

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

機械手臂抓取接觸力分析 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 97-2221-E-032-031-
執行期間：97年08月01日至98年10月31日
執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

計畫主持人：劉昭華

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：吳奇樺
碩士班研究生-兼任助理人員：陳敏祥
碩士班研究生-兼任助理人員：杜俊霖
碩士班研究生-兼任助理人員：蔡孟龍
博士班研究生-兼任助理人員：許富凱
博士班研究生-兼任助理人員：成怡

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 98 年 10 月 19 日

機械手臂抓取接觸力分析

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2221-E-032-031

執行期間：97年8月1日至98年7月31日

計畫主持人：劉昭華

共同主持人：

計畫參與人員：成怡

執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

機械手臂抓取接觸力分析

Contact Force Analysis in Robot Grasping

計畫編號：NSC97-2221-E-032-031

執行期限：97年8月1日至98年7月31日

主持人：劉昭華 淡江大學機械與機電工程學系

計畫參與人員：成怡 淡江大學機械與機電工程學系

一、中文摘要

本研究利用赫氏接觸原理、以及力平衡方程式，推導出機械手臂抓取球形物件時的力與位移關係式。只要給定手指的夾緊位移，即可代入關係式求出手指與物件間的正向及側向(摩擦)接觸力。此研究是針對二指抓取，手指可以模擬成剛體或是可變形體，夾緊方式也可以是平移夾緊或是旋轉夾緊，夾緊系統可以左右不對稱，此研究皆以解析方式求出以上各情況的封閉形式解。

關鍵詞：機械手臂抓取、機械手臂挾持、接觸力學

Abstract

In this research Hertz contact theory and equilibrium equations are used to derive force-displacement relations for a robot grasping a spherical object. By substituting a tightening displacement of robot fingers into these relations, the corresponding normal and tangential (frictional) components of fingers-to-object contact forces may be determined. The fingers may be elastic or rigid, tightening displacements may be linear or angular, and the tightening system may be asymmetric. Closed form solutions are obtained in all these cases.

Keywords: Robot grasping; Robot Gripping; Contact mechanics

二、緣由與目的

「機械手臂抓取」(robot grasping)是使物件(object)喪失自由度(mobility)，使其隨著機械手臂運動。由於抓取是自動化加工過程及智慧型機器人經常的動作，因此已成為近年來非常熱門的研究議題。有些幾何形狀的物件無法被無摩擦接觸力所限制[1-2]，需要靠摩擦力才能抓取。然而摩擦力的出現，對系統模擬與動態分析造成很大的困擾，當庫倫摩擦定律(Coulomb's Law of friction)應用在剛體物件時，有些動態問題無解，而另一些問題會出現多個解[3-4]。Dupont[5]說明這種不合理的現象即使在單自由度的接觸亦會發生，他建議考慮物件的變形以避免這種現象。因此 Howard and Kumar[6]所建立的模型加入了物體之變形及撓度。Kraus 等[7]只針對彈簧及集塊質量模式，並證明這模式的唯一解必定存在。Cutkosky[8]將被夾持物件視為可變形體，並估計其剛性(stiffness)。接著 Cutkosky and Kao[9]估計出人形手指抓取時的撓度。Nguyen[10]設計出帶有撓度的抓取方式，可穩固挾持任意形狀的平面多邊形物件；Nguyen[11]亦針對所有力量封閉的夾持方式，證明藉著彈簧都可形成穩固的夾持。Howard and Kumar[12]討論在平衡狀態下穩固夾持(stable grasps)的條件，並推導出帶撓度的手指穩固夾持平面物件的條件，Donoghue 等[13]將此條件推展至空間物件(亦請參考[14])。

在上述許多研究中撓度是由線性彈簧

(linear springs)所產生，但 Lin 等[15]指出線性彈簧的撓度模型並無實驗結果支持，而 Rimon and Burdick[16]更指出線性彈簧未能將接觸體的曲率(curvature)加入模式之中，因此可能產生錯誤結果。他們利用彈性力學中的赫氏接觸(Hertz contact)產生非線性的撓度，並用以求出撓性抓取時的剛性矩陣(stiffness matrix)。Sinha and Abel[17]在處理摩擦抓取時亦在側向加上非線性的力與位移關係，他們並且利用非局部的摩擦定律(nonlocal friction law)，如此可定義出系統位能，並使用最小位能原理求出正向及側向接觸力，他們的數值計算過程是利用 Lagrange 乘數(Lagrange multipliers)，並使用 Schittkowski 非線性最佳化技巧。Xydas and Kao[18~20]使用赫氏接觸原理估計柔軟手指(soft fingers)與堅硬物體接觸時的剛性(stiffness)與撓度(compliance)，這方面的實驗結果及模型建立請參閱[18~22]。Lin 等[23]亦藉助赫氏接觸原理建立堅硬手指與柔軟物體接觸的數學模型，Wu and Dong[24]則利用有限元素法分析人類手指的二維非摩擦接觸，而 Wu 等[25]則將此分析拓展至三維接觸。

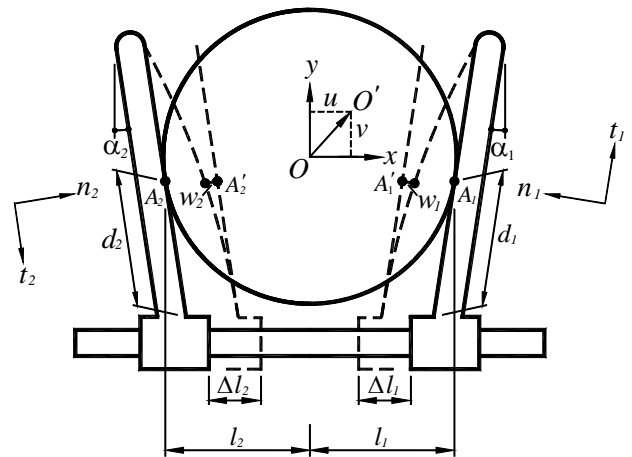
到目前為止最精確的摩擦接觸原理是前述由 Sinha and Abel[17]所提出的靜態(static)模式，以及 Howard and Kumar[6]所建議的動態(dynamic)模型，這些方法類似有限元素技巧，都需要以數值方法處理非線性變分原理，並不能用在即時模擬[7]；Lin 等[15]亦指出這些方法不適合用在於挾持規劃。Lin 等[15]雖然提出較簡單的方法估計撓度，但卻僅限於無摩擦接觸。因此，至今尚無正確且實用的方法估計出抓取時的正向及切線接觸力。

本研究的目的是，是針對兩指的摩擦接觸，找出接觸力與外加強制位移量(imposed displacements)的關係，亦即由驅動器施加的夾緊位移量，可求出手指與物件間的正向及側向接觸力，而且並未使用簡化的彈簧及集塊質量模式，也未將系統簡化成柔軟手指與堅硬物體，或是堅硬手指與柔軟物體，而是根據赫氏

接觸理論，將手指及物件皆視為彈性體。解答將以閉合形式(closed-form)呈現，可用在即時模擬。本研究將針對較常見之兩指圍繞抓取形式[26]，亦即線性夾緊與旋轉夾緊兩種形式，每種形式之手指又可分別設定為剛性或彈性材料來探討。由於是首次以這種方法解題，本研究只針對球型物件(spherical objects)的抓取，而且只針對靜態且無其他外力作用的情況。

三、兩彈性指之線性夾緊

圖一顯示兩彈性手指夾持球形物件，在起始狀態兩手指開始接觸物件，起始接觸點為 A_1 及 A_2 ，這時並未有力量透過 A_1 及 A_2 傳遞，兩手指方向分別是 α_1 及 α_2 ， \mathbf{n}_1 及 \mathbf{n}_2 為通過 A_1 及 A_2 且為手指與物件的共法線，而 l_1 及 l_2 分別為 O 與 A_1 及 O 與 A_2 的水平距離，當施加線性夾緊量 Δl 之後， l_1 與 l_2 的變化量分別為 Δl_1 及 Δl_2 ，這時在 A_1 及 A_2 點的正向壓力分別為 N_1 及 N_2 ，摩擦力分別為 T_1 及 T_2 ，而作用在物件上的摩擦力 T_1 及 T_2 與圖一中切線向量 \mathbf{t}_1 及 \mathbf{t}_2 同方向。



圖一 兩指平移夾緊示意圖

若將手指模擬為懸臂樑(cantilever beam)，假設 w_1 及 w_2 分別為手指一及手指二的彈性變形量，利用懸臂樑位移公式可得

$$w_1 = -\frac{N_1 d_1^3}{3E_2 I_2} \quad w_2 = -\frac{N_2 d_2^3}{3E_2 I_2}$$

被夾持物件有三條平衡方程式，由 x 及 y 方向力平衡可得

$$-N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

$$N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = 0 \quad (2)$$

由 z 方向力矩平衡可得

$$T_1 + T_2 = 0 \quad (3)$$

若 u 及 v 分別為 O 點在 x 及 y 方向的彈性位移量，則將 u 及 v 分別分解到 \mathbf{n}_1 、 \mathbf{t}_1 、 \mathbf{n}_2 、及 \mathbf{t}_2 方向，可得

$$u_{n1} = u \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1, \quad u_{t1} = -u \sin \alpha_1 - v \cos \alpha_1$$

$$u_{n2} = -u \cos \alpha_2 - v \sin \alpha_2,$$

$$u_{t2} = -u \sin \alpha_2 + v \cos \alpha_2$$

接著考慮 O 相對於 A_1 的位移量，此相對位移量在 \mathbf{n}_1 及 \mathbf{t}_1 方向的分量 δ_{n1} 及 δ_{t1} 分別為

$$\begin{aligned} \delta_{n1} &= \Delta l_1 \cos \alpha_1 + u_{n1} + w_1 \\ &= \Delta l_1 \cos \alpha_1 + u \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1 - \frac{N_1 d_1^3}{3E_2 I_2'} \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \delta_{t1} &= -\Delta l_1 \sin \alpha_1 + u_{t1} \\ &= -\Delta l_1 \sin \alpha_1 - u \sin \alpha_1 - v \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (b)$$

根據赫氏接觸原理，相對位移量 δ_{n1} 及 δ_{t1} 與正向力 N_1 和側向力 T_1 的關係為[27, 28]

$$\delta_{n1} = \left(\frac{9N_1^2}{16R_1 E_1^{*2}} \right)^{1/3}$$

$$\delta_{t1} = \frac{3\mu_1 N_1}{16G^* a_1} \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{\mu N_1} \right)^{2/3} \right]$$

其中

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}, \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2-v_1}{G_1} + \frac{2-v_2}{G_2}$$

而 E, G , 及 ν 分別為彈性模數、剪力模數、及波以森比，下標 1 為挾持物，下標 2 為手指。將以上關係代入(a)及(b)式可得以下(4)及(5)式

$$(\Delta l_1 + u) \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1 - \frac{N_1 d_1^3}{3E_2 I_2'} = \left(\frac{9N_1^2}{16R_1 E_1^{*2}} \right)^{1/3} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\Delta l_1 \sin \alpha_1 + u \sin \alpha_1 + v \cos \alpha_1 \\ &= \frac{-3\mu_1 N_1}{16G^* a_1} \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{\mu N_1} \right)^{2/3} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

同理考慮 O 相對於 A_2 的位移量可得以下兩式

$$(\Delta l_2 - u) \cos \alpha_2 - v \sin \alpha_2 - \frac{N_2 d_2^3}{3E_2 I_2''} = \left(\frac{9N_2^2}{16R_2 E_2^{*2}} \right)^{1/3} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\Delta l_2 \sin \alpha_2 - u \sin \alpha_2 + v \cos \alpha_2 \\ &= \frac{3\mu_2 N_2}{16G^* a_2} \left[1 - \left(1 - \frac{T_2}{\mu N_2} \right)^{2/3} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

物件變形量 Δl_1 及 Δl_2 必須與強加的夾緊量 Δl 相配合，這表示相容方程式 (compatibility equation) 為

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l \quad (8)$$

因此這系統有 8 條代數方程式 (algebraic equations)，可用來解 8 個未知數，包括 4 個接觸力 N_1 、 T_1 、 N_2 、 T_2 ， O 點位移量 u 、 v ，與 Δl_1 、 Δl_2 ，解題過程如下。

首先，由(3)式求得 $T_1 = -T_2$ ，由(8)式求得 $\Delta l_2 = \Delta l - \Delta l_1$ ，將此代入(1)及(2)求得 $-N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 - T_2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = 0$ 及

$$N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 - T_2 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = 0$$

以上二式可求出

$$T_2 = \frac{-N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2} = \frac{N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}$$

移項後得到

$$N_1 [1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] = N_2 [1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

因此

$$N_1 = N_2 = N$$

將此結果代入(1),(2)得到

$$T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = N (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = -N (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

求解以上之聯立方程式，得到 T_1 及 T_2 如下

$$T_1 = -\frac{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} N = -\tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) N \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} N = \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) N \quad (10)$$

設 $d_1 = d_2 = d$ ，並將以上各關係式代入(4)及(6)式，得到

$$(\Delta l - \Delta l_2) \cos \alpha_1 + u \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1 - \frac{Nd^3}{3E_2 I_2} = \left(\frac{9N^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}$$

$$\Delta l_2 \cos \alpha_2 - u \cos \alpha_2 - v \sin \alpha_2 - \frac{Nd^3}{3E_2 I_2} = \left(\frac{9N^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}$$

從以上二式可解出位移 u 及 v 如下

$$u = \frac{v(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) - \Delta l \cos \alpha_1 + \Delta l_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[\left(\frac{d^3}{3E_2 I_2} \right) N + \left(\frac{9}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} N^{2/3} \right] \\ &\quad + \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \Delta l \end{aligned}$$

若定義

$$\frac{1}{\mu_i} = 1 - \left[1 + \frac{1}{\mu_i} \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right]^{2/3}, \quad i=1 \text{ 或 } 2$$

將上述定義及(9)與(10)式代入(5)及(7)，可得

$$-(\Delta l - \Delta l_2) \sin \alpha_1 - u \sin \alpha_1 - v \cos \alpha_1 = \frac{1}{8G^*} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1} \right) N^{2/3} \quad (11)$$

及

$$\Delta l_2 \sin \alpha_2 - u \sin \alpha_2 + v \cos \alpha_2 = \frac{1}{8G^*} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_2} \right) N^{2/3} \quad (12)$$

由(11)式可求得

$$v = -\frac{N^{2/3}}{8G^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1} \sin \alpha_2 - \frac{\mu_2}{\mu_2} \sin \alpha_1 \right) - \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \Delta l}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (13)$$

由(12)式可求出

$$v = -\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[\left(\frac{d^3}{3E_2 I_2} \right) N + \left(\frac{9}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} N^{2/3} \right] + \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \Delta l}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (14)$$

強迫以上兩式的 v 相等，經化簡後可得

$$N^3 + a_1 N^2 + a_2 N + a_3 = 0 \quad (15)$$

其中

$$a_1 = \frac{9E^*}{2BR} \left[\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2E^*} - \frac{1}{8G^*} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1} \sin \alpha_2 - \frac{\mu_2}{\mu_2} \sin \alpha_1 \right) \right]^3 - \frac{3\Delta l \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{B}$$

$$a_2 = \frac{3(\Delta l)^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{B^2}, \quad a_3 = -\frac{(\Delta l)^3 \cos^3(\alpha_1 - \alpha_2)}{B^3}$$

以上係數中

$$B = \frac{d^3 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)}{3E_2 I_2}$$

若是對稱夾持，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ；而且這時摩擦係數 $-\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ，以上係數可化簡為

$$a_1 = -\frac{9E_2 I_2 (\Delta l)}{2d^3 \cos \alpha} + \left(\frac{3E_2 I_2}{2d^3} \right)^3 \left(\frac{9E^*}{2R} \right) \left(\frac{1}{E^*} + \frac{\tan \alpha \mu}{4G^* \mu^*} \right)^3 \quad (16a)$$

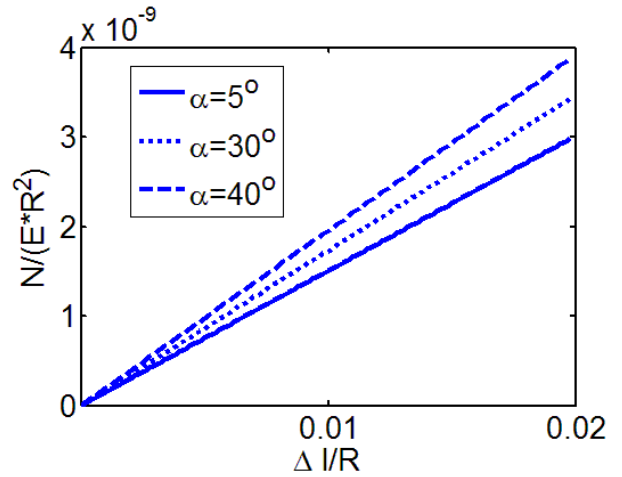
$$a_2 = \frac{27E_2^2 I_2^2 (\Delta l)^2}{4d^6 \cos^2 \alpha} \quad (16b)$$

$$a_3 = -\frac{27E_2^3 I_2^3 (\Delta l)^3}{8d^9 \cos^3 \alpha} \quad (16c)$$

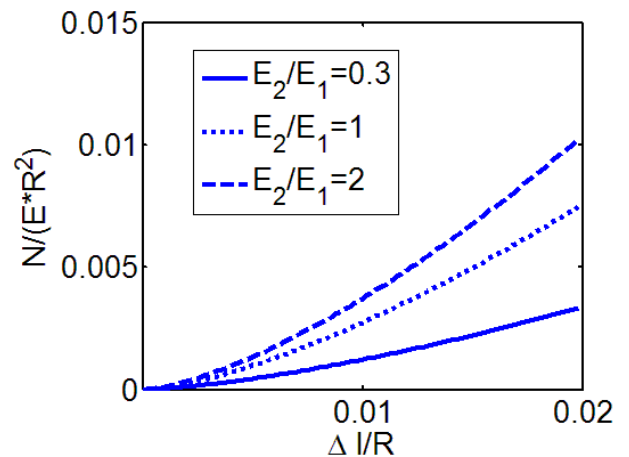
其中

$$\frac{1}{\mu^*} = 1 - \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \right)^{2/3} \quad (17)$$

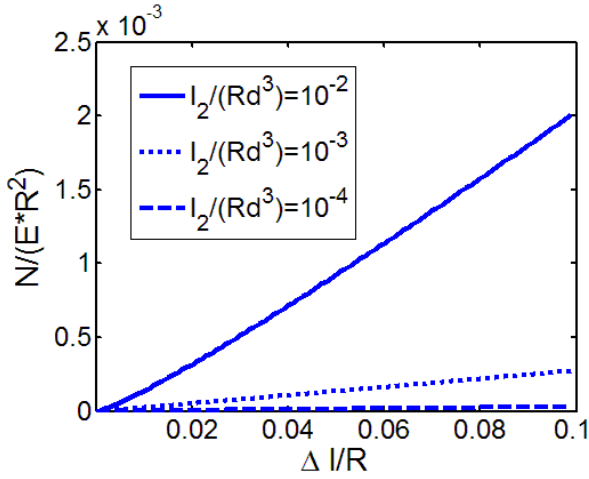
圖二至圖四顯示以上對稱挾持的結果，圖二為不同夾緊量 Δl 時之正向夾緊力 N 的關係，圖中顯示的關係近似線性，這是因為手指之面積慣性矩 I_2 較小(16b)及(16c)式定義的 a_2 及 a_3 接近為零，正向力 N 成為 a_1 所定義的線性函數。圖三為不同材料性質時，正向夾緊力 N 與夾緊量 Δl 的關係，由於手指之面積慣性矩 I_2 較高，圖三顯示出正向力與夾緊量的曲線關係。圖四為不同形狀條件時，正向夾緊力 N 與夾緊量 Δl 的關係。



圖二 不同角度時線性夾緊量與正向力關係
[$E_2/E_1=2$; $I_2/(Rd^3)=10^{-8}$]



圖三 不同材料時線性夾緊量與正向力關係
[$\alpha=5^\circ$; $I_2/(Rd^3)=1$]



圖四 不同慣性矩時線性夾緊量與正向力關係 ($\alpha=5^\circ$; $E_2/E_1=2$)

四、兩剛性指之線性夾緊

若手指為剛體，亦即 E_2 趨近無限大，(14) 式成為

$$v = -\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{9}{16RE^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} + \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \Delta l$$

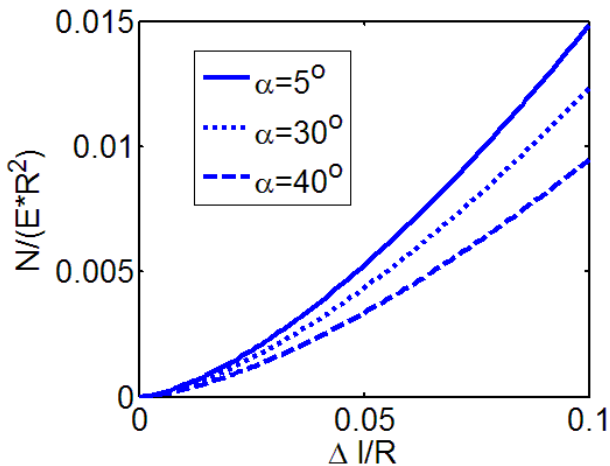
強迫(13)式與上式的 v 相等，可求出夾持力 N

$$N = \frac{(\Delta l)^{3/2} \cos^{3/2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2E^*} - \frac{1}{8G^*} \left(\frac{\mu_1 \sin \alpha_2}{\mu_1} - \frac{\mu_2 \sin \alpha_1}{\mu_2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

若是對稱夾持，亦即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ，而且 $-\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ，因此上式的挾持力 N 可簡化為

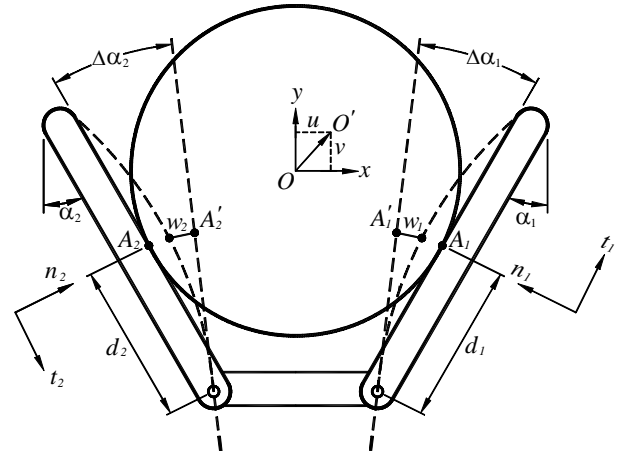
$$N = (\Delta l)^{3/2} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos \alpha}{E^*} + \frac{\sin \alpha}{4G^*} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right) \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (18)$$

圖五為不同夾角時，由(18)式所求出正向夾緊力 N 與夾緊量 Δl 的關係。



圖五 不同角度時線性夾緊量與正向力關係 (剛性手指)

五、兩彈性指之旋轉夾緊



圖六 兩指旋轉夾緊示意圖

圖六顯示兩彈性手指以旋轉方式夾緊物件，當手指 1 及手指 2 在 A_1 及 A_2 剛開接觸物件時，其方向分別是 α_1 及 α_2 ，接著兩手指各以旋轉角 $\Delta\alpha_1$ 及 $\Delta\alpha_2$ 夾緊物件。首先考慮這時 O 相對於 A_1 的位移量，此位移量在 \mathbf{n}_1 方向的分量 δ_{n1} 如(4)式等號左邊所示，但須將此式中之 $\Delta l_1 \cos \alpha_1$ 改為 $d_1 \Delta\alpha_1$ ，因此(4)式改寫成

$$d_1 \Delta\alpha_1 + u \cos \alpha_1 - v \sin \alpha_1 - \frac{N_1 d_1^3}{3E_2 I_2} = \left(\frac{9N_1^2}{16R_1 E_1^{*2}} \right)^{1/3} \quad (4')$$

將(5)及中之 $\Delta l_1 \sin \alpha_1$ 刪除即為此位移量在 \mathbf{t}_1 方向的分量 δ_{t1} ，因此(5)式成為

$$-u \sin \alpha_1 - v \cos \alpha_1 = \frac{3\mu_1 N_1}{16G^* a_1} \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{\mu_1 N_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (5')$$

同理， O 相對於 A_2 的位移量，在 \mathbf{n}_2 及 \mathbf{t}_2 方向的分量 δ_{n2} 及 δ_{t2} 與正向力及切線力關係為

$$d_2 \Delta\alpha_2 - u \cos \alpha_2 - v \sin \alpha_2 - \frac{N_2 d_2^3}{3E_2 I_2} = \left(\frac{9N_2^2}{16R_2 E_2^{*2}} \right)^{1/3} \quad (6')$$

$$-u \sin \alpha_2 + v \cos \alpha_2 = \frac{3\mu_2 N_2}{16G^* a_2} \left[1 - \left(1 - \frac{T_2}{\mu_2 N_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (7')$$

假設夾緊造成左右兩手指之間的夾角縮減 $\Delta\alpha$ ，相容方程式為

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha \quad (8')$$

此系統仍舊有 8 個方程式(1)~(3)，及(4')~(8')，可解 8 個未知數： N_1 、 T_1 、 N_2 、 T_2 ， $\Delta\alpha_1$ 、 $\Delta\alpha_2$ 、及 O 點位移 u 及 v 。解題步驟與前述平移夾緊情況一樣，首先由(1)~(3)式可得 $N_1=N_2=N$ ，且

$$T_1 = -T_2 = -\tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)N$$

而正向夾緊力 N 可由下式解出

$$N^3 + a_1N^2 + a_2N + a_3 = 0 \quad (19)$$

其中係數分別為

$$a_1 = \frac{9E^*}{2C^3R} \left[\frac{1}{E^*} - \frac{1}{8G^*} \left(\frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} \right) \left(\frac{\mu_1}{\bar{\mu}_1} - \frac{\mu_2}{\bar{\mu}_2} \right) \right]^3 - \frac{3d(\Delta\alpha)}{C}$$

$$a_2 = 3 \left(\frac{d\Delta\alpha}{C} \right)^2$$

$$a_3 = - \left(\frac{d\Delta\alpha}{C} \right)^3$$

其中

$$C = \frac{2d^3}{3E_2I_2}$$

若是對稱夾持，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ；摩擦係數 $-\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 時，係數可化簡為

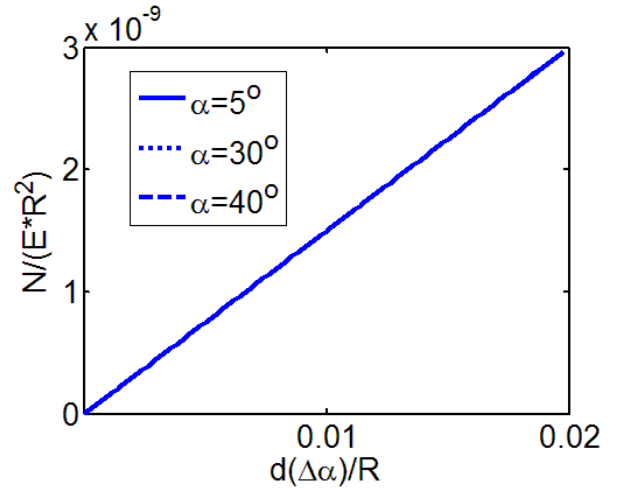
$$a_1 = -\frac{9E_2I_2(\Delta\alpha)}{2d^2} + \left(\frac{3E_2I_2}{2d^3} \right)^3 \left(\frac{9E^*}{2R} \left[\frac{1}{E^*} + \frac{\tan\alpha}{4G^*} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right) \right] \right)^3 \quad (20a)$$

$$a_2 = \frac{27E_2^2I_2^2(\Delta\alpha)^2}{4d^4} \quad (20b)$$

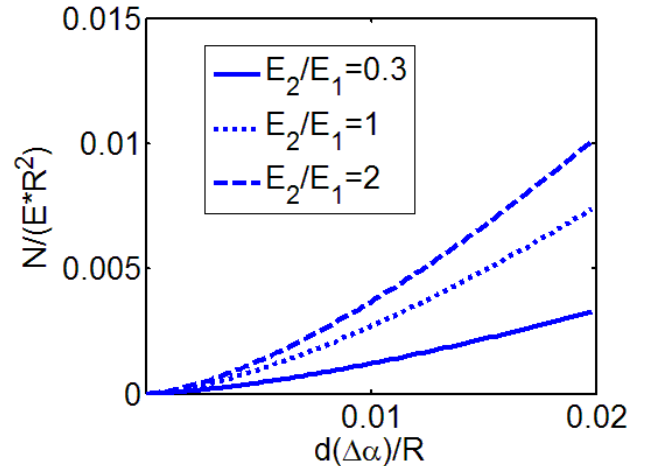
$$a_3 = -\frac{27E_2^3I_2^3(\Delta\alpha)^3}{8d^6} \quad (20c)$$

其中 μ^* 已由(17)式所定義。以下圖七至圖九顯示對稱情況正向力 N 與旋轉夾緊量 $\Delta\alpha$ 的關係，圖七為不同夾角時，正向夾緊力與旋轉角的關係，由此圖可知這關係幾乎不受角度 α 的影響，而且由於手指的面積慣性矩 I_2 數值較小，(20b)及(20c)式所定義的係數 a_2 及 a_3 接近為零，因此 N 僅受(20a)式中 a_1 的影響，呈現線性的 N 與 $\Delta\alpha$ 關係。圖八為不同材料性質時，正向夾緊力與旋轉角的關係。圖八中手指的面積慣性矩 I_2 數值比圖七的數值大，因此顯示出非線性關係。圖九為不同形狀條件時，

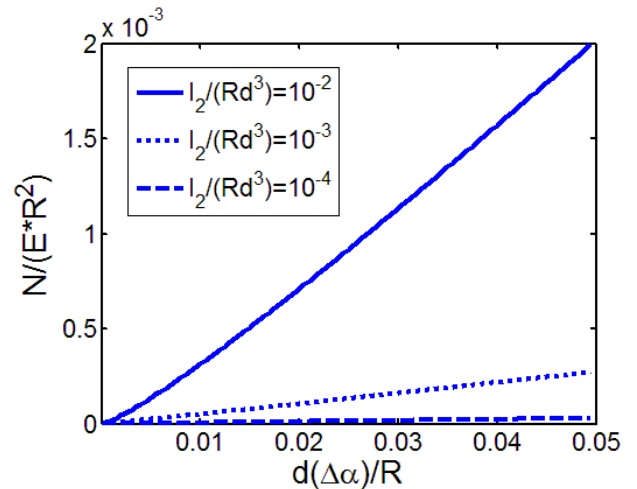
正向夾緊力與旋轉角的關係。



圖七 不同角度時旋轉夾緊量與正向力關係 [$E_2/E_1=3$ ； $I_2/(Rd^3)=10^{-8}$]



圖八 不同材料時旋轉夾緊量與正向力關係 [$\alpha=5^\circ$ ； $I_2/(Rd^3)=1$]



圖九 不同慣性矩時旋轉夾緊量與正向力關係 ($\alpha=5^\circ$ ； $E_2/E_1=2$)

六、兩剛性指之旋轉夾緊

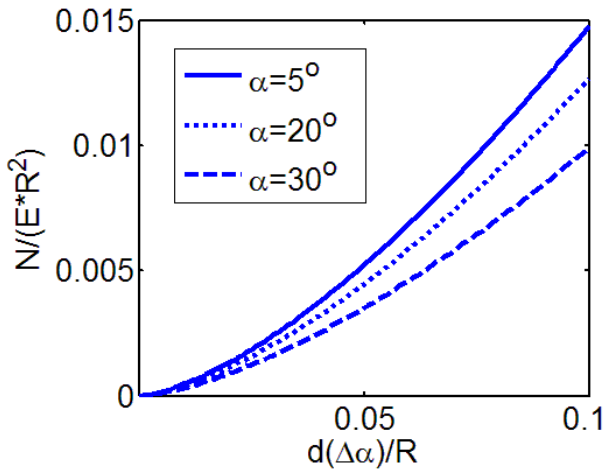
若手指為剛體，可如前述線性夾緊的情況，使 E_2 趨近無限大，可得

$$N = d^{\frac{3}{2}} (\Delta\alpha)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{E^*} - \frac{1}{8G^*} \left(\frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} \right) \left(\frac{\mu_1}{\bar{\mu}_1} - \frac{\mu_2}{\bar{\mu}_2} \right) \right]^{-3/2} \quad (21)$$

若是對稱夾持，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ，且 $-\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 時，

$$N = [d(\Delta\alpha)]^{3/2} \left(\frac{9E^*}{2R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{E^*} + \frac{\tan\alpha}{4G^*} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}} \right) \right]^{-3/2} \quad (22)$$

圖十是剛性手指在對稱情況下，正向夾緊力與旋轉角的關係。



圖十 不同角度時旋轉夾緊量與正向力關係 (剛性手指)

七、結論

本研究求出兩指抓取時夾緊位移量與接觸力之間的關係，此關係是封閉形式的方程式。兩指可以是剛體或是可變形體，而夾緊位移量可以是平移量或是旋轉量。研究結果發現在以上各情況正向力 N 及切線(摩擦)力 T 皆是左右對稱，正向力 N 皆滿足三次多項式方程式，而切線力 T 與正向力 N 都有固定關係[(9)或(10)式]。

八、參考文獻

[1] Bicchi, A., and Kumar, V., Robotic Grasping and Contact: A Review, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*,

San Francisco, CA, Vol.1, pp.24-28, April 2000.

- [2] Reuleaux, F., *Kinematics of Machinery*, Dover, NY, 1963.
- [3] Mason, M. T., and Wang, Y., On the Inconsistency of Rigid-body Frictional Planar Mechanics, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, pp.524-528, April, 1988.
- [4] Wang, Y-T., Kumar, V., and Abel, J., Dynamics of Rigid Bodies with Multiple Frictional Contacts, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, France, pp.2764-2769, May, 1992.
- [5] Dupond, P. E., The Effect of Coulomb Friction on the Existence and Uniqueness of Forward Dynamics Problem, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, France, pp.1442-1447, May, 1992.
- [6] Howard, W.S., and Kumar, V., Minimum Principle for the Dynamic Analysis of Systems with Frictional Contacts. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol.3, pp.437-442, 1993.
- [7] Kraus, P.R., Fredriksson, A., and Kumar, V., Modeling of Frictional Contacts for Dynamic Simulation. *IROS 1997 Workshop on Dynamic Simulation: Methods and Applications*, pp.1-10, 1997.
- [8] Cutkosky, M.R., *Robotic Grasping and Fine Manipulation*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1985.
- [9] Cutkosky, M.R., and Kao, I., Computing and Controlling the Compliance of a Robotic Hand, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.5, No.2, pp.151-165, April 1989.
- [10] Nguyen, V.D., Synthesis of Stable Grasps in the Plane. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, pp.884-889, 1986.
- [11] Nguyen, V.D., Constructing Stable Grasps, *International Journal of Robotics Research*, Vol.8, No.1, pp.26-37, February 1989.

- [12] Howard, W.S., and Kumar, V., Stability of Planar grasps, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, n pt4, pp.2822-2827, 1994.
- [13] Donoghue, J.P., Howard, W.S., and Kumar, V., Stable Workpiece Fixturing, *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE*, Vol.69-2, 20th Design Automation Conference, pp.475-482, 1994.
- [14] Howard, W.S., and Kumar, V., On the Stability of Grasped Objects, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.12, No.6, pp.904-917, December 1996.
- [15] Lin, Q., Burdick, J., and Rimon, E., Computation and Analysis of Compliance in Grasping and Fixturing. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, Vol.1, pp.93-99, April 1997.
- [16] Rimon, E., and Burdick, J.W., Mobility of Bodies in Contact-Part II: How Forces are Generated by Curvature Effects, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.14, No.5, pp.709-717, 1998.
- [17] Sinha, P.R., and Abel, J.M., A Contact Stress Model for Multifingered Grasps of Rough Objects. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.8, No.1, pp.7-22, February 1992.
- [18] Xydas, N., and Kao, I., Modeling of Contact Mechanics With Experimental Results for Soft Fingers. *Proceedings of the IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems*, Victoria, B.C., Canada, Vol.1, pp.488-493, October 1998.
- [19] Xydas, N., and Kao, I., Modeling of Contact Mechanics and Friction Limit Surfaces for Soft Fingers in Robotics, with Experimental Results. *The International Journal of Robotics Research*, Vol.18, No.9, pp. 941-950, September 1999.
- [20] Xydas, N., Bhagavat, M., and Kao, I., Study of Soft-Finger Contact Mechanics Using Finite Elements Analysis and Experiments. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, Vol.3, pp.2179-2184, April 2000.
- [21] Li, Y., and Kao, I., A Review of Modeling of Soft-Contact Fingers and Stiffness Control for Dexterous Manipulation in Robotics. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, Korea, Vol.3, pp.3055-3060, May 2001.
- [22] Kao, I., and Yang, F., Stiffness and Contact Mechanics for Soft Fingers in Grasping and Manipulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.20, No.1, pp.132-135, February 2004.
- [23] Lin, H., Taylor, P.M., and Bull, S.J., A Mathematical Model for Grasping Analysis of Flexible Materials. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 13, pp.185-201, 2005.
- [24] Wu, J.Z., and Dong, R.G., Analysis of the contact interactions between fingertips and objects with different surface curvatures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, Vol.219, No.2, pp.89-103, 2005.
- [25] Wu, J.Z., Welcome, D.E., and Dong, R.G., Three-dimensional finite element simulations of the mechanical response of the fingertip to static and dynamic compressions. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Vol.9, No.1, pp.55-63, February 2006.
- [26] Monkman, G.J., Hesse, S., Steinmann, R., and Schunk, H., *Robot Grippers*, Weinheim : Wiley-VCH, 2007.
- [27] Johnson, K., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, U.K., 1985.
- [28] Faraji, A., Cardou, A., and Gakwaya, A., Effect of Arbitrarily Directed Tangential Force on Elastic Contacting Bodies, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, pp. 1324-1326, 1999.

行政院國家科學委員會補助國內專家學者出席國際學術會議報告

98 年 9 月 30 日

報 告 人 姓 名	劉昭華	服 務 機 關 及 職 稱	淡江大學機械與機電工程 學系教授
會 議 時 間 地 點	98 年 9 月 7 日起至 98 年 9 月 11 日止 葡萄牙里斯本	本 會 核 定 補 助 文 號	
會 議 名 稱	(中文) 第 7 屆歐洲力學學會固體力學研討會 (英文) 7 th EUROMECH Solid Mechanics Conference		
發 表 論 文 題 目	(中文) 尋找並聯式機械手臂之正向奇異位置 (英文) Locating Direct Kinematic Singular Positions of Parallel Manipulators		
<p>參加會議經過：</p> <p>「第 7 屆歐洲力學學會固體力學研討會」，(簡稱 ESMC2009)是由「歐洲力學協會」(European Mechanics Society)舉辦，會議於 2009 年 9 月 7 日起至 9 月 11 日止在葡萄牙里斯本的 Instituto Superior Técnico 舉行。這次會議共有將近兩千篇論宣讀，可分為以下二十五個主題：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 人類運動之生物力學(Biomechanics of Human Locomotion) 2. 複合材料(Composite Materials) 3. 工業成型加工之電腦模擬(Computer Modeling of Industrial Forming Process) 4. 接觸力學(Contact Mechanics) 5. 損害及破裂(Damage and Fracture) 6. 稠密粒狀流的力量鏈波動及壅塞(Force Chain Fluctuations and Jamming in Dense Granular Flows) 7. 固體力學程序之影像處理及視覺(Image Processing and Visualization in Solid Mechanics Process) 8. 材料力學之宏觀、微觀、及奈米方法(Macro-micro-nano Approaches in Material Mechanics) 9. 多孔及網狀生物結構力學[Mechanics of Cellular and Network-like (Bio)Materials] 10. 生物材料模型(Modeling of Biological Materials) 11. 複合及適應性結構的模型、模擬、與測試(Modeling, Simulation, and Testing of Composite and Adaptive Structures) 12. 多體動力學(Multibody Dynamics) 13. 延展性及脆性固體之多尺度損壞模型：近期發展及未來趨勢(Multiscale Modeling of Ductile and Brittle Damage in Solids: Recent Development and Future Trends) 14. 積極磁性及電性材料之非線性效果(Nonlinear Effects in Magneto- and Electro-Active Materials) 			

15. 動力系統與工程之非線性局部化及標的能量轉換(Nonlinear Localization and Targeted Energy Transfer in Dynamic System and Engineering)
16. 非線性振動及聲學(Nonlinear Vibrations and Acoustics)
17. 非平滑動力學(Nonsmooth Dynamics)
18. 最佳化方法及有限元素模擬在工業金屬成型問題之應用 (Optimization Methodologies and Finite Element Simulation Applied to Metal Forming Industrial Problems)
19. 材料力學量測與分析的機率模式(Probability Models for Measurements and Analysis in Mechanics of Materials)
20. 動力、控制、與振動流態學(Kinetics, Control, and Vibrorheology)
21. 固體波動、非破壞檢測、及結構健康監測(Waves in Solids, Nondestructive Evaluation and Structural Health Monitoring)
22. 鋼結構穩定及非線性表現(Stability and Nonlinear Behavior of Steel Structures)
23. 有限變形下之固體穩定(Stability of Solids under Finite Deformation)
24. 材料熱力學之進展(Progress in Thermomechanics of Materials)
25. 車輛動力學(Vehicle Dynamics)

本人的報告內容是屬於多體動力學(Multibody Dynamics)，除了聆聽這方面的論文之外，亦聆聽車輛動力學的論文發表。而自己的論文發表是在9月9日下午，發表之後有兩位學者提出問題，我都已回答。

與會心得：

歐洲學者在固體力學的研究非常紮實，有好幾位德國學者從事非線性數值分析，例如來自 Fraunhofer ITWM, Kaiserslautern 的 Holger Lang 研究細長桿件(rod)的幾何非線性問題，來自 Kaiserslautern Universitat 的 Rene Pinnau 研究車輛動力學的模態縮減(Model Reduction)問題，目前他們的研究成果尚未超越有限元素套裝軟體，例如 ABAQUS，因此只能在研討會發表，但是他們寧可從頭建立自己實驗室的軟體，數年之後將會在自己有興趣的問題上超越套裝軟體，不受套裝軟體的約束，這點值得鼓勵。

攜回資料名稱及內容：

1. ESMC 2009 Book of Abstracts: Lectures and General Sessions.
2. ESMC 2009 Book of Abstracts: Mini-Symposia.

建議：

近來固體力學的研究多針對非線性系統或微觀力學，需要較長時期且穩定的研究，才能有結果，期望國科會對願意長期從事固體力學領域研究之學者能與支持。