網格(mesh)數目或給予 penalty function。Kishore 等作者(1994)說明接觸區，決定於運動的限制條件和庫倫摩擦定律。Stok and Hudoklin(1994)描述在處理計算摩擦接觸問題的互換性限制。

以上這些論文，多根據非線性變分原理(Nonlinear Variational Principles)推導而得，一般工程師不易瞭解。本文係期望發展出簡單的方法用以模擬接觸情況。

第二章 基礎理論

2.1 有限元素法

對二維及三維的彈性體而言，由於解析解通常不易求得，因此將連續彈性體分割成小區域，這種分割步驟稱為有限元素分割過程(discretization)或是理想化過程(idealization)，而每一個元素的平衡方程式係根據變分原理(variational principle)推導得到，這些方程式是針對參考位置點的力與位移量之間的關係，這些被選出來作為參考點的點稱為元素的節點(nodal points or nodes)。

有限元素法一般使用等參元素(isoparametric elements)，包括三節點元素、四節點元素、六節點三角形元素，八或九節點四邊形元素等等，本論文係使用八節點四邊形元素(如圖 1)。

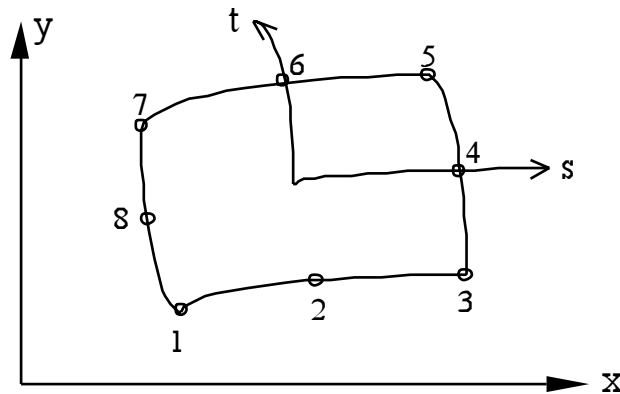


圖 1 直角座標系上的八節點元素

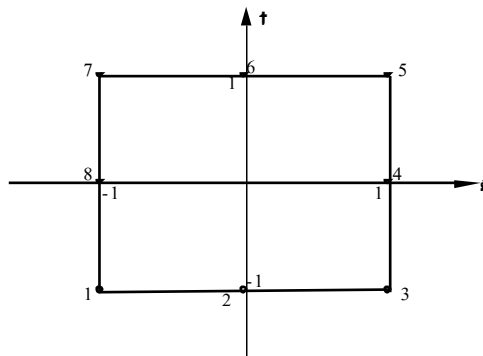


圖 2 $s-t$ 座標系上的八節點元素

有限元素法的相關方程式敘述如下：

1. 位移方程式(displacement equation)：

若以 \mathbf{u} 及 \mathbf{v} 表示元素某一點的位移， $\{\mathbf{d}\}$ 表示元素節點位移，那麼位移方程式可寫成(1)式。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ 2 \times 16 \\ 16 \times 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中 $[\mathbf{N}]$ 為形狀函數矩陣(shape function matrix)，其形式為

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (2)$$

而 $N_1 \sim N_8$ 為形狀函數。為了計算方便，通常所有的數值計算都在 $s-t$ 座標系(如圖 2)進行，在 $s-t$ 座標系之內，形狀函數定義如下：

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-s)(1-t)(1+s+t) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+s)(1-t)(1-s+t) \\ N_4 &= \frac{1}{2}(1+s)(1-t^2) \\ N_5 &= -\frac{1}{4}(1+s)(1+t)(1-s-t) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t) \\ N_7 &= -\frac{1}{4}(1-s)(1+t)(1+s-t) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1-s)(1-t^2) \end{aligned} \quad (3)$$

2. 位移與應變關係式(strain-displacement relations)：

根據位移與應變關係式 可知應變 $\{\varepsilon\}$ 為下式：

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4)$$

在 s - t 座標系中，(4)式中的偏微分計算由下式求出：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad (5)$$

定義 Jacobian matrix 為

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (6)$$

將(6)式代入(5)式，再將結果代入(4)式，可得(7)式

$$\{\varepsilon\} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$= [J^{-1}][L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

其中

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

將(1)式代入(7)式，可得

$$\{\varepsilon\} = [J^{-1}][L][N]\{d\} \quad (9)$$

定義

$$[B] = [J^{-1}][L][N] \quad (10)$$

3×16 3×3 3×2 2×16

最後可得到應變及節點位移關係式

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (11)$$

3. 應力與應變關係式(stresses and strains relationship)

本論文的討論範圍在結構體小變形情況的分析，至於大位移(large displacement)和大變形(large strain)的部分可以參考其他作者所提出的論文(如 Liu, etc., 1995)。

在二維彈性問題中，應力與應變的關係式如下：

$$\{\sigma\} = [\bar{E}]\{\varepsilon\} \quad (12)$$

假設平面應變(plane strain)情況，那麼

$$[\bar{E}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 E 為楊式係數， ν 為普松比，將(16)式代入(14)式，可得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} [B] \\ \{d\} \end{matrix} \quad (14)$$

3×3 3×16 16×1

(14)式所表示的應力與位移的關係式，將利用於推導應力及位移限制條件，以模擬二維接觸問題。

4. 平衡方程式：

結構物的全體或其中一部份，外力與內部力作用下必須處於平衡狀態下，對位移法的有限元素法而言，元素的平衡方程式為

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (15)$$

其中 $\{f\}$ 是元素所受到的節點力， $[k]$ 是元素勁度矩陣(element stiffness matrix)，是由下式求出

$$[k]_i = \int_{V_i} [B]^T [\bar{E}] [B] dV \quad (16)$$

其中 V_i 是元素 i 的體積，此勁度矩陣的計算是採用高斯積分法(Gaussian quadrature)，而且是在 s - t 座標系中進行，其公式如下：

$$[k]_i = \sum_{i=1}^n [B(s_i, t_i)]^T [\bar{E}] [B(s_i, t_i)] J(s_i, t_i) \quad (17)$$

其中 J 是由 x - y 座標系轉換至 s - t 座標系時的 Jacobian 矩陣， (s_i, t_i) 是在 s - t 座標系的高斯點(Gaussian points)，而 n 是高斯點的數目，8 節點的元素通常可使用 2×2 或 3×3 高斯積分，亦即 $n=4$ 或 $n=9$ 。

當每個元素勁度矩陣 $[k]$ 及節點力矩陣 $\{f\}$ 求出後，即可將其組合(assemble)成結構勁度矩陣(structural stiffness matrix)及結構節點力向量(structural nodal force vector)，並且寫出結構平衡方程式，如下

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (18)$$

其中 $[K]$ 為結構體的勁度矩陣(structural stiffness matrix)， $\{D\}$ 及 $\{F\}$ 分割為結構體的節點位移及節點力向量。

5. 相容性條件：亦即元素與元素間共同邊界上位移量必須吻合，在結構物邊界上的元素要滿足所給定的邊界條件。

在建立有限元素網格時，有以下這些建議規則，若遵守這些規則，比較容易得到理想結果。

1. 元素的形狀盡量一致。
2. 元素的長寬比盡量大於 1:10。
3. 元素相鄰邊的夾角盡量大於 15° 。
4. 元素的節點編號方向應一致(例如全部為逆時針方向)。

5. 節點編號安排時，應從物件幾何外型較窄處安排起。
6. 物件應力集中處，應安排較密的元素。
7. 相鄰元素的節點必須重合以符合相容性條件。

2.2 數值分析

本論文是利用 FORTRAN 77 語言，自行發展出能解決二維彈性體摩擦接觸的有限元素程式。

一般利用有限元素法分析結構物體時，首先將結構物體以適當的元素細分，接著計算元素勁度矩陣(element stiffness matrix)[k]及節點力向量(element load vector){ f }，接著組合所有的元素勁度矩陣而成結構體的勁度矩陣[K]，並組合全部元素節點力向量而成結構體的節點力向量{ F }，最後式求解平衡方程式 $[K]\{D\}=\{F\}$ 。

在求解(18)式的時候，一般常用的方法是高斯消去法(Gaussian elimination method)，根據組合(assembling)及消去(elimination)的先後次序，而有以下兩種不同技巧：

1. 帶狀矩陣法(banded matrix technique)：當結構物以有限元素法進行分析時，系統的勁度矩陣為對稱並且呈帶狀(banded shape)。帶狀矩陣法是先將元素勁度矩陣及元素節點力向量組合成系統勁度矩陣[K]及系統節點力向量{ F }，在利用高斯消去法求解，求解過程中利用了系統勁度矩陣為帶狀的特性。
2. 波前法(frontal technique)：波前法是在組合系統勁度矩陣[K]與節點力向量{ F }的同時，也在執行高斯消去，因此僅需儲存一部分[K]矩陣和{ F }向量，但缺點是計算過程須耗費部分時間搜尋儲存位置。

由於帶狀矩陣法的程式比較容易撰寫，本論文所發展出的程式目前是採用帶狀矩陣法，日後當後續研究陸續進展到一段落之後，可再改用波前法。

第三章 接觸問題研究

3.1 接觸問題探討

本節主要是探討接觸問題的應力及位移條件，以及如何將這些條件加在有限元素法分析過程中。

3.1.1 接觸情況

若兩個接觸的物體一個稱之為接觸體(contact body)，另一個為目標體(target body)，基本的接觸條件是在接觸區域內材料不能互相重疊(overlap)，於是接觸體在節點 k 接觸到目標體時(如圖 3)，會有接觸力產生，藉由疊代的方法可尋找出正確的接觸區域大小(Paul and Hashemi, 1981)，本論文假設接觸區域的範圍已知，僅針對接觸區域內的位移及應力條件，探討如何使有限元素分析結果滿足位移及應力條件。

有時兩接觸體間的接觸區域是為已知，例如鳩尾槽與鳩尾座，C 型夾，衝頭(punch)，軋軋機(rolling machine)，金屬板材壓摺機，及各式夾具等。圖 4 顯示這種情況下的接觸，若物體 1 為剛體，例如在衝頭的情況，那麼接觸區域的大小為已知，而如果兩物體皆為可變形體，那麼接觸區域的大小為已知(如圖 4)，但接觸區域形狀仍舊未知。

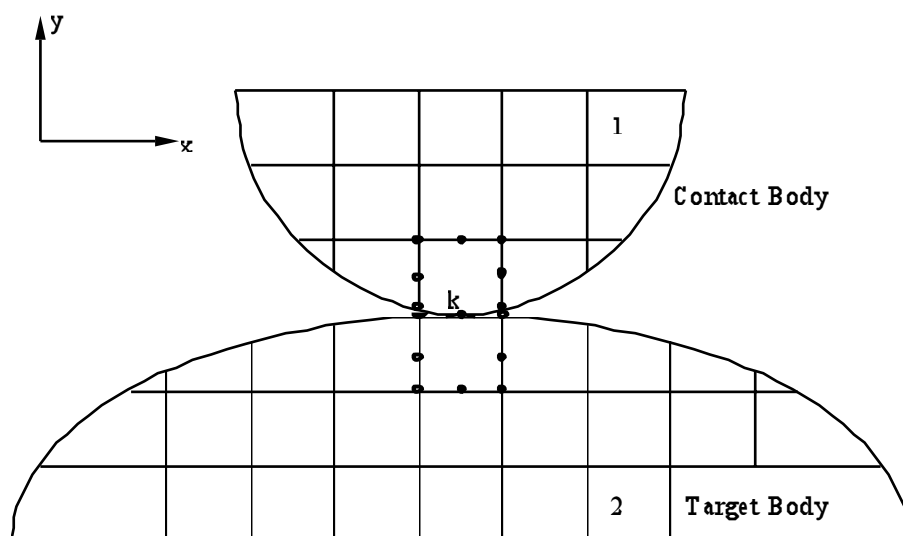


圖 3 兩彈性體的接觸問題

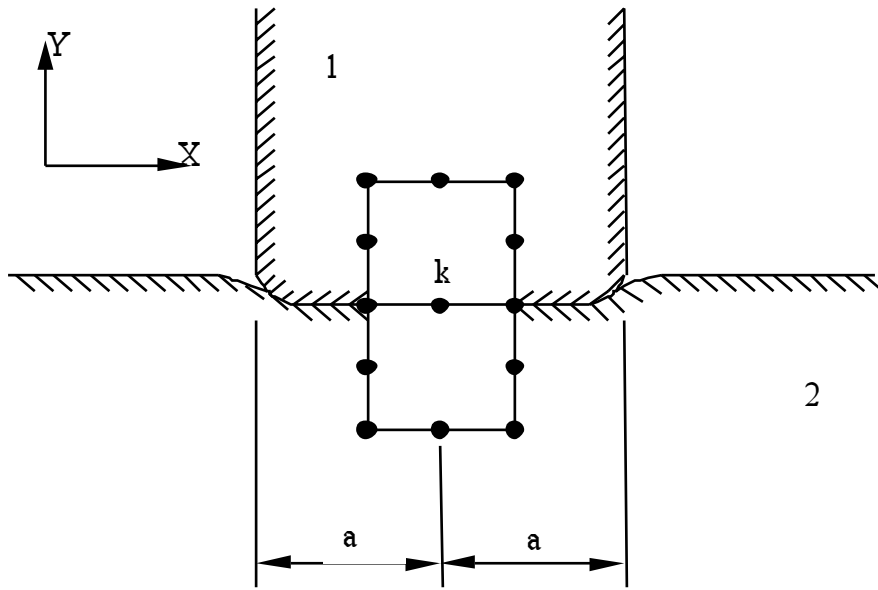


圖 4 接觸區大小與形狀已知的情形

3.1.2 接觸區域應力及位移條件

當兩個物體在某節點接觸時，應加入下列三個限制條件：

1. 兩物體在接觸點的正向位移(normal displacements)必須相同。
2. 滑動時的正向應力(normal stresses)必須相同。
3. 滑動時剪應力及正向應力須滿足庫倫摩擦定律。

在圖 4 中若節點 k 係在接觸區域之內， u 及 v 分別表示此點在 x 及 y 方向的位移，而 σ_{xx} ， σ_{yy} 及 τ_{xy} 分別表示該點的應力，那麼兩接觸體在節點 k 有以下三種可能的接觸情況：

情況 1---摩擦但沒有滑動：

這時的接觸條件為

$$u_1 = u_2 ; v_1 = v_2 ; \tau_{1xy} = \tau_{2xy} ; \sigma_{1yy} = \sigma_{2yy} \quad (19a \sim 19d)$$

其中下標 x 及 y 分別表示 x 及 y 方向的位移及應力，而下標 1 及 2 分別表示接觸體和目標體。

情況 2---摩擦且滑動

這時的接觸條件為

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ \tau_{1,xy} &= \mu\sigma_{1,yy} ; \tau_{2,xy} = \mu\sigma_{2,yy} ; \tau_{1,xy} = \tau_{2,xy} \end{aligned} \quad (20a \sim 20d)$$

其中 μ 是庫倫摩擦係數。

情況 3---滑動但無摩擦：

這時的接觸條件為

$$v_1 = v_2 ; \tau_{1,xy} = \tau_{2,xy} = 0 ; \sigma_{1,yy} = \sigma_{2,yy} \quad (21a \sim 21d)$$

以上這些情況都同時有位移及應力條件，其中位移條件可以利用有限元素套裝軟體中的「多點約束條件」(multiple point constraint)功能直接加諸其上。若使用傳統的位移有限元素法(displacement finite element method)，約束條件僅能加在節點位移之上，因此應力條件不易滿足。本論文的目的即是將這些應力條件轉換成位移限制條件，如此即可處理接觸問題。

由前章的有限元素推導可知，若強迫(14)式中的剪應力 τ_{xy} 及正向應力 σ_{yy} 滿足下式：

$$\tau_{xy} = \mu\sigma_{yy} \quad (22)$$

則可將(14)式的應力條件轉換成節點位移 $\{d\}$ 的限制條件。因此(19c)及(20d)式的應力條件就可用這種方式轉換成節點位移的限制條件。

至於(21b)及(21c)式，可讓(14)式中的 $\tau_{xy} = 0$ ，即可轉變成位移的限制條件。而(19d)及(21d)式，則可強迫兩接觸體的節點應力 σ_{yy} 相等，因為可利用(14)式將 σ_{yy} 變成節點位移，則(20b)及(20c)式亦可表示成位移的限制條件。因此，全部(19)~(21)式的條件皆可以位移的限制條件表示。

3.1.3 多點限制條件

位移有限元素法的基本平衡方程式為下式：

$$\begin{matrix} [K] \\ n \times n \end{matrix} \begin{matrix} \{D\} \\ n \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{F\} \\ n \times 1 \end{matrix} \quad (23)$$

但在許多情形下，必須強迫限制某些節點的位移量，若只限制一個自由度的位移量，稱之為單點約束條件(single point constraint)，若包含許多單個自由度的限制條件，稱之為多點約束條件(multiple point constraint)。在一般的情形下，可將約束條件寫成下式：

$$\begin{matrix} [C] \\ m \times n \end{matrix} \begin{matrix} \{D\} \\ n \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{Q\} \\ m \times 1 \end{matrix} \quad (24)$$

其中 m 是約束條件的數目。

一般來說，處理約束條件有以下三種方法：

1. 轉換方程式(transformation equation)；2. 拉格郎齊乘數(Lagrange multiplier)；3. 違利方程式(penalty function)，而本論文所選用的是拉格郎齊乘數法。

(23)、(24)式表示 $n+m$ 個方程式，而僅有 n 個未知的位移 $\{D\}$ ，所以再增加 m 個乘數 $\{\lambda\}$ ，則可符合方程式矩陣的大小，而這些乘數稱之為拉格郎齊乘數，那麼位能 π 可以重新定義成下式(Cook, 1989, pp.275-278)：

$$\pi = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{F\} + \{\lambda\}^T ([C] \{D\} - \{Q\}) \quad (25)$$

再經由位能最小化 $\frac{\partial \pi}{\partial \{D\}} = 0$ 與 $\frac{\partial \pi}{\partial \{\lambda\}} = 0$ 的推導，最後可將(23)、(24)式簡化合併

成為下式：

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (26)$$

拉格郎齊乘數法的優點是容易描述，所得的解答為正確解，但是矩陣的維度會變大，而且矩陣對角線上可能有零項產生。

3.1.4 接觸應力及位移條件處理

在 3.1.2 節之中，已得出接觸區域的應力及位移條件，及處理限制條件的方法，在本節中將探討如何將限制條件放入有限元素平衡方程式中，以求得滿足這些位移與應力條件的解答。

首先以兩個元素相互接觸的問題為例(圖 5)，用以說明八節點元素，在有限元素平衡方程式展開之後的情形。

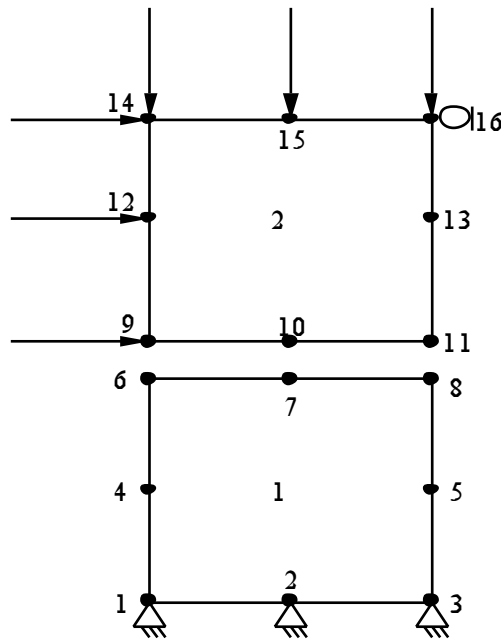


圖 5 兩個元素的接觸問題

如圖 5 所示，這兩個元素接觸時，接觸面積大小已知，而且是處在有摩擦且滑動的情形下。兩個元素共有 16 個節點，每個元素將產生 16 個自由度，因此每一行成為 32 個自由度的平衡方程式，矩陣展開時將成為(27)式：

$$[K]_{32 \times 32} \{D\}_{32 \times 1} = \{F\}_{32 \times 1} \quad (27)$$

以下就各種接觸的情況，探討加入限制條件的情形。

1. 接觸點的正向或切線位移量相等($u_1=u_2, v_1=v_2$)：

在圖 5 中，有三組接觸點相互接觸，所以(27)式的剛性矩陣應加入三個位移限制條件，也就是 $D_{12}=D_{18}$ ； $D_{14}=D_{20}$ ； $D_{16}=D_{22}$ ，放入之後剛性矩陣成為(28)式

(extrapolation)至節點，以求出節點應力。若使用 3x3 高斯積分，元素 n 的 j 節點應力可寫為

$$\sigma_{yy,nodej} = \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j)(\sigma_{yy})_i \quad (30)$$

其中 $(\sigma_{yy})_i$ 是第 i 個高斯點的應力，而 N_i 是外插函數，其形式與內插函數類似 (Cook, 1989, pp.176-180)。由於元素 n 高斯點的應力為

$$(\sigma_{yy})_i = [\bar{E}] [B_y^n] \{d\}_n \quad (31)$$

可將(31)式代入(30)式可得元素 n 第 j 節點的應力如下

$$\sigma_{yy,nodej} = [\bar{E}_n] \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j) [B_y^n]_i \{d\}_n \quad (32)$$

而元素 m 第 k 個接觸點在 y 方向的應力為

$$\sigma_{yy,nodek} = [\bar{E}_m] \sum_{i=1}^9 N_i(r_k, s_k) [B_y^m]_i \{d\}_m \quad (33)$$

因為兩接觸點的正向應力相同，亦即是(32)與(33)式右方為相等，那麼

$$[\bar{E}_n] \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j) [B_y^n]_i \{d\}_n = [\bar{E}_m] \sum_{i=1}^9 N_i(r_k, s_k) [B_y^m]_i \{d\}_m \quad (34)$$

上式即是元素 n 的節點位移與元素 m 的節點位移間的限制條件，而且是多節點間的限制條件(MPC)。同理，若是兩接觸點的剪應力 (τ_{xy}) 相同，那麼其多節點限制條件為

$$[\bar{E}_n] \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j) [B_{xy}^n] \{d\}_n = [\bar{E}_m] \sum_{i=1}^9 N_i(r_k, s_k) [B_{xy}^m] \{d\}_m \quad (35)$$

3. 庫倫摩擦定律：

當接觸點有滑動的情形產生時(圖 6)，在接觸點上的剪應力與正向應力需滿足庫倫摩擦定律，如下式所示

$$\tau_{xy} = \mu \sigma_{yy} \quad (36)$$

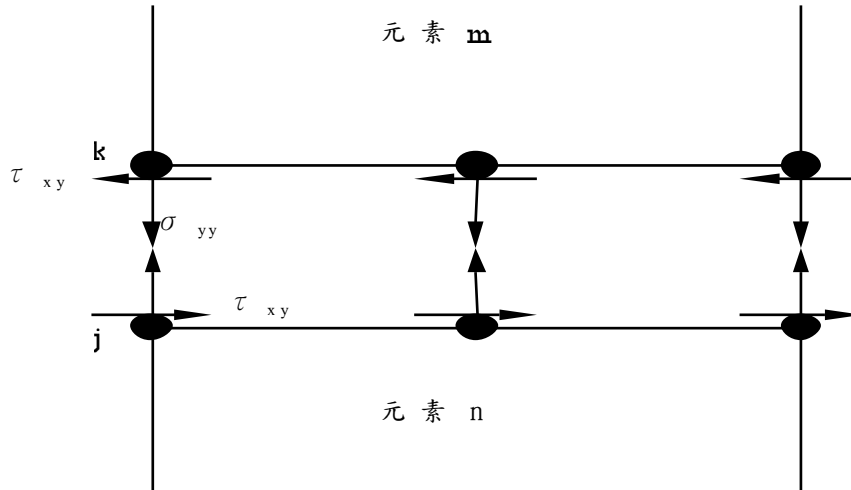


圖 6 摩擦接觸時剪應力與正向應力關係

同樣的利用有限元素應力與位移關係式中

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{E}] [B] \{d\}$$

可以將(36)式寫成以下的多點限制條件：

$$[\bar{E}_n] \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j) [B_{xy}^n] \{d\}_n = \mu [\bar{E}_n] \sum_{i=1}^9 N_i(r_j, s_j) [B_y^m] \{d\}_m \quad (37)$$

3.2 接觸問題程式設計

為了處理接觸問題，首先須建立含有原始程式(source codes)的有限元素程式，本論文是參考(Hinton, 1977)的程式，再將其程式中加入接觸問題的限制條件，而求解的方法由波前法(frontal method)改換成高斯消去法(Gaussian reduction method)，並將高斯點上的應力值，外插至元素節點上，以利使用者了解解答意義，其程式建立過程如下所述。

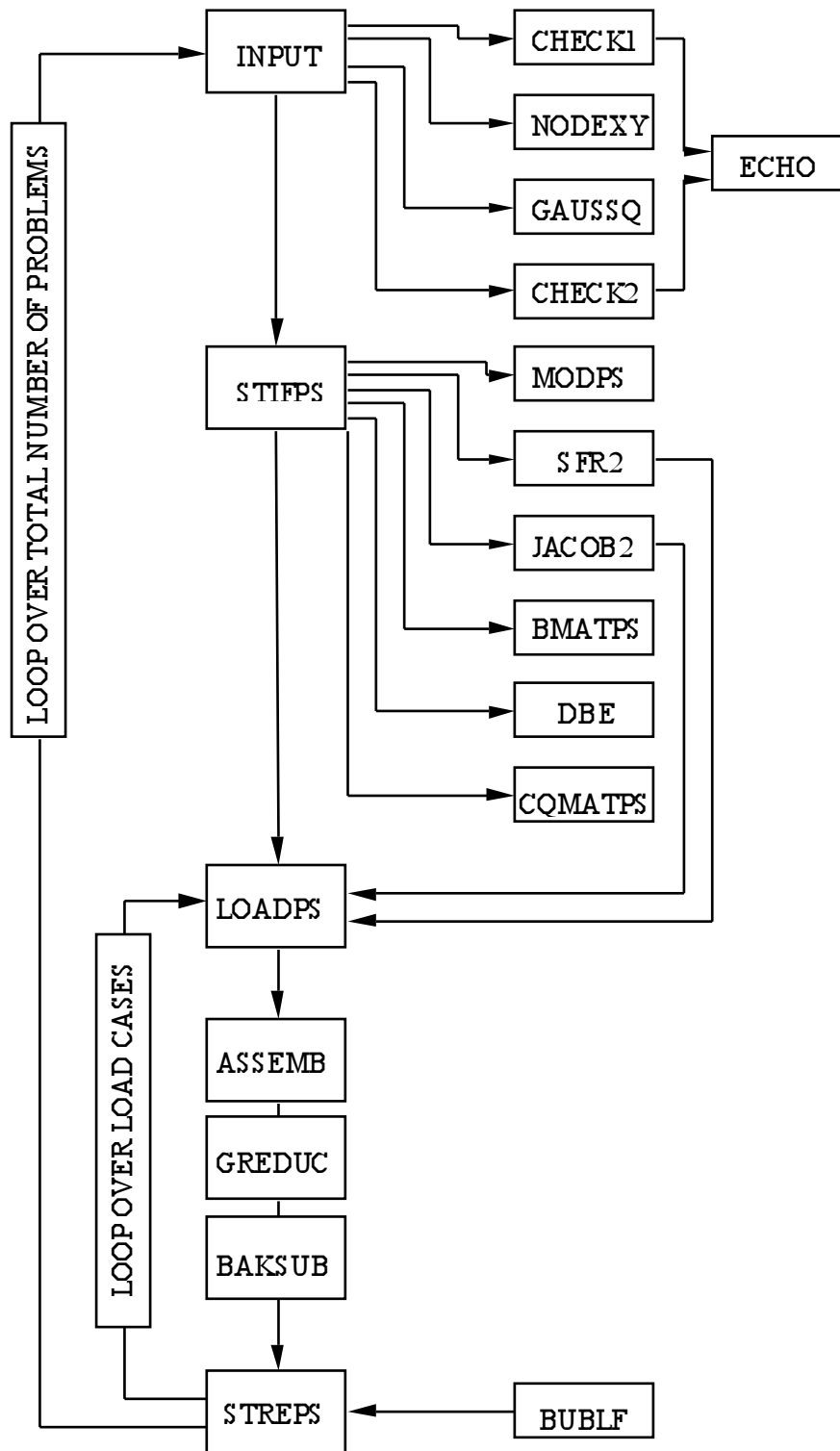


圖 7 程式組織流程圖

在程式組織流程圖(圖 7)中，可以看出有五大部分，下面就分別說明各部分的內容及作用為何。

1. INPUT: 在這區塊中，主要是輸入基本的資料，並做一些檢查，如果發現有錯誤，予以列印出來。

2. STIFPS: 在這區塊中，計算材料的彈性模數，將直角座標系上的元素藉型函數轉換成 $s-t$ 座標系，並計算出 Jacobian 矩陣與應變 ϵ 矩陣，再求出元素之剛性矩陣(element stiffness matrix)。
3. LOADPS: 在這區塊中，主要輸入負載的情形。
4. ASSEMB: 在這區塊中，利用帶狀矩陣法的求解技術，計算出位移量並求出限制節點上的反作用力。
5. STREPS: 在這區塊中，將已求出的位移代入，計算出高斯積分點上的應力，並列印出結果。

為了瞭解原始程式的可用性，設計一懸臂樑端點受集中力的問題(如圖 8 所示)，由於本題具有解析解，所以可以計算出受力點位移與應力的變化，而同樣的題目利用本文程式(COUNTACT)執行一次，以及利用 COSMOSM 套裝程式執行一次，比較其結果的差異。

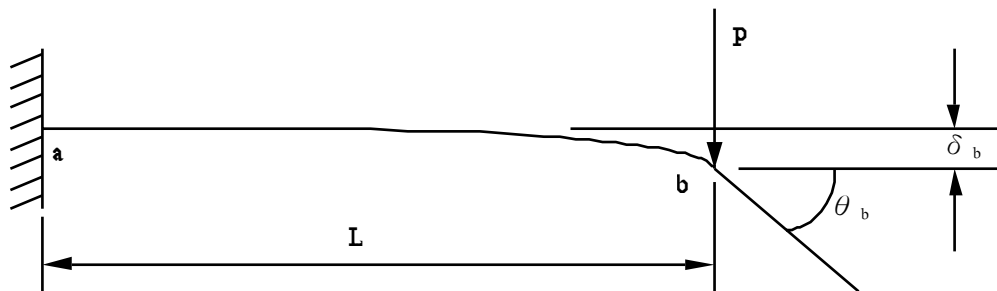


圖 8 懸臂樑端點受力圖

原始程式在處理一般的有限元素問題時，所表現出來的結果，與 COSMOSM 套裝程式結果相當接近，如下表所示。

	B 點位移 δ_b	位移 δ_b 差異值 百分比
解析解	-0.297619	
CONTACT 程式	-0.296717	0.303072%
COSMOSM	-0.29672	0.302064%

表 1 程式測試題結果比較表

第四章 實例驗證與結果

在本章中將兩個實例，以本論文所發展的程式去執行，驗證其結果是否符合接觸狀況的物理現象。

4.1 兩圓柱(cylinder)的赫茲接觸

赫茲接觸(Hertz contact)(圖 9)係假設無摩擦力作用的情況。當兩圓柱受外力作用時，赫茲接觸長度為

$$a = \sqrt{\frac{F(k+1)R}{2\pi G}} \quad (38)$$

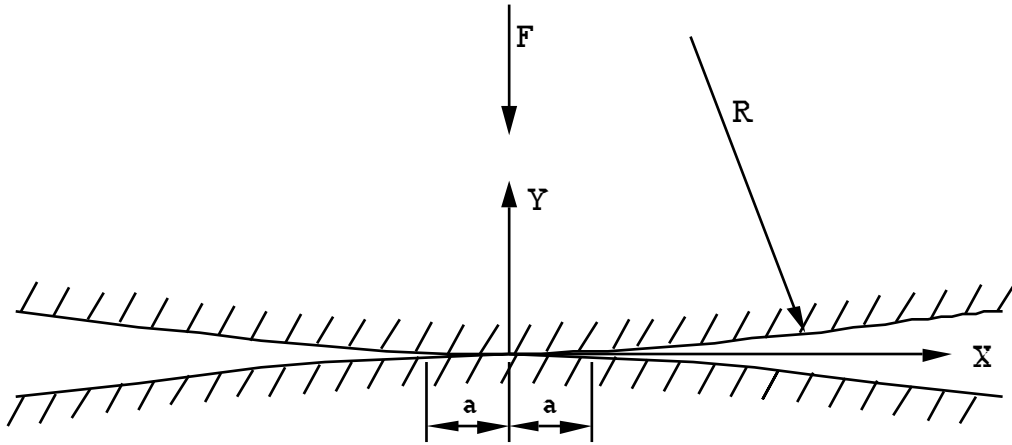


圖 9 圓柱的赫茲接觸問題

若在平面應變的情況：

$$k = 3 - 4\nu, \quad \frac{2G}{k+1} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \quad (39a, 39b)$$

若在平面應力的情況：

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \frac{2G}{k+1} = \frac{E}{4} \quad (40a, 40b)$$

其中 E 及 G 分別為楊氏係數及剪力模數， ν 是波以森比。

若是兩個直徑為 20cm 的實心圓柱水平置放，受外力作用後相互接觸。分析時由於是對稱的幾何關係，所以只模擬圓柱剖面的二分之一(圖 11)，圖 12 為元

素分割的方式，每一圓柱分割成 54 個元素，接觸區域細分較多的元素，以逼真模擬接觸應力的實況，而共有 108 個元素 378 個節點，假設在平面應變的情形下，摩擦係數為零，上下兩圓柱材料皆為鋼材 $E=2100000\text{kgf/cm}^2$ ， $\nu=0.28$ 。

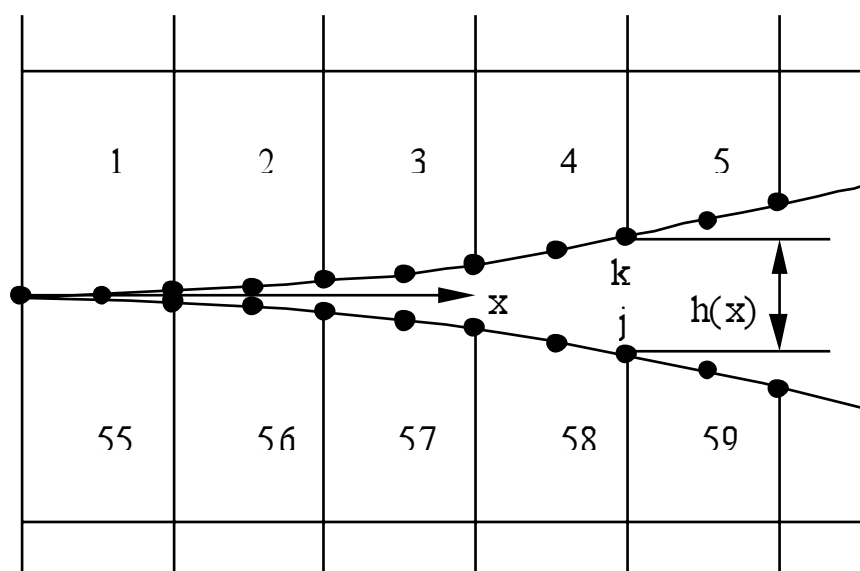


圖 10 接觸區元素放大圖

這是屬於第三種情況的接觸，所加在系統上的多點 限制條件為(圖 10)

$$v_j - v_k = h \quad (41)$$

$$(\sigma_{yy})_j = (\sigma_{yy})_k \quad (42)$$

$$(\tau_{xy})_j = (\tau_{xy})_k \quad (43)$$

及

$$(\tau_{xy})_k = 0 \quad (44)$$

其中 v_j 及 v_k 表示節點 j 及節點 k 在 y 方向上的位移， h 是兩節點在未受力狀態下的距離(圖 10)。

在分析時每次先假設接觸區域大小，再調整外力 F 使得接觸區域最外側節點的正向應力幾乎等於零。

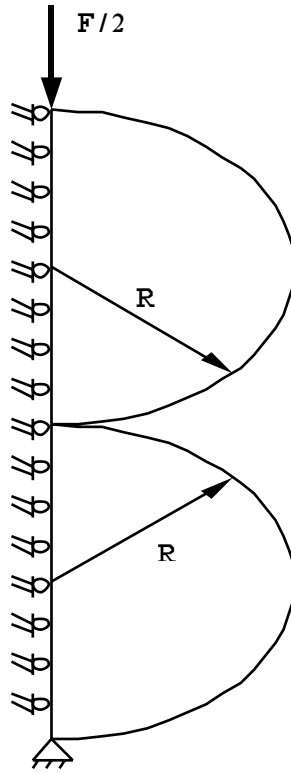


圖 11 兩圓柱的接觸情形

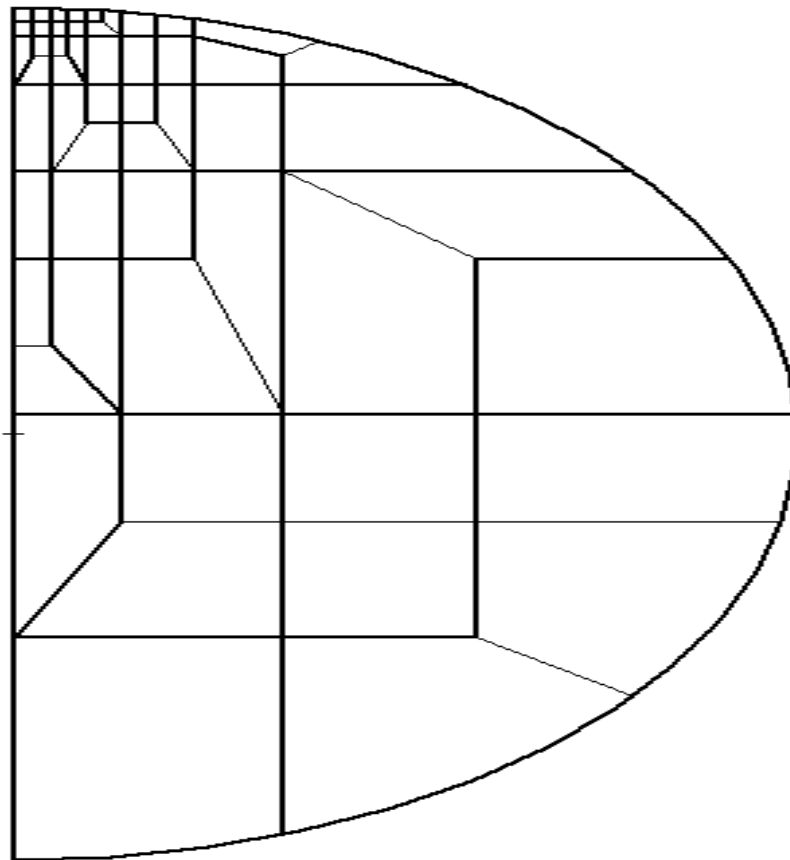


圖 12 下半圓柱元素網格圖

結果討論：

假設有 5 個元素接觸 $a=1.136364\text{cm}$ ，再調整外力 $F/2$ 使得接觸區最外緣這點的正向應力為零，求出 $F/2=119575\text{kg}$ ，求出結果討論於下。

1. 接觸節點位移：

由於兩圓柱的半徑相等，在接觸後所有接觸點應在同一水平線上，亦即接觸區域內節點的 y 座標應相等，表 2 顯示程式執行結果符合這條件。

接觸節點編號	208-19	223-34	242-53	255-66	271-82	279-90
上節點 y 座標	20.0	20.002583	20.010336	20.023271	20.041408	20.064776
上節點 y 位移	-0.427229	-0.429812	-0.437565	-0.4505	-0.468637	-0.492005
位移後 y 座標	19.572771	19.572771	19.572771	19.572771	19.572771	19.572771

表 2 接觸節點位移表

2. 接觸區域應力圖

本程式中所給的是集中力 $F/2=119575\text{kg}$ ，此力大於 Hertz 接觸問題所計算出來的 $F/2=115550\text{kg}$ 。圖 13 所呈現的是接觸區域內各節點應力，由圖中可以看出其曲線與 Hertz 解曲線非常接近。(最大誤差出現在大約 $x=0.7a$ 附近，誤差值為 7.7557%)

3. 外力與接觸區關係：

圖 14 為作用力與接觸區域長度 a 的比較，由此圖可之數值解亦與赫茲解非常接近，在 $a=1.136364\text{cm}$ (5 個元素接觸的長度)時外力 F 的誤差為 3.4833%。

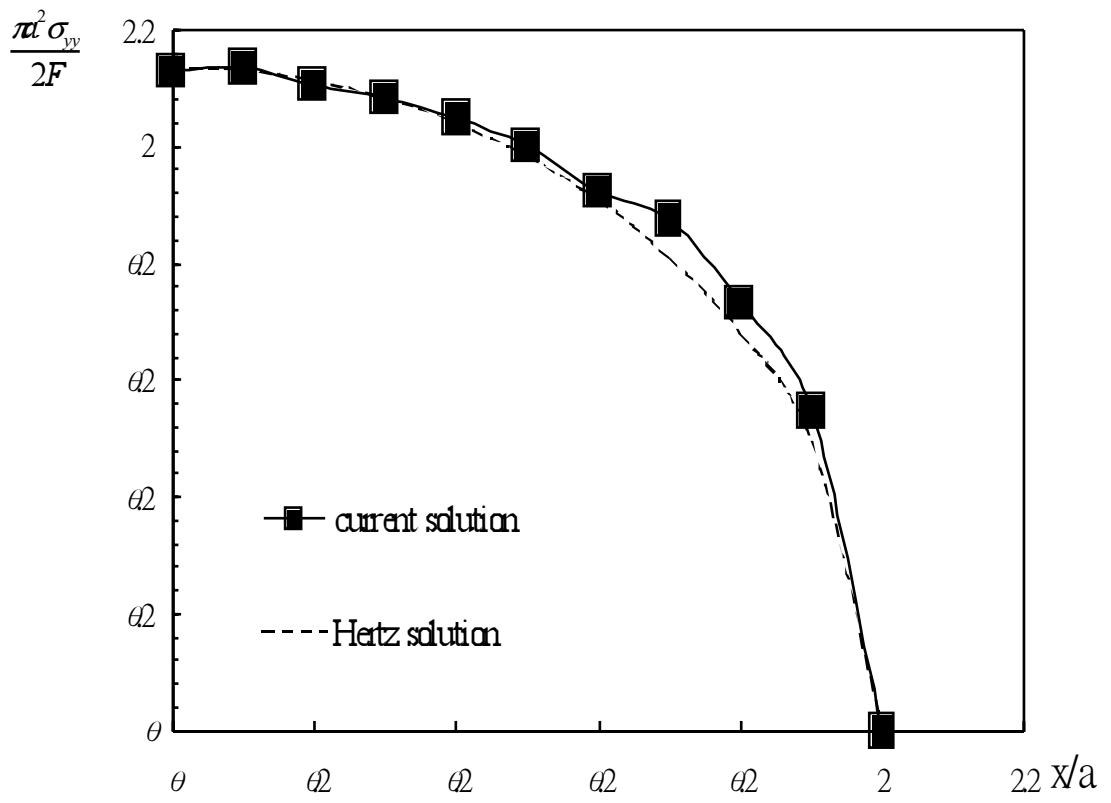


圖 13 無因次接觸應力圖

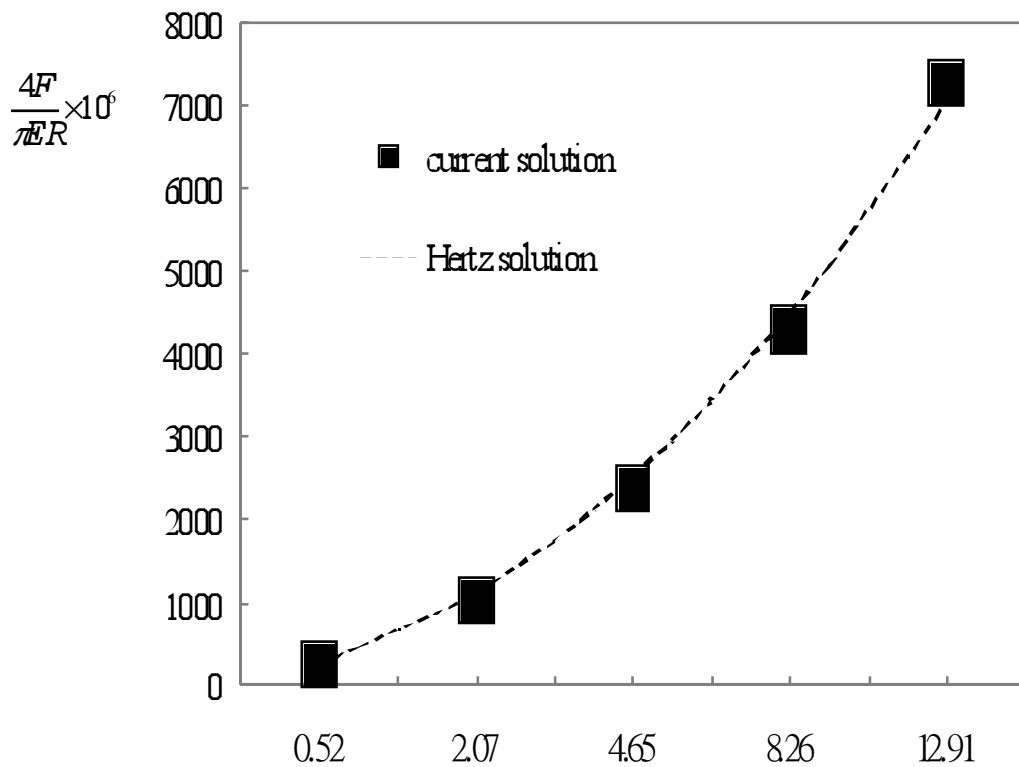


圖 14 接觸長度與作用力關係圖

4.2 兩圓柱的摩擦接觸

再以兩圓柱體的摩擦接觸為例說明，並將分析結果與解析解(Johnson, 1985, pp.119-124)比較。假設上圓柱(物體 2)為鋁材，而下圓柱(物體 1)仍為鋼材，其材料性質分別為 $E_1=2100000\text{kg/cm}^2$ ， $E_2=700000\text{kg/cm}^2$ ， $\nu_1=0.28$ ， $\nu_2=0.33$ ，兩材料間的參數 β 定義如下：

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \right] \quad (45)$$

其中 G 為剪力模數，則本例題 $\beta=0.224806$

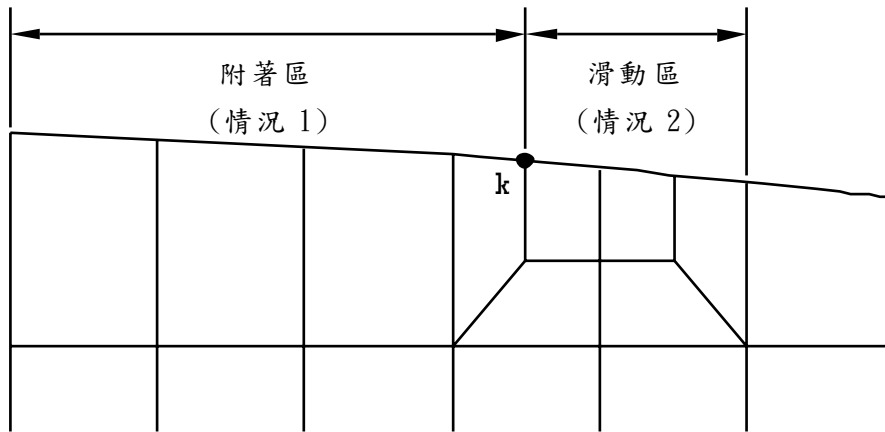


圖 15 圓柱摩擦接觸區元素放大圖

Spence 分析摩擦係數 $\mu=0.99\beta$ ，因此取 $\mu=0.222558$ ，由於有摩擦力作用，在接觸區域內可分成兩個區域(圖 15)。靠近接觸區域中心附近是附著區(stick region)，是屬於情況 1，所加的接觸條件如(19)式，而靠近接觸區域外圍是屬於滑動區(slipped region)，是屬於情況 2，因此所加的接觸條件如(20)式。

Spence 的分析解是針對附著寬度為接觸區域寬度之 0.7 倍的情況，假設此附著區寬度所得到的數值結果顯示於圖 16、17 及 18，其中圖 16 是數值解與解析解的剪應力 τ_{xy} 的比較，由此圖可發現兩者有明顯差異，在 $x/a=0.7$ 處，誤差為 24.09%。

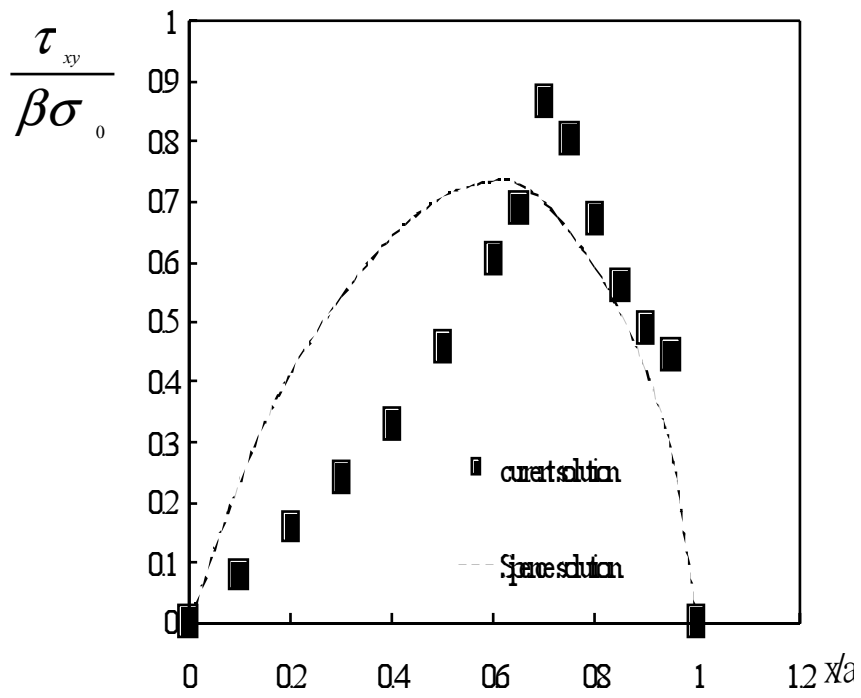


圖 16 數值解與 Spence 解 τ_{xy} 比較圖 (σ_0 是在 $x=0$ 的 σ_{yy} 值)

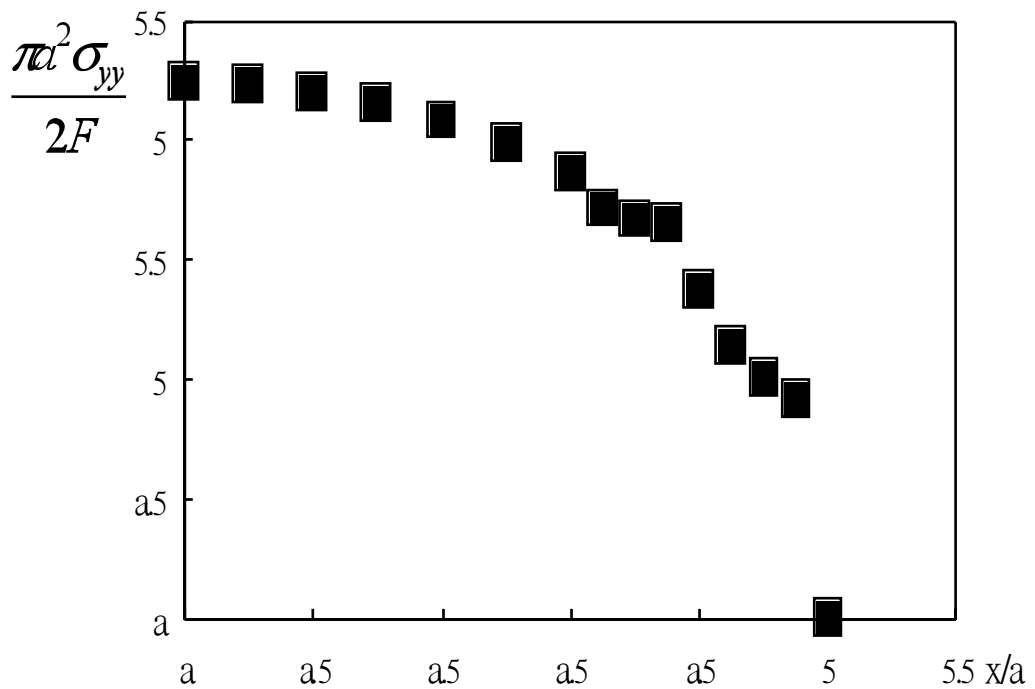


圖 17 正向應力與接觸長度關係圖

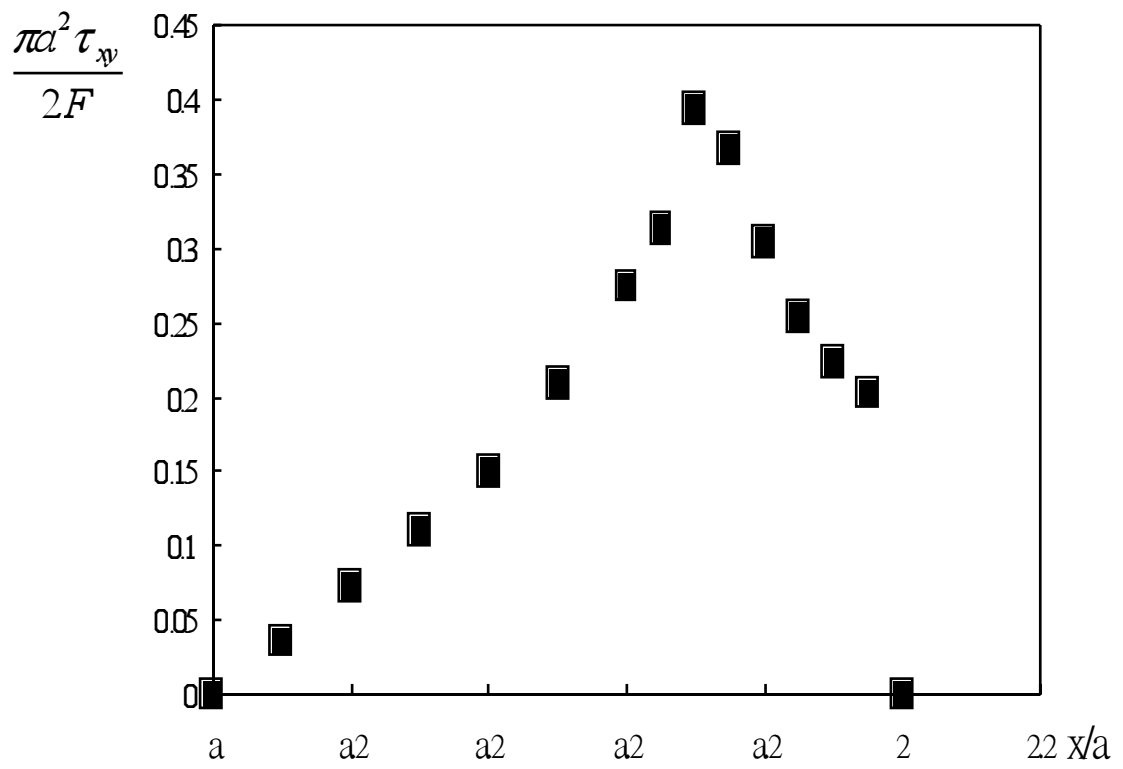


圖 18 剪應力與接觸長度關係圖

第五章 結論與建議

在這論文的研究過程中，作者所使用多點限制條件(mpc)來模擬二物體接觸時的應力及位移條件。由於為了日後更進一步研究需要，作者自行修改並撰寫軟體。其實本論文的研究方法最大優點是可使用目前已有的商業軟體，並且無須使用任何特殊元素，由於各種有限元素軟體皆可加上多點限制條件，因此使用者可根據商業軟體的網格產生(mesh generation)結果，先列印出節點及元素相關資料，使用 basic 或其他語言以產生多點限制條件，直接加在商業軟體之上即可模擬接觸狀態。

本文以兩個圓柱接觸為例，研究結果顯示在無摩擦力的正向接觸(赫茲接觸)時其結果與解析解較接近，但在有摩擦力時，其結果與解析結果仍有顯著誤差。這點仍應繼續探討其他更多摩擦接觸的例子，以了解這種方法在摩擦力時是否適用。

參考文獻

- Logan,D.L., 1992, a A First Course in the Finite Element Methoda , PWS Publishing Company.
- Hinton,E. and Campbell,J.S. a Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Methoda Int.JnumMeth.Engng., Vol.8, No.3, pp.461-480
- Hinton,E. and Owen,D.R.J, 1977, a Finite Element programminga , Harcourt Brace Jovanvich publishers, Tokyo Toronto
- Barlow,J. 1976, a Optimal Stress Locations in Finite Element Models a Int J.Num.Meth.Engng., Vol.10, No.2, pp243-251
- Kishore,N.N., Ghosh,A., Rathore,S.K. and Kishore,P.V., 1994, a Finite element analysis of quasi-static contact problems using minimum dissipation of the energy principlea ,Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol.61, No.3, pp642-648
- Johnson,K.L., 1985, Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- Liu,C.H., Hofstetter,G. and Mang,H.A., 1995, a Finite element algorithm for contact problems with friction a ,Structural Engineering and mechanics, Vol.3, No.3, pp289-297
- Mechnik,R.P., 1991,a Consideration of constraints within the finite element method by means of matrix operators a ,International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.31, No.5, pp909-926
- Mottershead,J.E., Pascoe,S.K. and English,R.G., 1992, a General finite element approach for contact stress analysis a , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.33, No.4, pp765-779
- Papadopoulos,P. and Taylor.R.L., 1993,a Simple Algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems a , Computers and Structures, Vol.46, No.6, pp1107-1118
- Paul,B. and Hashemi,J. 1981,a Contact pressure on closely conforming elastic bodies a , Trans. ASTM, Series E, Journal of Applied Mechanics, Vol.48, pp.543
- Refaat,M.H., and Meguid,S.A., 1995,a On the modeling of frictional contact problem using variational inequalities a , Finite Element in Analysis and Design, Vol.19, No.1-2, pp89-101
- Cook,R.D., Malkus,D.S. and Plesha,M.E., 1989, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, third edition, John Wiley & Sons, Inc. , New York
- Sano,Y., 1996, a Finite element method for contact problems between three-dimensional curved bodies a , Journal of Nuclear Science and Technology, Vol.33, No 2, pp119-127
- Spence,D.A., 1975,a The Hertz contact problem with finite friction a , Journal of Elasticity, Vol.5, pp297-319
- Stok,B. and Hudoklin,A., 1994,a How to tackle the compatibility constrains in a computational solution of frictional contact problem a , Finite elements in Analysis and Design, Vol.18, No.1-3, pp111-119
- Timoshenko,S.P. and Goodier,J.N., 1970,a Theory of Elasticity a , McGraw-Hill book company, NY.
- Zhong,Z.H. and Mackerle,J., 1992,a Static contact problems – a review a , Engineering computations, Vol.9, No.1, pp3-37
- Zhu,C. and Jin,Y., 1994,a Solution to frictional contact problems using a finite element-mathematical programming method a , Computers and structures, Vol.52, No.1, pp149-155
- 蔡哲雄, 廖崇禮, 1993, “混合形有限元素二維接觸應力分析之研究” ,力學, Vol.9, No.4, pp319-330