

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

以有限元素法分析二維滾動接觸問題

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-032-015-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

計畫主持人：劉昭華

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 9 月 13 日

以有限元素法分析二維滾動接觸問題

劉昭華、蔡岸祺

NSC 93-2212-E-032-015

淡江大學機械與機電工程學系

台北縣淡水鎮英專路 151 號

摘要

本研究是以有限元素法分析二維接觸問題，包括正向接觸、滑動接觸、及滾動接觸。在分析過程中將應力邊界條件轉換為節點位移的多點拘束條件，並將這些多點拘束條件加在有限元素系統之中，所求出的節點應力及節點位移能夠完全滿足應力及位移接觸條件。本研究分析同材質及異材質間的摩擦及無摩擦接觸，求出在正向接觸、滑動接觸、及滾動接觸的情況下，接觸區域大小，滑動區及附著區大小以及應力分佈。所求出結果皆符合目前已有之解析及數值結果。

Abstract

Two-dimensional elastic contact problems, including normal, sliding, and rolling contacts, are treated with the finite element method in this thesis. Stress contact conditions are transformed into multiple point constraints for nodal displacements. Upon imposing these constraints into the finite element system equations, the calculated nodal stresses and nodal displacements satisfy stress and displacement contact conditions exactly. Frictional and frictionless contacts between similar and dissimilar elastic materials are treated in this thesis. The contact lengths, sizes of slipped and locked regions, the normal and the shear stresses can be found, and these results agree with existing analytical and numerical results.

一、前言：

接觸問題可分為靜態接觸(static contact)與動態接觸(dynamic contact)，動態接觸又可再分為滾動(rolling)接觸與滑動(sliding)接觸兩種情況。滾動接觸發生車輪與路面(或軌道)，滾珠軸承、插銷接頭，及齒輪系等機械構件之中。若是兩接觸體具有同樣材質，則

滾動接觸的應力分析可分解成正向問題(normal problem)及側向問題(tangential problem)，正向問題是在僅有正向力(normal force)作用下，求出接觸區域大小及接觸區域內之正向應力分佈，而側向問題是在當正向問題求出之後，再加上側向力(tangential force)，並求出接觸區域內剪應力的分佈。在兩接觸體具有同樣材質的情況下，正向問題與側向問題互不干涉(Johnson[1],P.203)，因此可先分析正向問題，求出接觸區域大小與正向應力之後，再從事側向問題分析，側向問題所求出的解不會影響到前面求出的接觸區域及正向應力大小。但若接觸體的材質不同，正向及側向應力會彼此干涉，側向應力也會影響接觸區域大小，這時須不斷的修正與疊代，才能求出正向及側向應力。本研究是針對不同材質接觸體間的二維摩擦及無摩擦接觸，包括正向接觸、滑動接觸、及滾動接觸，期望能求出接觸區域大小，正向應力及剪應力分佈。

目前為止滾動接觸的應力分析可分為以下兩種方式：非線性變分原理(nonlinear variational principles)及積分方程式(integral equations)。

非線性變分原理包括 Duvaut and Lions [2]及 Zhong [3]是以變分不等式(variational inequalities)來探討正向接觸問題；Fredriksson [4]、Lee [5]、Bathe and Chaudhary [6]及 Zhong [3]是以變分等式(variational equalities)來處理正向接觸；在滾動接觸方面，最常用的是 Arbitrary Lagrange Eulerian description(ALE)[7,8]的方式導出接觸變分方程式。

在以非線性變分原理求解的領域中，最完整的解是 Kalker [9]，他所發展出的程式 CONTACT，能夠針對各種形式的接觸體，可同時具有軸向(longitudinal)，側向(lateral)及旋轉方向(spin)的變形，並且不僅處理穩態

(steady state)還能處理暫態(transient state)的情況。

至於以積分方程式處理滾動接觸的研究結果，最早或可追溯至 Carter [10]，他在 1926 年即已求出兩個圓柱在滾動接觸狀態的解析解，至今許多數值解仍須藉助這解答以驗證結果。Johnson [11] 與 Kalker [12] 則推導出滾動接觸時的運動關係式(kinematic equations)，其中包括位移量(displacement)及速度(rolling velocity)的關係。Liu and Paul[13] 則藉助 Cerruti[14]所導出的基本解(fundamental solutions)，代入 Johnson [11]所推導的運動關係式中，變成切線應力(tangential stresses)的積分方程式，並求出微小自旋量(small spins)情況下的解。Gonzalez and Abascal [15]所發展出的邊界元素法能夠針對異材質間的滾動接觸，其數值結果符合解析結果。Pauk and Zastrau[16]以邊界積分方程式方法分析二維滾動接觸問題，在分析過程中考慮了表面精糙度的影響。

對滾動接觸問題而言，非線性變分原理的缺點，在於須要非常多的計算時間，而且至今無法處理塑性變形問題[17]，更何況一般工程師不易了解非線性變分理論。而積分方程式的方法須要有基本解(fundamental solution)，而這些基本解都是在無窮大空間所推導出，當接觸區域不在一平面上，利如插銷與圓孔間的接觸，或內齒輪(internal gears)間的接觸，這些情況的基本解尚未推導出。

由於有限元素法中能夠處理塑性問題，計算快速而且無須使用基本解。本研究因而採用有限元素法解題，在解題過程中亦無須使用非線性變分原理。本研究雖僅探討彈線性材料的情況，但本研究所使用之多點拘束條件可用在材料非線性的情況。

徐正陽[18]在分析相同材質間的二維正向接觸問題時，利用有限元素法中的多點拘束條件(multiple point constraints)，強迫兩接觸節點間的正向應力相等。王樂榮[19]則將這種方法拓展至同材質的二維滾動接觸問題。本研究是將多點拘束條件應用在二維有限元素滾動應力分析，係針對不同材質間的

接觸。

二、二維滾動及滑動接觸方程式：

(一)滾動接觸

若兩滾動接觸物體為彈性體，且受正向力作用，則會形成接觸區域(圖六)。有時因為加速(或減速)滾動，造成有側向(摩擦)力在接觸區傳遞，若圖 1 中物體 1 開始加速旋轉，則在接觸區內會有分佈力作用在物體 1 之上以阻止其加速轉動，而物體 2 則受到大小相等方向相反之分佈力，這狀態稱為牽引滾動(tractive rolling)。本研假設有切線力在接觸區域內傳遞。這時接觸面在摩擦力的作用下將會分為兩個區域：附著區(stick region)與滑動區(slip region)(如圖 1)，在附著區內兩接觸點的速度相等，而在滑動區內的兩接觸點間會相互滑動。若兩接觸體的材料相同，則附著區必須發生在接觸前緣(leading edge)，滑動區則出現在接觸後緣(trailing edge)[1]。

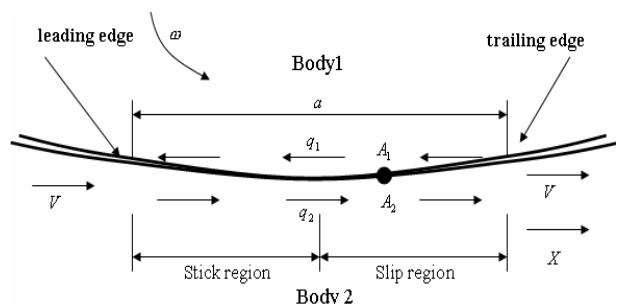


Figure 1 Two bodies in rolling contact

A_1 點在 x 方向的位置 d_1 可分解為兩部份，即變形前的位置 x 和此點在 x 方向變形量 $u_1(x, t)$ ，亦即

$$d_1 = x + u_1[x(t), t] \quad (1)$$

而 A_1 點的絕對速度可寫成

$$\begin{aligned} V_1 &= V + \delta V_1 + \frac{d}{dt} u_1[x(t), t] \\ &= V + \delta V_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ &= V + \delta V_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} V \end{aligned} \quad (2)$$

在上式中 V 是滾動體(1 及 2)在沒有變形情況下的移動速度， δV_1 是因為物體 1 變

形，影響到圓周長度，而產生速度的改變量，由於假設在穩態的狀況， u_1 對時間偏微分為零。同理， A_2 點的速度為

$$V_2 = V + \delta V_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} V \quad (3)$$

因此， A_2 相對於 A_1 的速度為

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (\delta V_2 - \delta V_1) + V \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \quad (4)$$

若定義無因次的滑動量(slippage) S 如下

$$S = \Delta V / V$$

那麼(4)式可改寫為

$$S = \xi_x + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \quad (5)$$

其中 ξ_x 稱為潛變率(creep ratio)，定義為

$$\xi_x = (\delta V_2 - \delta V_1) / V \quad (6)$$

(5)式在1958年已由Johnson[11]推導出。

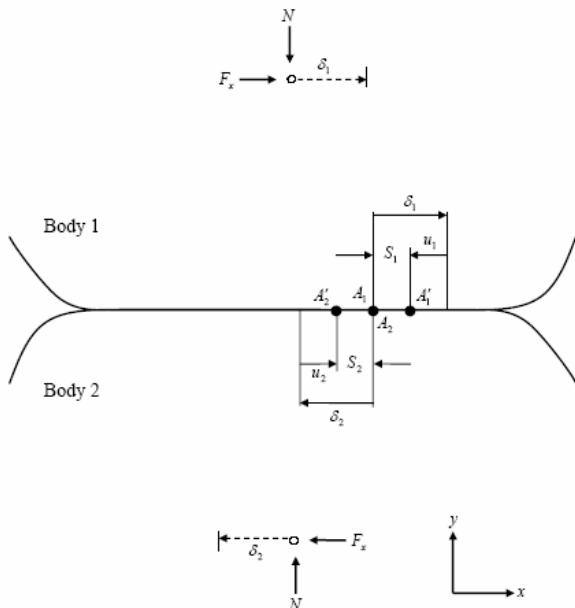


Figure 2 Two elastic bodies in sliding contact

(二)滑動接觸

當物體1及物體2受到正向力 N 作用而接觸，接著又受到側向力 F_x 作用，如圖2所示。在接觸面上原本重合的一對節點 A_1 及 A_2 ，在側向力作用下可能分開。其中 A_1 的位移量 S_1 可分為兩部份，剛體位移量 δ_1 及彈性位移量 u_1 ，亦即

$$S_1 = \delta_1 + u_1 \quad (7)$$

同理 A_2 點的位移量為

$$S_2 = \delta_2 + u_2 \quad (8)$$

因此 A_2 相對於 A_1 的位移量 S 為

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = (\delta_2 - \delta_1) + (u_2 - u_1) \\ &= \delta + (u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\delta = \delta_2 - \delta_1$ 稱為兩物體之相對剛性位移(relative rigid body displacement)。

當 A_1 及 A_2 在滑動區時， S 是此兩點間的滑動量(relative slip)，當 A_1 及 A_2 在附著區時， $S = 0$ ，因此(9)式成為

$$0 = \delta + (u_2 - u_1) \quad (10)$$

三、邊界條件及其多點拘束條件：

有限元素法的節點應力通常是由高斯點應力外插而得，因此元素 l 上的節點 j 的應力可表示成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E]_l \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B(\xi_i, \eta_i)] \{d\}_l \quad (11)$$

其中 (ξ_j, η_j) 是節點 j 在 ξ - η 等參座標系的座標，而 (ξ_i, η_i) 是第 i 個高斯積分點的座標， $N_i(\xi, \eta)$ 是內插(或外插)函數，或稱形狀函數(shape functions)， $\{d\}_l$ 是 l 元素的節點位移，而 $[E]_l$ 是此元素的材料常數矩陣。因此，若元素 m 的第 k 節點與元素 l 的第 j 節點之正向應力 σ_{yy} 相等，可寫成 [18,19]

$$\begin{aligned} [E_2]_l \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B(\xi_i, \eta_i)] \{d\}_l \\ = [E_2]_m \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B(\xi_i, \eta_i)] \{d\}_m \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $[E_2]_l$ 表示 $[E]_l$ 矩陣中的第二列。

方程式(12)是表示元素 m 的節點位移 $\{d\}_m$ 與元素 l 的節點位移 $\{d\}_l$ 須滿足的條件，稱為多點拘束條件，此條件限制節點間的正向應力相等，本研究採用8節點平面元素，每個元素之節點位移向量皆有16項，而(12)式因而限制了32個節點位移間的關

係。

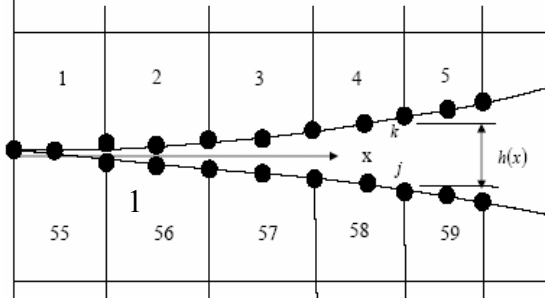


Figure 3 Elements in the contact region

若圖 3 中的節點 j 及節點 k 在滑動區域時，須滿足的邊界條件為：

1. 兩節點在 y 方向位移差必須等於間隙長度 h ，亦即

$$v_j - v_k = h \quad (13)$$

兩節點之正向應力必須相等，即

$$(\sigma_{yy})_j = (\sigma_{yy})_k \quad (14)$$

2. 節點應力須滿足庫倫摩擦定律，即

$$(\tau_{xy})_j = \mu \cdot (\sigma_{yy})_j \quad (15)$$

$$(\tau_{xy})_k = \mu \cdot (\sigma_{yy})_k \quad (16)$$

若圖 3 中的節點 j 及節點 k 在附著區，則(13)及(14)式仍舊成立，而且節點間剪應力仍應相等，亦即

$$(\tau_{xy})_j = (\tau_{xy})_k \quad (17)$$

若在滾動接觸情況下，在附著區兩接觸節點滑動速度為零，由方程式(5)可知

$$0 = \xi_x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_k \quad (18a)$$

若在滑動接觸情況下，在附著區兩接觸節點滑動量為零，方程式(10)再重覆寫成下式

$$0 = \delta - (u_j - u_k) \quad (18b)$$

若在正向接觸(非滾動亦非滑動)情況下，在附著區兩節點沒有相對位移，亦即(18b)式中的 $\delta = 0$ ，

$$u_j = u_k \quad (18c)$$

將以上各式變成多點拘束條件後，可得附著區：

$$v_j - v_k = h \quad (19)$$

$$[E_{1yy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B^1] \{d\}_1 \quad (20)$$

$$= [E_{2yy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B^2] \{d\}_2$$

$$[E_{1xy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B^1] \{d\}_1 \quad (21)$$

$$= [E_{2xy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B^2] \{d\}_2$$

$$\xi_x + \left\{ \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B_x^1] \{d\}_1 - \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B_x^2] \{d\}_2 \right\} = 0 \quad (22a)$$

$$0 = \delta - (u_j - u_k) \quad (22b)$$

$$u_j - u_k = 0 \quad (22c)$$

$$(\tau_{xy})_j \leq \mu (\sigma_{yy})_j \quad (23)$$

滑動區：

$$v_j - v_k = h \quad (24)$$

$$[E_{1yy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B^1] \{d\}_1 \quad (25)$$

$$= [E_{2yy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B^2] \{d\}_2$$

$$[E_{1xy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B^1] \{d\}_1 \quad (26)$$

$$= \mu [E_{1yy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_j, \eta_j) [B^1] \{d\}_1$$

$$[E_{2xy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B^2] \{d\}_2 \quad (27)$$

$$= \mu [E_{2xy}] \sum_{i=1}^9 N_i(\xi_k, \eta_k) [B^2] \{d\}_2$$

最後，在滑動區節點的剪應力與滑動方向須相反，亦即

$$\tau_{xy} / |\tau_{xy}| = -S_x / |S_x|$$

(28) (23)及(28)式是用來驗證結果之用。

四、有限元素分析步驟：

本研究的有限元素程式係由作者自行以 MATLAB(6.5 版)撰寫，網格是由 ANSYS (5.3 版)套裝軟體產生，多點拘束條件是以 Lagrange Multiplier 方式處理，解線性聯立方程式利用 MATLAB 中的 SPARSE 功能處理。

本研究皆分析兩半徑相同圓柱間的正

向及滾動接觸，如圖 4 所示，分析過程使用八節點等參元素(8 node isoparametric elements)，一般有限元素套裝軟體(如 ANSYS、I-DEAS...等)的八節點平面元素皆已設定採用 2 乘 2 的高斯積分，但在徐正陽[18]及王樂榮[19]使用 2 乘 2 的高斯積分時皆發生結果不穩定或誤差過大的問題，故本程式採用 3 乘 3 高斯積分。

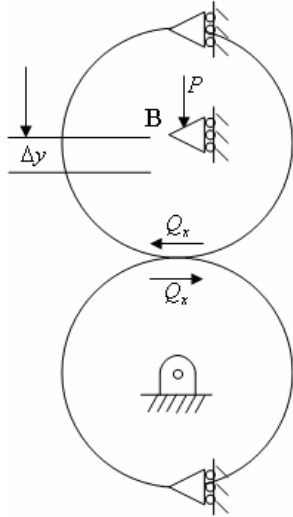


Figure 4 Finite element analysis model

(一)同材質

正向分析：

首先可假設接觸區域長度，反求出造成此接觸區域的強制位移量 Δy ，及反作用力 P (圖 4)，詳細過程說明如下：

1. 先假設接觸區域長度 $2a$ ，並在區域內每對接觸節點加入正向接觸附著區之多點拘束條件，亦即(19)、(20)、(21)、(22c)式。
2. 調整 Δy 大小重複執行程式，直到以下兩條件皆滿足
 - (i) 接觸區域內之正向應力皆為負值
 - (ii) 接觸區域最外緣節點之正向應力為零則此 Δy 即為造成此接觸區域長度 $2a$ 的強制位移量。產生此接觸區域所須的正向力 P 即為這時在 B 點 (圖 4) 的反作用力。

側向分析：

這個部分的已知條件為接觸區域長度 $2a$ 、強制位移量 Δy 、及潛變率 ξ_x ，而未知數是滑動區長度、附著區長度、每個節點的

正向應力 σ_{yy} 、及剪應力 τ_{xy} 。

1. 假設整個接觸區域皆為附著區域狀態，因此在每對接觸節點加上(19)-(22a)式的多點拘束條件。
2. 加上側向力 Q_x ：將側向力 Q_x 平均加在接觸面所有節點之上，並不斷調整 Q_x 的數值，使得接觸最前緣邊界的剪應力 $\tau_{xy} \approx 0$ 。
3. 調整附著區及滑動區大小：假設某一節點之數值 τ_{xy} 超過 $\mu\sigma_{yy}$ ，則此點設定為滑動狀態，並加上多點拘束條件為(24)-(27)式。
4. 由於改變滑動區的大小後將會影響接觸前緣剪應力 τ_{xy} ，故需重新執行步驟 2。
5. 重覆執行步驟 3。
6. 重新檢查接觸區域長度：由於接觸區域長度 $2a$ 是在假設無摩擦接觸情況下求得，側向分析執行完畢之後，若在接觸區域邊緣節點之正向應力 σ_{yy} 顯著小於零[請參見正向分析之 2(ii)步驟]，則表示須增加接觸區域大小；反之，若接觸區域內節點正向應力大於零(張力)，則須減少接觸區域長度，並重新執行正向分析。
7. 不斷重覆修正調整接觸區域長度，及接觸區域內附著區及滑動區長度，直到正向分析之 2(i)式，2(ii)式，側向分析之(23)及(28)式皆滿足為止。

(二)異材質

正向分析：

假設接觸區域長度為已知，求出造成此接觸區域的強制位移量 Δy 及作用力 P (圖 4)，並且求出滑動區與附著區分佈情況。

1. 先假設接觸區域長度 $2a$ ，若是摩擦接觸，先假設整個接觸區域皆為附著區，並在區域內每對接觸節點加入正向有摩擦接觸附著區之多點拘束條件，亦即(19)、(20)、(21)、及(22c)式。
2. 調整 Δy 大小重複執行程式，直到以下兩條件皆滿足
 - (i) 接觸區域內之正向應力皆為負值
 - (ii) 接觸區域最外緣節點之正向應力為零
3. 凡是不滿足(23)式，亦即 τ_{xy} 會大於或等於 $\mu\sigma_{yy}$ 的節點，改加上滑動條件，亦即

(24)~(27)式。

4. 滑動區域大小調整後，接觸區域最外緣節點之正向應力可能改變，須重新步驟 2。
5. 重新執行步驟 3。
6. 若結果完全符合步驟 2 及步驟 3 的條件，則此 Δy 即為造成此接觸區域長度 $2a$ 的強制位移量。產生此接觸區域所須的正向力 P 即為這時在 B 點（圖 4）的反作用力。

滾動分析：

正向分析所求出的結果包含接觸區域長度、強制位移量 Δy ，而側向分析未知數是滑動區長度、附著區長度、側向力 Q_x 、潛變率、每個節點的正向應力 σ_{yy} 、及剪應力 τ_{xy} 。假設圓柱 1 為較撓性之材料，且加速轉動，此時在接觸後緣之正向應力 σ_{yy} 的大小明顯增加（符號為負），表示接觸區域會向右延伸，會產生一增加之接觸長度會增加。本研究是先假設接觸後緣增加了一個元素，然後用以下步驟求出所須要的潛變率及側向力。

1. 先假設整個接觸區域皆為附著區域狀態，因此在每對接觸節點加上(19)-(22a)式的多點拘束條件。
2. 將側向力 Q_x 平均加在接觸區域內所有節點之上，並不斷調整 ξ_x 和 Q_x 數值，而使得接觸最前緣及最後緣邊界的正向應力 $\sigma_{yy} \approx 0$ 。
3. 調整附著區及滑動區大小：如果某一節點之剪應力 τ_{xy} 超過 $\mu\sigma_{yy}$ ，則將此點設定為滑動狀態並加上多點拘束條件(24)-(27)式。
4. 重覆步驟 2。
5. 重覆步驟 3。
6. 若以上步驟皆能滿足，則此時即為造成此接觸長度改變而所需的潛變率 ξ_x 及側向力 Q_x 大小。

在重覆步驟 2 時，調整側向力 Q_x 及潛變率 ξ_x 會有規律可循，若是上接觸體較為撓性 (compliant) 而且上接觸體開始加速的情況，這時側向力 Q_x 會使接觸前緣正向應力 σ_{yy} 的絕對值減少，而較大的潛變率 (絕對值較大)，會使前緣及後緣正向應力 σ_{yy} 同時減少

(往 $-\infty$ 方向增加)。亦即，增加側向力 Q_x 會使得接觸區域向右移動，而增加潛變率 ξ_x ，會使接觸區域變大。

滑動分析：

正向分析所求出的結果包含接觸區域長度、強制位移量 Δy ，而滑動接觸分析未知數是滑動區長度、附著區長度、側向力 Q_x 、強制位移量、每個節點的正向應力 σ_{yy} 、及剪應力 τ_{xy} 。其分析步驟與上述滾動接觸完全相同，是求出當多出一個元素時之剛性位移量 δ 及側向力大小，但將第 1 步之(22a)式改為(22c)式，而且第 2 步是調整 δ 值與 Q_x 值，而不是 ξ_x 值與 Q_x 值，且增加 Q_x 會使得接觸區域向右移動，而增加 δ 會使接觸區域變大。

五、結果與討論

以下例題都是分析半徑為 $100mm$ 的兩圓柱間的滾動接觸及滑動接觸，材料為鋼 $E = 210Gpa$ ， $\nu = 0.28$ 及鋁 $E = 70Gpa$ ， $\nu = 0.33$ ，在相同材料摩擦接觸時，摩擦係數 $\mu = 0.22$ ，材料不同時滾動接觸的 $\mu = 0.13514$ 。

圖 5 是相同材料在無摩擦赫氏接觸下的正向應力，與赫氏接觸結果比較，當接觸區域一半寬度 $a = 0.17815mm$ 時，所須之正向力 $P = 29.242N$ 而赫氏接觸所須之正向力為 $P = 28.39N$ ，此兩個結果非常接近。而圖 6 至 10 是相同材料的圓柱在滾動接觸下的正向應力及剪應力分佈，Carter[10]的解析結果的剪應力為

$$\tau_{xy} = \mu P_0 \left\{ \sqrt{1 - (x/a)} - \frac{c}{a} \sqrt{1 - (x+d)^2/c^2} \right\} \quad (29)$$

其中 a 為接觸區域寬度之一半， c 為附著區寬度的一半，而 $d = a - c$ ；圖 6 至 10 顯示正向應力皆非常準確，而在附著區的側向應力稍微偏高。Carter 亦解出潛變率 ξ_x 與側向力 Q 的關係為

$$\xi_x = \frac{-4(1-\nu^2)\mu P_0}{E} \left(1 - \sqrt{1 - Q/\mu P} \right) \quad (30)$$

圖 11 是當圓柱 1 是鋁材質而圓柱 2 是鋼材質 ($\beta = 0.15976$)，在有摩擦接觸情況

下，受到正向力所產生的正向應力及剪應力分佈。Nowell et al.[20]假設剪應力不會對正向問題的結果產生影響情況下，求出解析結果(亦可參考 Hills et al.[21])。本研究的數值結果與 Nowell et al.的結果接近。最後，當上接觸體(圓柱 1)為鋁，圓柱 2 為鋼的情況下，滾動接觸的應力結果顯示於圖 12，圖 11 是在施加同樣正向位移量 Δy ，但未滾動的結果，但在加上滾動接觸的條件後，接觸區域從 $a = 4.717mm$ 增加到 $a = 4.974mm$ 而且是往右方(接觸後緣)增加。Nowell and Hills[22]曾經討論不同材質間各種可能的滾動接觸情況，當材料 1 較為撓性(compliant)，而且圓柱 1 加速，造成剪應力方向如圖 1 所示的情況，這時在接觸區域內有兩個滑動區，分別在接觸前緣及後緣，而這兩個滑動區內剪應力符號相同。這些皆符合圖 12 的結果。Nowell and Hills[22]亦呈現數值結果，但由於本研究在從事有限元素分析過程中，必須加上特定的潛變率，才能使接觸區域正好向右增加一元素，因此無法在同樣潛變率情況下與 Nowell and Hills 的數值結果相比較，但圖 12 所顯示的曲線情況與 Nowell and Hills[22](亦可參考[21]，fig 4.23)相同。

圖 13 是當上接觸體(圓柱 1)為鋁，下接觸體為鋼的情況下，滑動接觸的應力結果，Nowell et al.[22]也討論過不同材質間在側向力不同時各種滑動接觸情況，本研究在從事有限元素分析時，假設在接觸區域右方增加一元素之接觸長度，使接觸區域長度亦由 $a = 4.717mm$ 增加至 $a = 4.974mm$ 。因此本研究僅顯示此特定的 δ 值情況下的應力分佈，如圖 17 所示。由於 Nowell et al. 僅能顯示在特定側向力情況下利用疊代所求出的數值結果，本研究因此無法與其比較。但本研究運算之結果曲線分佈情況與 Nowell et al.[20]的結果具有相同的附著區及滑動區分佈，而且剪應力的分佈趨勢亦相同。

六、結論

本研究是在以有限元素法分析二維正向接觸、滾動接觸及滑動接觸問題時，加上多點接觸條件，使得所求出的節點應力及節點位移能夠完全滿足應力及位移接觸邊界

條件。以這方法求得之有限元素結果包括同材質及異材質之間的正向、滾動接觸及滑動接觸應力，以及附著區和滑動區大小，這些結果皆大致符合目前已有解析及數值結果。這表示除了非線性變分原理之外，以有限元素分析接觸問題時亦可採用本研究所建議方法，這方法無須使用特殊接觸元素，對程式唯一要求是必須能夠處理有 32 項的多點接觸條件，及在線性分析時可以使用 3 乘 3 高斯積分。

七、參考文獻

- [1] Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [2] Duvaut, G., and Lions J.L., *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1976.
- [3] Zhong, Z., *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [4] Fredriksson, B., *On Elastostatic Contact Problem with Friction*, Dissertation No. 6, Linkoping University, 1976.
- [5] Lee, K., "An Effective Solution Method for Frictional Contact Problems", *Computers and Structures*, 32(1), pp.1~11, 1989.
- [6] Bathe, K. J., and Chaudhary, A., "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 65~88, 1985.
- [7] Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics*, John-Willy and Sons, pp.125-133, 2002.
- [8] Zastra, B., Nackenhorst, U., and Jarewsky, J., "On the Computation of Elastic-Elastic Rolling Contact Using Adaptive Finite Element Techniques", *Proceeding of 3rd International Conference on Contact Mechanics*, pp.129-138, 1997.
- [9] Kalker, J. J., *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Delft, The Netherlands, 1990.
- [10] Carter, F. W., "On the Action of a Locomotive Driving Wheel", *Royal*

Society, A112, p. 151, 1926.

- [11] Johnson, K. L., "The Effect of Spin Upon the Rolling Motion of an Elastic Sphere on a Plane", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp.332~338, 1958.
- [12] Kalker, J. J., *On the Rolling Contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction*, Ph.D. Thesis, Delft University, pp, 95~100, 1967.
- [13] Liu, C. and Paul, B., "rolling Contact with Friction and Non-Hertzian Pressure Distribution", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, No. 4, pp. 814~820, 1989.
- [14] Cerruti, V., Roma, Acc. Lincei, *Mem fis. mat.*, 1882.
- [15] Pauk, V., and Zastrau, B., "Rolling Contact Problem involving Surface Roughness", *Mechanics Research Communications*, 30, pp.45-51, 2003.
- [16] Gonzalez, J. A., and Abascal, R., "Using the Boundary Element Method to Solve Rolling Contact Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21, 99, pp.385-392, 1998.
- [17] Knothe K., Wille R., Zastrau B. W., "Advanced Contact Mechanics- Road and Rail", *Vehicle System Dynamics*, Vol. 35, No. 4-5, pp. 361-407, 2001.
- [18] 徐正陽, 束縛條件用在二維彈性體摩擦接觸問題的有限元素分析 碩士論文, 淡江大學機械工程研究所, 1998。
- [19] 王樂榮, 以有限元素多點拘束條件分析二維滾動接觸, 淡江大學機械與機電工程學系碩士論文, 2003。
- [20] Nowell, D., Hills, D. A., and Sackfield, A., "Contact of Dissimilar Elastic Cylinders Under Normal and Tangential Loading", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(1), pp.59-75, 1988.
- [21] Hills, D.A, Nowell, D., and Sackfield, A., *Mechanics of Elastic Contact*, Butterworth-Heinemann, 1993.
- [22] Nowell, D., and Hills, D. A., "Tractive Rolling of Dissimilar Elastic Cylinders", *International Journal of Mechanical Sciences*, 30(6), pp.427-439, 1988.

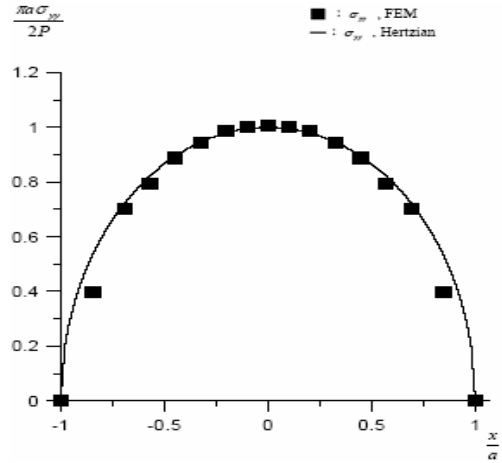


Figure 5 normal stress during frictionless contact between two elastically identical cylinders

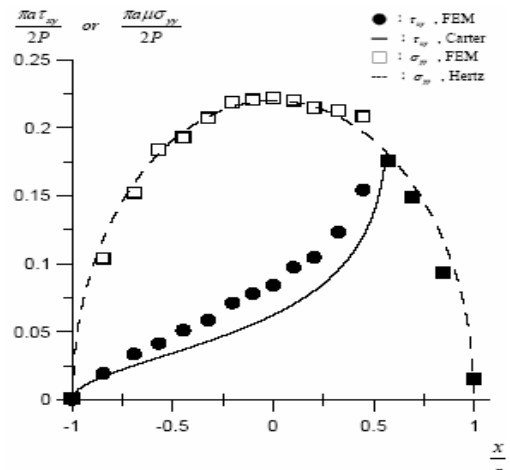


Figure 6 normal and shear stresses during rolling contact between two elastically identical cylinders $\xi_x = -0.00029$, $Q/(\mu P) = 0.1875$

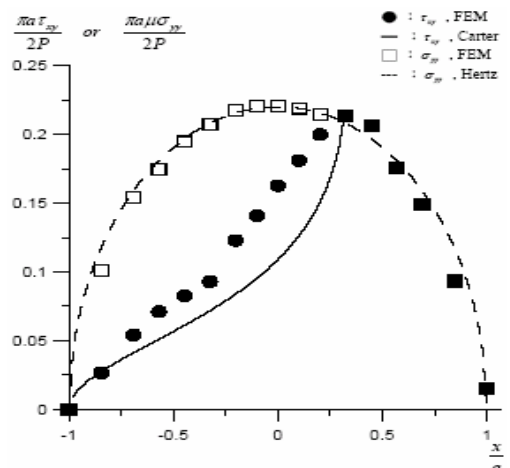


Figure 7 normal and shear stresses during rolling contact between two elastically identical cylinders, $\xi_x = -0.00045$, $Q/(\mu P) = 0.315$

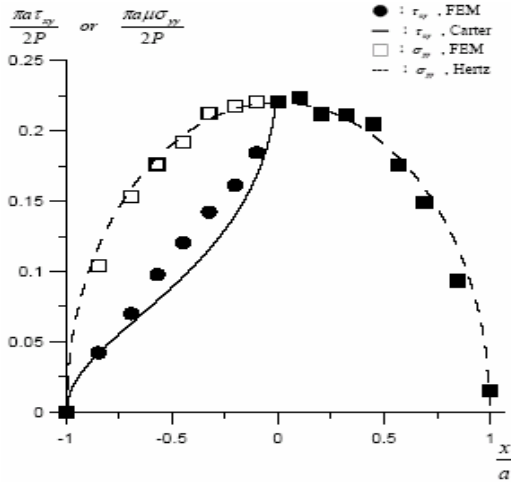


Figure 8 normal and shear stresses during rolling contact between two elastically identical cylinders ; $\xi_x = -0.0007$, $Q/(\mu P) = 0.52$

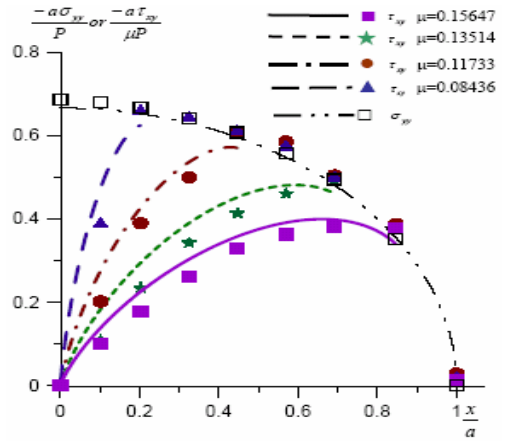


Figure 11 shear stresses in normal contact with friction; compared with Nowell et. al.[19].

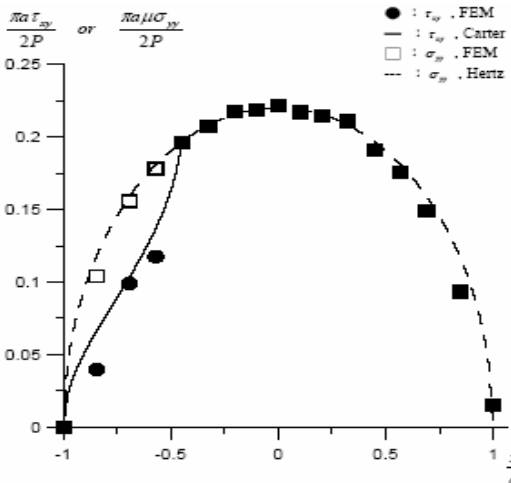


Figure 9 normal and shear stresses during rolling contact between two elastically identical cylinders ; $\xi_x = -0.00095$, $Q/(\mu P) = 0.731$

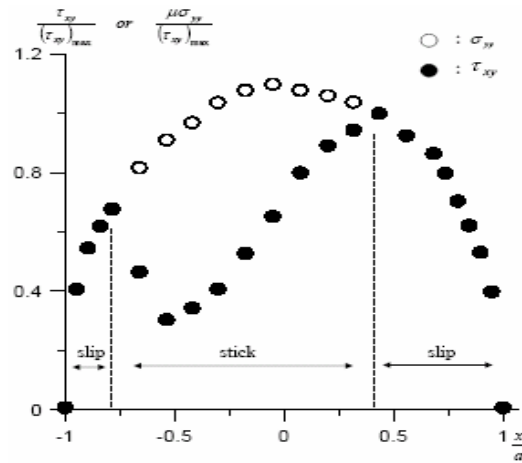


Figure 12 normal and shear stresses for rolling contact between two dissimilar materials; $\xi = -0.0158$, $Q/\mu P = 0.737$, $\tau_{\max} = 421.5995\text{MPa}$

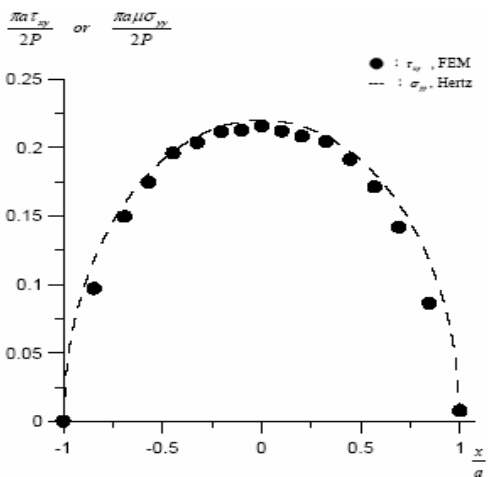


Figure 10 normal and shear stresses during rolling contact between two elastically identical cylinders, $\xi_x = -0.0013$, $Q/(\mu P) = 1$

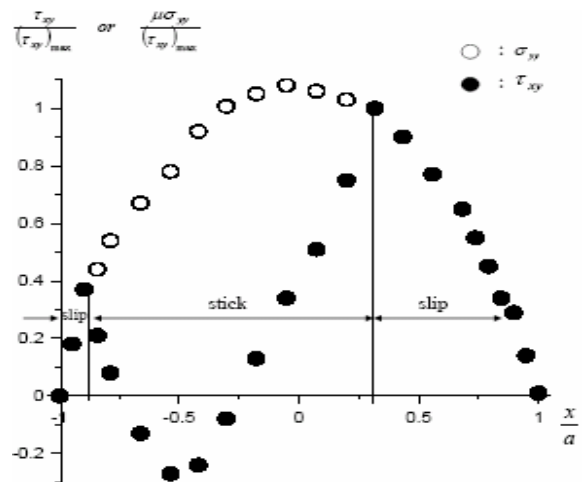


Figure 13 normal and shear stresses for sliding contact between two dissimilar materials, $Q/\mu P = 0.514$, $\delta = -0.0032\text{mm}$, $\tau_{\max} = 409.7413\text{MPa}$