

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

共形滾動接觸之有限元素分析

Finite Element Analysis of Conformal Rolling Contact

計畫編號：NSC 96-2221-E-032-043

執行期限：96年8月1日至97年7月31日

計畫主持人：劉昭華 淡江大學機械與機電工程學系

摘要

本研究是使用有限元素法分析兩圓柱間的共形滾動接觸(conformal rolling contact)問題。首先推導出運動關係式(kinematic relations)，並將節點應力的接觸條件轉換為節點位移的多點拘束條件，並且加入有限元素法系統中求解。本研究所發展出之方法將可求出共形靜態接觸下接觸區域大小及接觸區域內的應力分佈，並求出正向摩擦接觸與滾動接觸情況下的應力分佈。

關鍵字: 共形接觸、滾動接觸、多點拘束條件、有限元素法

一前言

共形接觸(conformal contact)是指兩形狀吻合物體互相接觸。互相配合的形狀造成較大的接觸區域，因而赫氏接觸理論(Hertz Theory)並不適用。共形接觸出現在各種機械構件之中，例如滑件與滑槽(slides and slots)，插銷與圓孔(pin and hole)，以及各形式的夾具(fixtures)。本研究所針對的情況是圓柱與圓孔間的滾動接觸(rolling contact)，如圖1所示。這種接觸通常發生在插銷與圓孔，或是未加軸承的軸(shaft)與圓孔間，插銷(或軸)與圓孔間有空隙(clearance)，而且互相轉動。

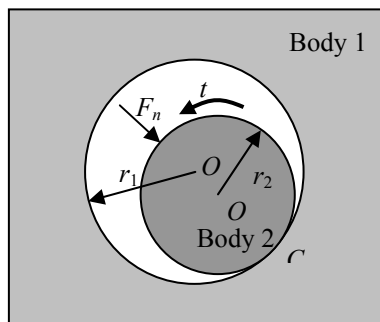


圖1圓柱與圓孔間的共形滾動接觸

若以兩接觸體間的相互運動來分類，接觸問題可分為靜態接觸(static contact)，滑動接觸(sliding contact)，與滾動接觸(rolling contact)。當插銷(或軸)在高速轉動，而且當插銷與圓孔間充分潤滑的狀態，兩者間可為滑動接觸，這時圖1的接觸點C保持在固定位置。但在剛啟動，低轉速，或是並未充分潤滑的狀態，兩者間可能是在滾動接觸狀態，這時接觸點C可沿圓周改變位置。本研究將針對未潤滑的接觸狀態，推導出共形接觸的運動關係式(kinematic relations)，並且利用有限元素法求出滾動與滑動接觸狀態時的接觸區域大小及接觸應力分佈。

目前共形接觸的研究成果包括Persson [1] 探討圓盤在一無限大平面內的孔洞間的接觸，推導出接觸應力的封閉解(closed-form solutions)。Lin et.al. [2] 探討插銷與帶有裂紋的圓孔接觸，求出造成降伏所需要的外力，以及裂紋的應力強度因子。Hou and Hills [3] 針對同樣的情況，但插銷與圓孔可為不同材質，而且插銷在啟始未受力狀態可為空隙(clearance)接觸或緊密配合(interference fit)狀態。Solodovnikov [4] 將插銷視為剛體，推導出插銷與圓孔接觸的邊界條件，並以有限元素法求出接觸應力。以上這些結果皆是無摩擦狀態的靜態接觸，至今並未有滾動或滑動的共形接觸研究成果。

而目前所有的滾動接觸研究成果皆針對非共形接觸(non-conformal contact)狀態。分析方法可分為以下兩種方式：非線性變分原理(nonlinear variational principles)及積分方程式(integral equations)，敘述如下。

非線性變分原理包括Duvaut and Lions [5]及Zhong [6]是以變分不等式(variational inequalities)來探討；Fredriksson [7]、Padovan [8]、Lee [9]、Bathe and Chaudhary [10]及Zhong [6]是以變分等式(variational equalities)來處理；而Zochowsky and Mylinsky [11]提出以擬似靜態變分法(quasi-static variational approach)處理車輪與鐵軌的接觸問題。

至於以積分方程式處理滾動接觸的研究結果，最早或可追溯至Carter [12]，他在1926年即已求出兩個圓柱在滾動接觸狀態的解析解，至今許多數值解仍須藉助這解答以驗證結果。Johnson [13]與Kalker [14]則推導出滾動接觸時的運動關係式(kinematic relations)，其中包括位移量(displacement)及速度(rolling velocity)的關係。Liu and Paul [15]則藉助Cerruti [16]所導出的基本解(fundamental solutions)，代入Johnson [13]所推導的運動關係式中，變成切線應力(tangential stresses)的積分方程式，並求出微小自旋量(small spins)情況下的解。在以積分方程式求解的領域中，最完整的解是Kalker [17][18]，他所發展出的程式CONTACT，能夠針對各種形式的接觸體，可同時具有軸向(longitudinal)，側向(lateral)及旋轉方向(spin)的變形，並且不僅處理穩態(steady state)還能處理暫態(transient state)的情況。不過，由於需要較多元素，計算時間冗長，而且無法處理塑性變形問題。

以上所述的兩種分析方法之中，非線性變分原理的理論嚴謹，已經被許多有限元素商業軟體採用。但其缺點是非線性變分原理牽涉較高深數學，使用套裝軟體之工程師通常並不了解此數學原理，而且有限元素法是以節點位移(nodal displacements)當作主要變數，因此應力邊界條件(stress boundary conditions)只能大致上滿足。相較之下積分方程式的數學較為直接明瞭，此方法亦配合使用在邊界元素法(boundary element methods)的套裝軟體之中，但此方法的解題過程須藉助基本解(fundamental solutions)，而目前已有

的基本解僅適用在特殊外形的情況，許多幾何形狀及特殊材料的基本解尚未找到。針對此點，徐正陽[19]利用有限元素法中的「多點拘束條件」(multiple point constraints)，模擬靜態接觸時的位移及應力邊界條件(displacement and stress boundary conditions)，將之加入有限元素分析程序求解接觸應力。這種方法的特色是能精確模擬應力邊界條件，無須使用基本解，而且並未使用高深數學原理。王樂榮[20]將此技巧推展至同材質的滑動及滾動接觸，而蔡岸祺[21]則處理異材質間的滾動及滑動接觸。本研究是期望將「多點拘束條件」技巧拓展至共形滾動接觸的情況。由於共形滾動接觸狀態下的運動關係式至今尚未推導出，本論文將推導此關係式。

二共形滾動接觸之運動關係式

本研究針對圓弧表面的共形滾動接觸(如圖2所示)，共形滾動接觸之運動關係式(kinematic relations)是在尤拉座標系(Euler coordinates)中推導，亦即假設接觸區域在固定位置，而材料“流入”接觸區域之內，如圖3所示。

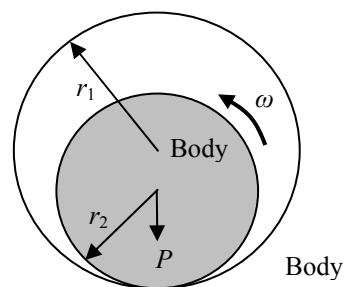


圖2 二維彈性圓柱體模型

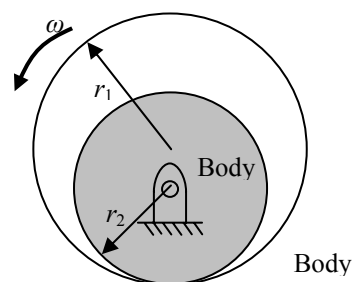


圖3 以尤拉座標表示之模型

首先考慮物體2接觸區域內任意一點C(參見圖4)的速度， V_θ 為假設沒有變形時物體1及物體2上任一點的滾動速度， $\Delta V_{2\theta}$ 是因為物體2變形使得圓周長度改變而造成物體2上C點速度的變化量，若物體2上C點在 θ 方向的彈性位移量為 $u_{2\theta}$ ，則 $\frac{du_{2\theta}}{dt}$ 則是因彈性變形引起的速度，因此物體2上C點的速度為：

$$v_{2\theta} = V_\theta + \Delta V_{2\theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = V_\theta + \Delta V_{2\theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial \theta} \omega_2 \quad (1a)$$

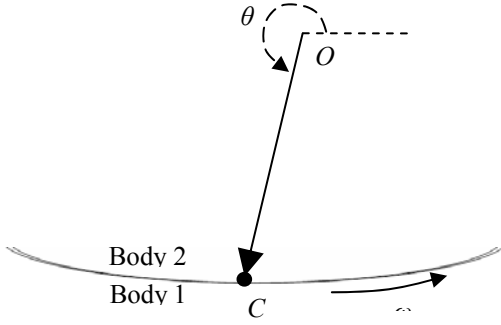


圖5 接觸區域放大圖

同理，物體1上C點的速度：

$$v_{1\theta} = V_\theta + \Delta V_{1\theta} + \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = V_\theta + \Delta V_{1\theta} + \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial \theta} \omega_1 \quad (1b)$$

(1a)及(1b)式可寫成

$$v_{2\theta} = V_\theta + \Delta V_{2\theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{r_2 \partial \theta} V_\theta \quad (2a)$$

$$v_{1\theta} = V_\theta + \Delta V_{1\theta} + \frac{\partial u_{1\theta}}{r_1 \partial \theta} V_\theta \quad (2b)$$

再將(2a)式減(2b)式，可得

$$v_{2\theta} - v_{1\theta} = \Delta V_{2\theta} - \Delta V_{1\theta} + V_\theta \left(\frac{\partial u_{2\theta}}{r_2 \partial \theta} - \frac{\partial u_{1\theta}}{r_1 \partial \theta} \right) \quad (3a)$$

式每一項同除 V_θ ，可得

$$\frac{v_{2\theta} - v_{1\theta}}{V_\theta} = \frac{\Delta V_{2\theta} - \Delta V_{1\theta}}{V_\theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{r_2 \partial \theta} - \frac{\partial u_{1\theta}}{r_1 \partial \theta} \quad (3b)$$

定義滑動量(slippage) S 為 C_2 點相對於 C_1 點無因次化後的速度，

$$S = \frac{v_{2\theta} - v_{1\theta}}{V_\theta} \quad (4a)$$

而潛變率(creep ratio) ν 為兩接觸體圓周改變所造成速度差，無因次化之後可寫成，

$$\xi = \frac{\Delta V_{2\theta} - \Delta V_{1\theta}}{V_\theta} \quad (4b)$$

兩彈性體間的潛變率 ν 之可視為彈性變形所增加的圓周長度與未變形前之圓周長度的比值，此值雖十分微小，但仍會影響附著區與滑動區的分佈。(3b)式可寫成

$$S = \xi + \left(\frac{\partial u_{2\theta}}{r_2 \partial \theta} - \frac{\partial u_{1\theta}}{r_1 \partial \theta} \right) \quad (5)$$

以上(5)式即為共形滾動接觸之運動關係式，以下是將(5)式之偏導數表示成直角x-y座標系內之應變 ε_{xx} 、 ε_{yy} 、 γ_{xy} 的形式。

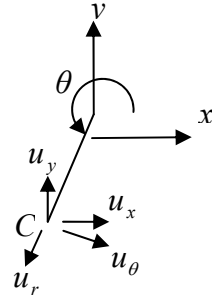


圖5 極座標示意圖

圖5顯示C點在直角座標系的位移 (u_x, u_y) 及在極座標的位移 (u_r, u_θ) ，兩者間的關係式為

$$\begin{cases} u_r \\ u_\theta \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} \quad (6)$$

由(6)式我們推導出切線方向位移的微分為

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \sin \theta - u_x \cos \theta \\ &\quad + \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \cos \theta - u_y \sin \theta \end{aligned} \quad (7a)$$

使用連鎖定律(chain rule)，可將上式對 θ 的微分變成對 x 及 y 的微分，因為 $x = r \cos \theta$ 及 $y = r \sin \theta$ ，上式可寫成

三共形滾動接觸條件

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u_x}{\partial y} (r \cos \theta) \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} \\ &= \frac{\partial u_y}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u_y}{\partial y} (r \cos \theta) \end{aligned} \quad (7c)$$

將(7b)、(7c)式代入(7a)式整理，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= r \sin^2 \theta \frac{\partial u_x}{\partial x} - r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_x}{\partial y} - u_x \cos \theta \\ &\quad - r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_y}{\partial x} + r \cos^2 \theta \frac{\partial u_y}{\partial y} - u_y \sin \theta \end{aligned} \quad (7d)$$

再整理上式後可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= r \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + r \varepsilon_{yy} \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{r}{2} \sin 2\theta \gamma_{xy} - u_x \cos \theta - u_y \sin \theta \end{aligned} \quad (8)$$

因此物體 2 及物體 1 之位移與應變關係式如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{2\theta}}{r_2 \partial \theta} &= \varepsilon_{2xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{2yy} \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{\gamma_{2xy}}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{r_2} (u_{2x} \cos \theta + u_{2y} \sin \theta) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1\theta}}{r_1 \partial \theta} &= \varepsilon_{1xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{1yy} \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{\gamma_{1xy}}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{r_1} (u_{1x} \cos \theta + u_{1y} \sin \theta) \end{aligned} \quad (9b)$$

將(9a)、(9b)式代入(5)式後，即得到另一種形式之運動關係式。

$$\begin{aligned} S &= v + \sin^2 \theta (\varepsilon_{2xx} - \varepsilon_{1xx}) + \cos^2 \theta (\varepsilon_{2yy} - \varepsilon_{1yy}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\gamma_{2xy} - \gamma_{1xy}) - \cos \theta \left(\frac{u_{2x}}{r_2} - \frac{u_{1x}}{r_1} \right) \\ &\quad - \sin \theta \left(\frac{u_{2y}}{r_2} - \frac{u_{1y}}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

若兩滾動接觸物體受正向力作用，則會形成接觸區域(圖6)。有時因為加速(或減速)滾動，造成有側向摩擦力在接觸區傳遞，若圖6中物體2開始加速旋轉，則在接觸區內會有分佈力 q_2 作用在物體2之上以阻止其加速旋轉，而物體1則受到大小相等方向相反之分佈力 q_1 ，這狀態稱為牽引滾動(tractive rolling)。本研究假設有切線應力(摩擦力)在接觸區域內傳遞。這時接觸面在摩擦力的作用下將會分為兩個區域：附著區(stick region)與滑動區(slip region)(如圖6)，在附著區內兩接觸點的速度相等，而在滑動區內的兩接觸點間會相互滑動。附著區必須發生在接觸前緣(leading edge)，滑動區則出現在接觸後緣(trailing edge)[15]。以下我們將討論滾動接觸狀態下之應力及位移邊界條件(或稱為接觸條件)。

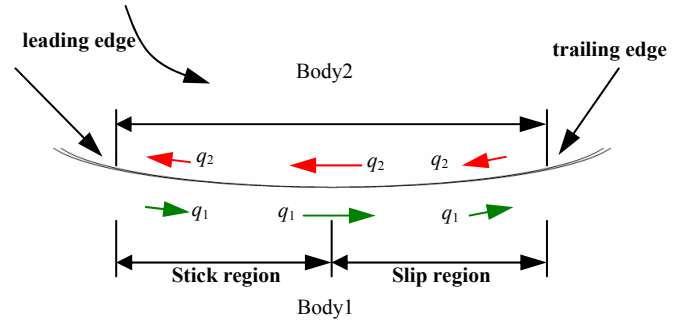


圖6 接觸區域運動示意圖

1. 當節點 j 及節點 k 彼此接觸時(如圖7)，其正向位移接觸條件如下

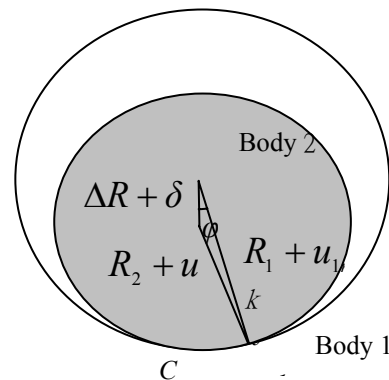


圖7 圓孔與插銷的半徑關係圖

圖7中 $\Delta R = R_1 - R_2$ 是圓孔與插銷的半徑差， δ 是插銷的下壓量，其數值相對半徑而言都很小。使用餘弦定理可得

$$(R_1 + u_{1r})^2 + (\Delta R + \delta)^2 - 2(R_1 + u_{1r})(\Delta R + \delta)\cos\varphi = (R_2 + u_{2r})^2 \quad (11)$$

上式中 $(\Delta R + \delta)^2$ 與其他項比較後其數值較小故忽略不計，再將上式同除 $(R_1 + u_{1r})$ ，整理後可得

$$\begin{aligned} & (R_1 + u_{1r}) - 2(\Delta R + \delta)\cos\varphi \\ &= \frac{(R_2 + u_{2r})^2}{(R_1 + u_{1r})} = (R_2 + u_{2r}) \frac{(R_2 + u_{2r})}{(R_1 + u_{1r})} \quad (12) \\ &= \frac{R_2}{R_1} (R_2 + u_{2r}) \frac{1 + u_{2r}/R_2}{1 + u_{1r}/R_1} \end{aligned}$$

其中 $(1 + u_{1r}/R_1)^{-1} = 1 - u_{1r}/R_1 + \text{高階項}$ ，忽略高階項後代入上式，整理後可得

$$\begin{aligned} & (R_1 + u_{1r}) - 2(\Delta R + \delta)\cos\varphi \\ &= \frac{R_2}{R_1} \left(R_2 + 2u_{2r} - \frac{R_2}{R_1} u_{1r} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

上式中 u_{1r} 與 u_{2r} 相對於圓孔和插銷的半徑值很小，相乘項和平方項可忽略，再將上式整理可得

$$\begin{aligned} & \left[1 + (R_2/R_1)^2 \right] u_{1r} - 2(R_2/R_1)u_{2r} \\ &= 2\cos\varphi(\delta + \Delta R) - \Delta R \left[1 + (R_2/R_1) \right] \quad (14) \end{aligned}$$

若 $\Delta R \approx 0$ ，亦即 $R_2/R_1 \rightarrow 1$ ，則上式成為

$$u_{1r} - u_{2r} = \delta \cos\varphi - \Delta R(1 - \cos\varphi) \quad (14a)$$

Persson[1]使用(14a)式從事分析，亦可參考Johnson[22]。由(6)式可知，

$$u_r = \cos\theta u_x(\theta) + \sin\theta u_y(\theta)$$

代入(14)式可得正向位移接觸條件

$$\begin{aligned} & \left[1 + (R_2/R_1)^2 \right] (u_{1x} \cos\theta + u_{1y} \sin\theta) \\ & - 2(R_2/R_1)(u_{2x} \cos\theta + u_{2y} \sin\theta) \quad (15) \\ &= 2\cos(\theta - 3\pi/2)(\delta + \Delta R) - \Delta R \left[1 + (R_2/R_1) \right] \end{aligned}$$

上式中已利用 $\varphi = \theta - 3\pi/2$

2. 兩節點之正向應力及剪應力必須相等，即

$$(\sigma_n)_j = (\sigma_n)_k \quad (16a)$$

$$(\tau_t)_j = (\tau_t)_k \quad (16b)$$

或

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx})_j \cos^2\theta + (\sigma_{yy})_j \sin^2\theta \\ & + 2(\tau_{xy})_j \sin\theta \cos\theta \quad (16c) \\ &= (\sigma_{xx})_k \cos^2\theta + (\sigma_{yy})_k \sin^2\theta \\ & + 2(\tau_{xy})_k \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} & \left[(\sigma_{yy})_j - (\sigma_{xx})_j \right] \sin\theta \cos\theta \\ & + (\tau_{xy})_j (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (16d) \\ &= \left[(\sigma_{yy})_k - (\sigma_{xx})_k \right] \sin\theta \cos\theta \\ & + (\tau_{xy})_k (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned}$$

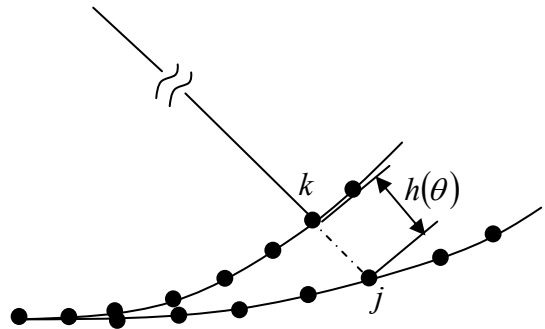


圖8接觸區元素放大圖

若考慮正向無摩擦接觸時，接觸節點之剪應力為零，即

$$(\tau_t)_j = (\tau_t)_k = 0 \quad (17a)$$

以下介紹滑動區與附著區之各項限制條件。

附著區：

若接觸後在附著區，則(5)式的滑動量 $S=0$ ，方程式每一項對 θ 積分，積分範圍從接觸前緣之 θ_0 值開始，因此

$$\int_{\theta_0}^{\theta} 0 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} v d\theta + \frac{1}{r_2} [u_{2\theta}(\theta) - u_{2\theta}(\theta_0)] - \frac{1}{r_1} [u_{1\theta}(\theta) - u_{1\theta}(\theta_0)]$$

上式積分後之結果為

$$0 = v(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_2} [u_{2\theta}(\theta) - u_{2\theta}(\theta_0)] - \frac{1}{r_1} [u_{1\theta}(\theta) - u_{1\theta}(\theta_0)] \quad (5a)$$

(6)式代入(5a)成為

$$0 = v(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_2} [-\sin\theta u_{2x}(\theta) + \cos\theta u_{2y}(\theta) + \sin\theta_0 u_{2x}(\theta_0) - \cos\theta_0 u_{2y}(\theta_0)] - \frac{1}{r_1} [-\sin\theta u_{1x}(\theta) + \cos\theta u_{1y}(\theta) + \sin\theta_0 u_{1x}(\theta_0) - \cos\theta_0 u_{1y}(\theta_0)] \quad (18a)$$

由於附著區內剪應力小於摩擦力，因此

$$(\tau_t)_j \leq \mu(\sigma_n)_j \quad (18b)$$

滑動區：

若圖8中的節點 j 及節點 k 在接觸後在滑動區內，根據庫倫摩擦定律，節點 j 之剪應力等於摩擦力，因此

$$(\tau_t)_j = \mu(\sigma_n)_j \quad (19a)$$

亦即

$$\begin{aligned} & [(\sigma_{yy})_j - (\sigma_{xx})_j] \sin\theta \cos\theta + (\tau_{xy})_j \cos 2\theta \\ & = \mu [(\sigma_{xx})_j \cos^2\theta + (\sigma_{yy})_j \sin^2\theta \\ & + (\tau_{xy})_j \sin 2\theta] \end{aligned} \quad (19b)$$

又節點滑動方向與剪應力方向相反，因此

$$\frac{\tau_t}{|\tau_t|} = -\frac{S}{|S|} \quad (20a)$$

亦即

$$\frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta}{|(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta|} = -\frac{S}{|S|} \quad (20b)$$

四、多點拘束條件處理共形滾動接觸條件

在假設位移的有限元素法中，其變數都是節點位移(nodal displacement)，於是處理節點的限制條件(constraint conditions)都須以節點位移表示，若只限制一個自由度的位移量，稱之為單點拘束條件(single point constraint)，若是包含多個自由度的限制條件，則稱之為多點拘束條件(multiple point constraint, MPC)。而以上第3部分所得到的應力邊界條件，並不能直接使用，以下探討將這些的應力邊界條件，換成節點位移的多點拘束條件。

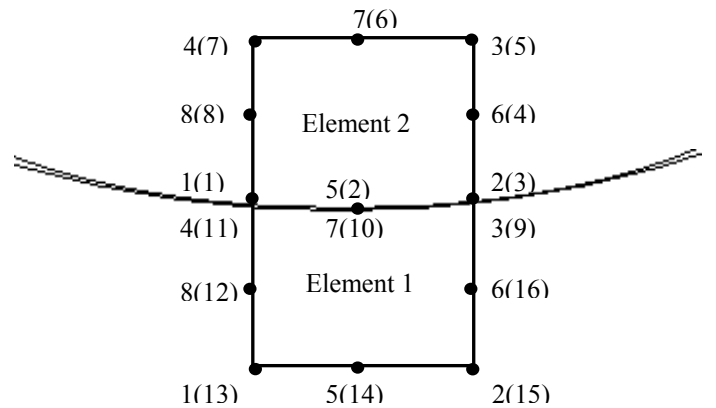


圖9 接觸區中的上下兩元素括號內為絕對節點編號

徐正陽[19]及王樂榮[20]利用高斯積分點應力外插方式，推導出位移的多點拘束條件，以圖9為例說明。其中元素2的節點1、2、3分別與元素1的節點11、10、9接觸，假設所需成立的應力條件為元素1的節點9與元素2的節點3正向應力相等[(12a)式]。有限元素應力與位移關係式為

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (21)$$

上式中

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]^T$$

為節點應力向量(nodal stress vector)， \mathbf{E} 為材料系數矩陣， \mathbf{B} 為應變矩陣(strain matrix)，且 \mathbf{d} 為節點位移向量(nodal displacement vector)。但此關係式所計算出來的應力值較不精確，其應力最精確的位置在高斯積分點，因此節點應力的數值是將高斯積分點應力外插求得，以 3×3 高斯積分為例，元素2節點2的應力可以寫為

$$(\sigma_{2yy})_2 = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_2, \eta_2) (\sigma_{yy})_i \quad (22a)$$

元素1節點3的應力為

$$(\sigma_{1yy})_3 = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) (\sigma_{yy})_i \quad (22b)$$

其中 $(\sigma_{yy})_i$ 為第 i 個高斯點的應力，而 N_i 是外插函數。元素1的高斯積分點的應力為

$$(\sigma_{yy})_i = \mathbf{E}_{1yy} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (23a)$$

同理

$$(\sigma_{xx})_i = \mathbf{E}_{1xx} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (23b)$$

$$(\tau_{xy})_i = \mathbf{E}_{1xy} \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (23c)$$

其中， \mathbf{B}_1 為元素1的應變矩陣， \mathbf{d}_1 為元素1的節點位移向量， \mathbf{E}_1 為元素1的材料性質矩陣， \mathbf{E}_{1yy} 是 \mathbf{E}_1 矩陣對應於 $(\sigma_{yy})_i$ 的部分(亦即

第2列)，假設在平面應變，並且使用等向性材料情況下

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{xx} \\ \mathbf{E}_{yy} \\ \mathbf{E}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

將(23)式代入(22b)式，可得

$$(\sigma_{1yy})_3 = \mathbf{E}_{1yy} \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (25a)$$

$$(\sigma_{1xx})_3 = \mathbf{E}_{1xx} \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (25b)$$

$$(\tau_{1xy})_3 = \mathbf{E}_{1xy} \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (25c)$$

因此(16c)式可改寫成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) [\mathbf{E}_{1xx} \mathbf{B}_1 \cos^2 \theta + \mathbf{E}_{1yy} \mathbf{B}_1 \sin^2 \theta \\ & + 2\mathbf{E}_{1xy} \mathbf{B}_1 \sin \theta \cos \theta] \mathbf{d}_1 \\ & = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_2, \eta_2) [\mathbf{E}_{2xx} \mathbf{B}_2 \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{2yy} \mathbf{B}_2 \sin^2 \theta + 2\mathbf{E}_{2xy} \mathbf{B}_2 \sin \theta \cos \theta] \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (26)$$

同理， $(\tau_{xy})_1 = \mu(\sigma_n)_1$ 轉換成位移的多點拘束條件為

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_3, \eta_3) [(\mathbf{E}_{1yy} - \mathbf{E}_{1xx}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \mathbf{E}_{1xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ & = \mu \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_2, \eta_2) [\mathbf{E}_{1xx} \cos^2 \theta + \mathbf{E}_{1yy} \sin^2 \theta \\ & + 2\mathbf{E}_{1xy} \cos \theta \sin \theta] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \end{aligned} \quad (27a)$$

滾動接觸除了位移與應力的限制條件外，在接觸區內還有接觸面節點的運動關係式(10)式，這關係式亦是限制條件，為轉換這項條件為多點拘束條件，首先由應變-位移關係式可得

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B}_x \mathbf{d} \quad (28a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{B}_y \mathbf{d} \quad (28b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{B}_{xy} \mathbf{d} \quad (28c)$$

上式中 \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y , 及 \mathbf{B}_{xy} 分別為應變矩陣 \mathbf{B} 的第1、第2、及第3列，維度為 1×16 。將(25)式代入(10)式，可得

$$\begin{aligned} S = & \nu + \sin^2 \theta (\mathbf{B}_{2x} \mathbf{d}_2 - \mathbf{B}_{1x} \mathbf{d}_1) \\ & + \cos^2 \theta (\mathbf{B}_{2y} \mathbf{d}_2 - \mathbf{B}_{1y} \mathbf{d}_1) \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\mathbf{B}_{2xy} \mathbf{d}_2 - \mathbf{B}_{1xy} \mathbf{d}_1) \\ & - \cos \theta \left(\frac{u_{2x}}{r_2} - \frac{u_{1x}}{r_1} \right) - \sin \theta \left(\frac{u_{2y}}{r_2} - \frac{u_{1y}}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

此式即為運動關係式[(10)式]之多點拘束條件。因此，接觸區內所有邊界條件整理如下：

附著區：

$$\begin{aligned} & \left[1 + (R_2/R_1)^2 \right] (u_{1x} \cos \theta + u_{1y} \sin \theta) \\ & - 2(R_2/R_1) (u_{2x} \cos \theta + u_{2y} \sin \theta) \\ & = 2 \cos(\theta - 3\pi/2) (\delta + \Delta R) - \Delta R (1 + R_2/R_1) \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [\mathbf{E}_{1xx} \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{1yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{1xy} \sin 2\theta] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ & = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [\mathbf{E}_{2xx} \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{2yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{2xy} \sin 2\theta] \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (30b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [(\mathbf{E}_{1yy} - \mathbf{E}_{1xx}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \mathbf{E}_{1xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ & = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [(\mathbf{E}_{2yy} - \mathbf{E}_{2xx}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \mathbf{E}_{2xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (30c)$$

$$\begin{aligned} & \nu(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_2} [-\sin \theta u_{2x}(\theta) + \cos \theta u_{2y}(\theta) \\ & + \sin \theta_0 u_{2x}(\theta_0) - \cos \theta_0 u_{2y}(\theta_0)] \\ & - \frac{1}{r_1} [-\sin \theta u_{1x}(\theta) + \cos \theta u_{1y}(\theta) \\ & + \sin \theta_0 u_{1x}(\theta_0) - \cos \theta_0 u_{1y}(\theta_0)] = 0 \end{aligned} \quad (30d)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [(\mathbf{E}_{1yy} - \mathbf{E}_{1xx}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \mathbf{E}_{1xy} \cos 2\theta] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ & \leq \mu \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [\mathbf{E}_{1xx} \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{1yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{1xy} \sin 2\theta] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \end{aligned} \quad (30e)$$

滑動區：

$$\begin{aligned} & \left[1 + (R_2/R_1)^2 \right] (u_{1x} \cos \theta + u_{1y} \sin \theta) \\ & - 2(R_2/R_1) (u_{2x} \cos \theta + u_{2y} \sin \theta) \\ & = 2 \cos(\theta - 3\pi/2) (\delta + \Delta R) - \Delta R (1 + R_2/R_1) \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [\mathbf{E}_{1xx} \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{1yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{1xy} \sin 2\theta] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \\ & = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [\mathbf{E}_{2xx} \cos^2 \theta \\ & + \mathbf{E}_{2yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{2xy} \sin 2\theta] \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (31b)$$

$$\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) \left[(\mathbf{E}_{1yy} - \mathbf{E}_{1xx}) \sin \theta \cos \theta + \mathbf{E}_{1xy} \cos 2\theta \right] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \quad (31c)$$

$$= \mu \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) \left[\mathbf{E}_{1xx} \cos^2 \theta + \mathbf{E}_{1yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{1xy} \sin 2\theta \right] \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1$$

$$\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) \left[(\mathbf{E}_{2yy} - \mathbf{E}_{2xx}) \sin \theta \cos \theta + \mathbf{E}_{2xy} \cos 2\theta \right] \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 \quad (31d)$$

$$= \mu \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) \left[\mathbf{E}_{2xx} \cos^2 \theta + \mathbf{E}_{2yy} \sin^2 \theta + \mathbf{E}_{2xy} \sin 2\theta \right] \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) (\mathbf{D}_{1xy} \sin 2\theta + \mathbf{E}_{1xy} \cos 2\theta) \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1}{\left| \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) (\mathbf{D}_{1xy} \sin 2\theta + \mathbf{E}_{1xy} \cos 2\theta) \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 \right|} = -\frac{S}{|S|} \quad (31e)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) (\mathbf{D}_{2xy} \sin 2\theta + \mathbf{E}_{2xy} \cos 2\theta) \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2}{\left| \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) (\mathbf{D}_{2xy} \sin 2\theta + \mathbf{E}_{2xy} \cos 2\theta) \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 \right|} = -\frac{S}{|S|} \quad (31f)$$

上式中 S 以(29)代入，且 $\mathbf{D}_{kxy} = (\mathbf{E}_{kyy} - \mathbf{E}_{kxx})/2$ ，其中 $k=1$ 或 2 。以上(30a-d)、(31a-d)為節點位移 \mathbf{d}_1 、 \mathbf{d}_2 之多點限制條件，而(30e)、(31e)與(31f)式作為結果驗證之用。

以上限制條件本論文使用拉格郎齊乘數(Lagrange Multiplier)的方式，加入到有限元素法的系統剛性矩陣求解。

五分析程序

本研究於是撰寫MATLAB程式，將先由ANSYS套裝軟體建立網格，將節點位置、元

素包含之節點編號匯入MATLAB程式內進行分析。

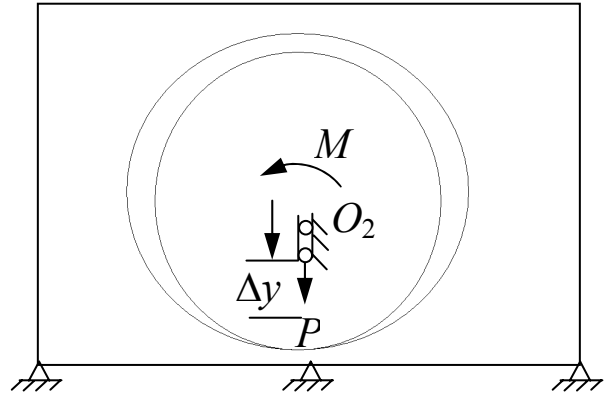


圖10 有限元素分析模型

分析步驟：

分為正向(normal)及切線方向(tangential)兩個部分進行分析，詳細步驟條列如下：

正向分析：首先考慮無摩擦滑動狀態，假設接觸區域長度，反求出正確的強制位移量 Δy ，及作用力 P (圖10)。

1. 先假設接觸區域長度 $2a$ ，並在區域內每對接觸節點加入無摩擦接觸之多點限制條件，亦即(15)、(26)及(27b)式。
2. 調整 Δy 大小重複執行程式，直到接觸區域內之正向應力皆為負值，而接觸區域最外緣邊界節點之正向應力為零，則此 Δy 即為造成假設之接觸區域的正確強制位移量。造成此接觸區域所須的正向力 P 即為這時在 O_2 點(圖10)的反作用力。

切線方向分析：這個部分的已知條件為接觸區域長度 $2a$ 、強制位移量 Δy 及潛變率 ν ，而未知參數是滑動區、附著區長度及切線力 Q_x 。

1. 加上附著區之多點限制條件：假設接觸長度與強制位移量不變，而且整個接觸區域為完全附著狀態，因此在每對接觸節點需加上(30a)-(30d)式之多點拘束條件。

2. 加上力矩 M ：使得節點剪應力對插銷造成同一方向旋轉，且使接觸最前緣邊界節點的剪應力 $\tau_t \approx 0$ 。
3. 調整附著區及滑動區大小：若 τ_t 由某一點開始超過 $\mu\sigma_n$ ，則從此點開始至接觸後緣成為滑動區，此區域內每對接觸節點所需成立的多點拘束條件為(31a)-(31d)式。
4. 重新調整 Δy 及滑動區大小：由於加入滑動區的多點拘束條件後將會影響接觸前緣剪應力 τ_t ，故需再重新調整 Δy 值使接觸前緣之 $\tau_t = 0$ ，再驗證附著區內剪應力值是否符合(30e)式與滑動區內剪應力值是否符合(31e)與(31f)式，若不符合則須再度修正附著區與滑動區長度。
5. 檢查剪應力：若在接觸區域邊緣節點之剪應力 σ_n ，比正向分析之剪應力結果明顯增加，則表示需調整接觸力矩大小，並回到第二步驟重新執行。

本論文所使用網格如圖11所示，插銷與圓孔的網格共有549個元素及1780個節點，圓孔半徑 $R_1=10\text{mm}$ ，插銷半徑 $R_2=9.999\text{mm}$ 。接觸區域的細分網格如圖12所示。

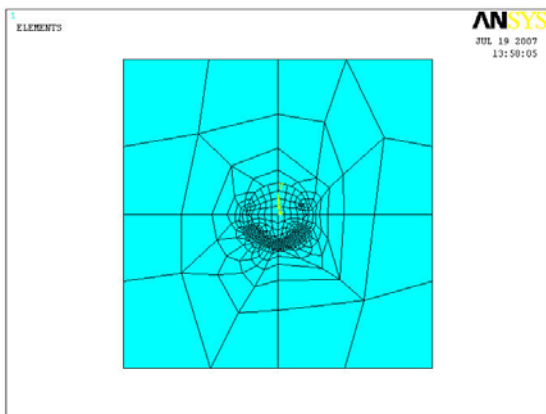


圖11 插銷與圓孔的網格

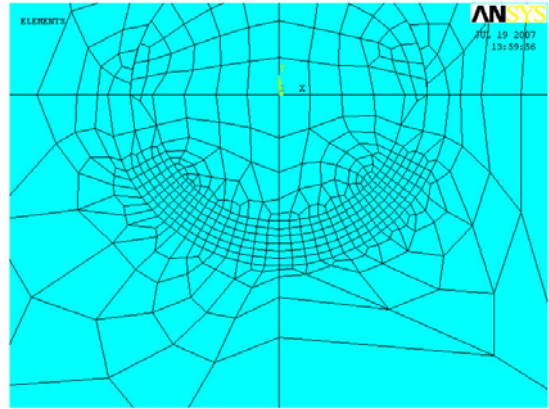


圖12 接觸區的細分網格

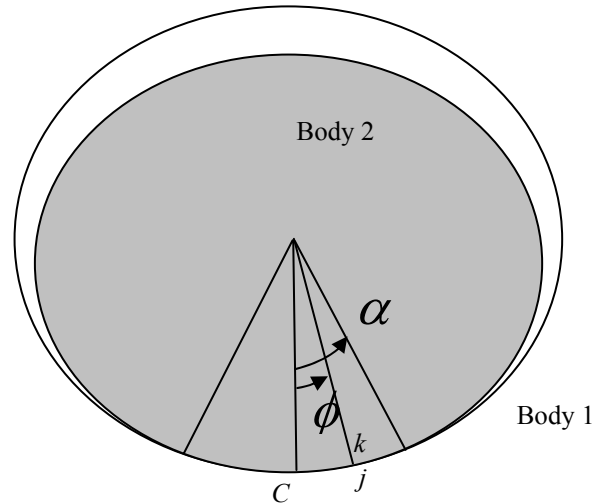


圖13 接觸半角 α 示意圖及接觸區域內節點之角度 ϕ

六 結果與討論

本論文是使用半徑為 9.999mm 的插銷與半徑為 10mm 圓孔，分析共形滾動接觸，兩接觸體之彈性模數 $E = 210\text{Gpa}$ ，正向分析時波以森比皆為 0.3 ，滾動分析時波以森比為皆為 0 ，摩擦係數為 $\mu = 0.22$ 。

無摩擦狀態共形接觸的接觸區域大小是以接觸半角 α 表示，如圖13所示。圖14是插銷與圓孔在正向無摩擦接觸下，外力與接觸半角的關係，並與Persson[1]做比較，圖中顯示當接觸半角為 9.3575° 、 18.2125° 、 30° 、

39.5799°及47.1°時的狀況。其中Persson解析解結果的正向力為

$$P = \frac{E\Delta R}{\left(\frac{2}{\pi} \frac{1-b^2}{b} - \frac{I_6}{\pi^2 b^2 (1+b^2)}\right)} \quad (35)$$

且

$$I_6 = \int_{-b}^b \frac{\log\left[\frac{\sqrt{b^2+1} + \sqrt{b^2-t^2}}{\sqrt{b^2+1} - \sqrt{b^2-t^2}}\right]}{1+t^2} dt \quad (36)$$

其中 $b = \tan(\alpha/2)$ ；

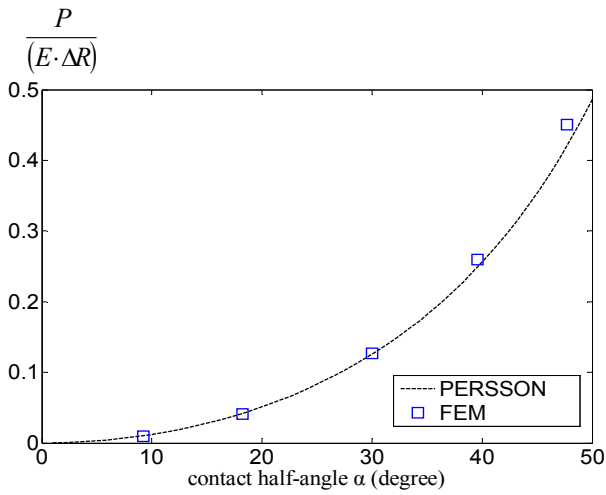


圖14 正向無摩擦接觸的正向力與接觸半角的關係

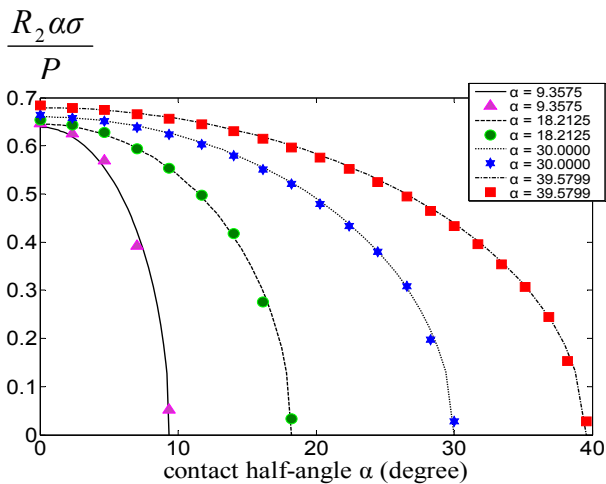


圖15 正向無摩擦接觸的應力與接觸半角關係

圖15是插銷與圓孔在正向無摩擦接觸下，應力與接觸半角的關係，並與Persson做比較。Persson解出壓力 $p(\varphi)$ 與外力 P 的關係為

$$\frac{Rp(\varphi)}{P} = \frac{2}{\pi\sqrt{b^2+1}} \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{1+y^2} + \frac{1}{2\pi b^2(1+b^2)} \log_e \frac{\sqrt{b^2+1} + \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{b^2+1} - \sqrt{b^2-y^2}} \quad (37)$$

其中 $y = \tan(\varphi/2)$ ； $-b \leq y \leq b$

目前並無共形滾動接觸的解析解可作比較，在從事滾動分析時發現滾動會干涉到正向分析結果[23]，因此使用波以森比為零以降低干涉。

圖16至圖18顯示插銷與圓孔在正向摩擦接觸下之正向應力 σ_n 及剪應力 τ 分佈，接觸半角都在 $\alpha = 30^\circ$ ，摩擦係數分別為0.22、0.40及0.66，圖中 $(\sigma_n)_0$ 是接觸區域中間點 ($\varphi = 0$) 的正向應力。滑動區的剪應力會等於摩擦力，其重合的線段為滑動區，分離的線段為附著區。

$$\left| \frac{\tau}{\mu(\sigma_n)_0} \right| \text{ or } \frac{\sigma_n}{(\sigma_n)_0}$$

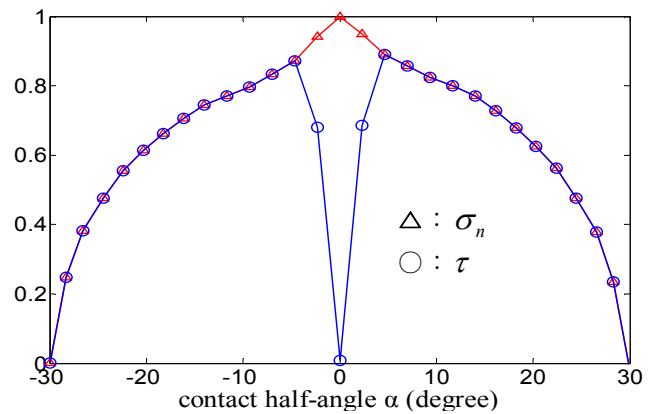


圖16 正向摩擦接觸的正向應力與側向應力；

$$\mu = 0.22, \Delta y = -2.09931 \times 10^{-4} \text{ mm},$$

$$(\sigma_n)_0 = 3.52995 \times 10^6 \text{ pa}$$

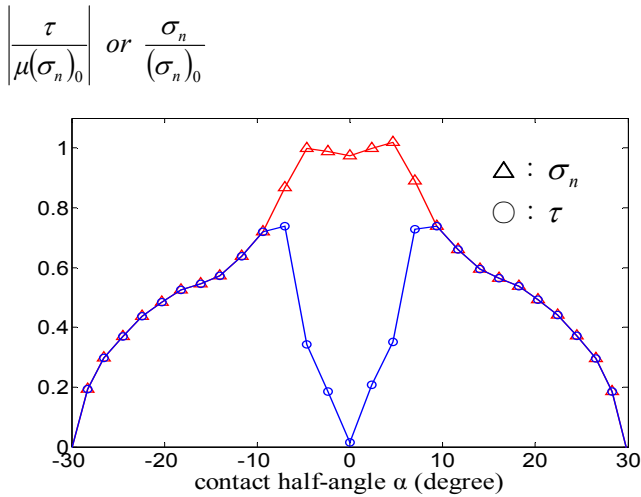


圖17 正向摩擦接觸的正向應力與側向應力分佈； $\mu=0.40$ ， $\Delta y = -2.1 \times 10^4 \text{ mm}$ ， $(\sigma_n)_0 = 3.4421 \times 10^6 \text{ pa}$

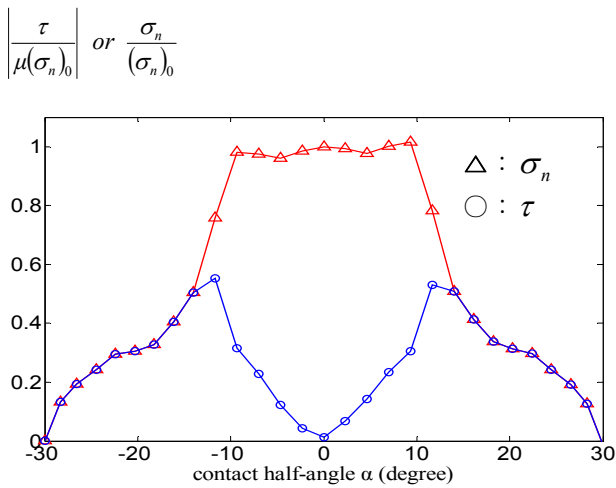


圖18 正向摩擦接觸的正向應力與側向應力分佈； $\mu=0.66$ ， $\Delta y = -2.12331 \times 10^4 \text{ mm}$ ， $(\sigma_n)_0 = 3.5822 \times 10^6 \text{ pa}$

圖19是插銷與圓孔在共形滾動接觸下，潛變率 $\xi = -0.000004$ ，及接觸半角 $\alpha = 30^\circ$ 時，正向節點應力與側向應力的分佈，當潛變率 $\xi < 0$ ，接觸前緣(leading edge)在右端。分析結果顯示滑動區出現在接觸後緣(trailing edge)，但接觸前緣仍有一點滑動。當在純粹正向接觸狀態時，插銷上靠近接觸前緣及後緣的元素分別往右及往左移動，為了抵抗這

種相對運動，使得接觸前緣及後緣分別產生向左及向右的剪應力 τ 。而潛變率 $\xi < 0$ 表示插銷相對圓孔有順時鐘方向轉動，這在插銷上產生向右的剪應力。將正向接觸及滾動接觸的應力相加，在接觸後緣會有較大剪應力，因此較易滑動。

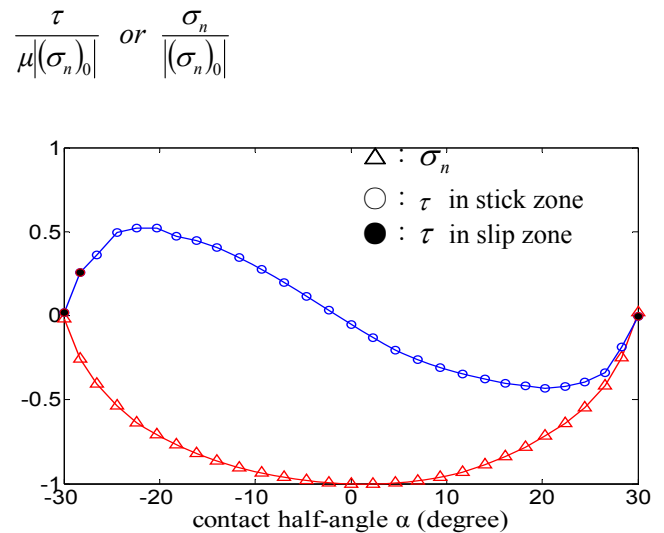


圖19 共形滾動接觸下正向應力與側向應力的分佈； $\xi = -0.000004$ ， $\alpha = 30^\circ$ ， $\Delta y = -2.02781 \times 10^4 \text{ mm}$ ， $(\sigma_n)_0 = -3.3803 \times 10^6 \text{ pa}$

七 結論

在本論文中推導出兩圓柱共形滾動接觸的運動方程式，並使用有限元素法，利用多點拘束條件將接觸條件加入有限元素方程式中。本文所求出的靜態共形接觸之接觸半角，及接觸壓力分佈符合解析解結果。

參考文獻

1. Persson, A. On the Stress Distribution of Cylindrical Elastic Bodies in Contact. PhD thesis, Chalmers Technical University, Goteborg, 1964.
2. Lin, S., Hills, D. A. and Nowell, D. Stesses in a flat plate due to a loose pin prsing against a cracked hole. *J. Strain Analysis*, 1997, 32(2),145-156.
3. Hou, J.P. and Hill, D.A. Contact between a

- pin and plate with hole under interference-fit and clearance-fit conditions. *Proc. Instn Mech. Engrs, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, 2001, 215(C6), 629-639.
4. Solodovnikov, V. N. Solution of the contact problem for a pin-loaded plate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 38 No. 1, 1997
 5. Duvaut, G. and Lions, J. L. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1976.
 6. Zhong, Z. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
 7. Fredriksson, B. *On Elastostatic Contact Problem with Friction*, Dissertation No. 6, Linköping University, 1976.
 8. Padovan, J. Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling nonlinear Viscoelastic Structure, *Computers and Structures*, Vol. 27 No. 2, pp. 249-257, 1987.
 9. Lee, K. An Effective Solution Method for Frictional Contact Problems, *Computers and Structures*, 32(1), pp. 1~11, 1989.
 10. Bathe, K. J. and Chaudhary, A. A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 65~88, 1985.
 11. Zochowski, A. and Myslinski, A. A Numerical Analysis of Rolling Contact Problem Using Quasistatic Variational Formulation, *Computers and Structures*, Vol. 40, No. 5, pp. 1261-1266, 1991.
 12. Carter, F. W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel, *Royal Society*, A112, p. 151, 1926.
 13. Johnson, K. L. The Effect of Spin Upon the Rolling Motion of an Elastic Sphere on a Plane, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 332~338, 1958.
 14. Kalker, J. J. On the Rolling Contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction, Ph.D. Thesis, Delft University, pp. 95~100, 1967.
 15. Liu, C. and Paul, B. Rolling Contact with Friction and Non-Hertzian Pressure Distribution, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, No. 4, pp. 814~820, 1989.
 16. Cerruti, V. and Roma, Acc. Lincei, *Mem. fis. mat.*, 1882.
 17. Kalker, J. J. A Minimum Principle of the Law of Dry Friction with Application to Elastic Cylinder in Rolling Contact, *Journal of Applied Mechanics*, 38, pp. 875-880, 881-887, 1971.
 18. Kalker, J. J. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Delft, The Netherlands, 1990.
 19. 徐正陽，束縛條件用在二維彈性體摩擦接觸問題的有限元素分析，淡江大學機械工程研究所碩士論文，1998。
 20. 王樂榮，以有限元素多點拘束條件分析二維滾動接觸，淡江大學機械與機電工程學系碩士論文，2003。
 21. 蔡岸祺，以有限元素多點拘束條件分析二維異材質滾動接觸問題，淡江大學機械與機電工程學系碩士論文，2004。
 22. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
 23. 魏克輝，有限元素法多點拘束條件分析彈性材質圓柱接觸之再思，淡江大學機械與機電工程學系碩士論文，2007。