

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 三軸 RPS 並聯式機械手臂正向奇異位置分析

### Direct singular Configuration Analysis of 3-RPS Parallel Manipulators

計畫編號：NSC 90-2212-E-032-008

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：劉昭華 淡江大學機械系

#### 一、摘要

本研究利用幾何的方法，推導出 3RPS 並聯式機械手臂活動平台(圖 1)的工作空間，以及速度分析的  $3 \times 3$  Jacobian 矩陣。如果以活動平台上三個球窩接頭與基座間的垂直距離  $d_{1n}$ ， $d_{2n}$ ， $d_{3n}$  為座標，那麼在此  $(d_{1n}, d_{2n}, d_{3n})$  座標系，活動平台的工作空間可以表示成一個圓柱體(圖 2)，此圓柱體上任一點的高度、以及此點在其所在截面上的位置，分別代表 3RPS 並聯式機械手臂活動平台的高度及方向。

本研究所提出的方法可以找到 3RPS 並聯式機械手臂所有正向奇異位置。這方法分為兩步驟，首先假設活動平台的方向，如此可求出活動平台的水平位置；再找出使 Jacobian 矩陣之行列式值為零的活動平台的高度。以上這兩個步驟在前述  $(d_{1n}, d_{2n}, d_{3n})$  座標系中皆有幾何意義，亦即先選定圓柱體截面上的某特定點，接著再找出造成正向奇異位置的截面高度。

**關鍵詞：**3RPS 並聯式機械手臂、正向奇異位置

#### Abstract

In this research  $3 \times 3$  Jacobian matrices and the workspace of 3RPS parallel manipulators(Fig.1) are obtained. If heights of 3 spherical joints on the moving platform  $d_{1n}$ ,  $d_{2n}$ , and  $d_{3n}$  are used as coordinate frames, then in the  $(d_{1n}, d_{2n}, d_{3n})$  coordinate system, workspace of the moving platform is a solid cylinder(Fig.2). The height of an arbitrary point of the cylinder, and location of this point on the

cross-sectional plane, represent height and orientation of the moving platform, respectively.

In this research a procedure to locate all direct singular positions of a 3RPS manipulator is proposed. The procedure consists of two steps, the orientation of the moving platform is assumed first, from which the horizontal position of the moving platform may be obtained; then the height that makes determinant of Jacobian matrix vanish is determined. In the above mentioned  $(d_{1n}, d_{2n}, d_{3n})$  coordinate system geometrical meanings of these two steps are as follows. The first step corresponds to specify a point on the cross-sectional plane, then, in the second step, the height of this cross-section which causes direct singularity is determined.

**Keywords:** 3RPS parallel manipulators, direct singular position

#### 二、計劃緣由與目的

機構的運動可能會出現「奇異位置」(singular configuration) 的情況，對並聯式機構而言，奇異位置可區分為「反向運動奇異位置」(inverse kinematic singularities) 及「正向運動奇異位置」(direct kinematic singularities)。「反向運動奇異位置」經常出現在工作空間的邊界 (workspace boundary) ([1], p.226)，亦即其極限位置 (limiting positions)，當並聯式機構到達「反向運動奇異位置」時，通常機構無法繼續運動。而「正向運動奇異位置」卻可能出現在工作空間之內，而當並聯式機構其到達「正向奇異位置」時，通常會造成自由度增加使之產生非預期的運動，這

時，機構會因無法承受某些方向的載重，而造成機構的崩塌。在目前的研究成果之中，皆未討論 3RPS 機構的「正向奇異位置」。

因為「正向奇異位置」可能會出現在工作範圍內部，因此從事機構設計時，必須不斷將各個位置代入 Jacobian 矩陣，檢視其行列式值是否為零，如此需要大量電腦運算[2]；或者是利用機構模擬套裝軟體從事全區域的模擬，但運動分析的數值結果會受到使用者所給定的「時間間隔」(time step) 所影響，除非「奇異位置」正好出現在某一時間間隔結束的時刻，否則數值技巧未必能偵測到時間間隔內部的奇異位置。

本研究針對的三軸 RPS 並聯式機械手臂之一端為活動平台(moving platform)(圖 1)，另一端則為基座(fixed base)，活動平台與基座係以三根肢幹(limb)透過旋轉接頭(revolute joint)及球窩接頭(spherical joint)銜接，每根肢幹由兩根連桿(link)構成並利用稜柱接頭(prismatic joint)予以串接。

### 三、正向奇異位置

活動平台的速度方程式為[3]

$$[B]\{\dot{v}\} = -[A]\{\dot{d}\} \quad (1)$$

其中  $\{\dot{d}\}$  是肢幹的驅動速度向量， $\{\dot{v}\}$  是三個肢幹各繞其旋轉接頭的轉速， $[A]$  及  $[B]$  是 Jacobian 矩陣，其數值與活動平台的位置有關。正向奇異位置是發生在  $[B]$  矩陣行列式為零的位置，在這位置即使驅動速度為零 ( $\{\dot{d}\} = 0$ )，由(1)式可知這時卻會有  $\{\dot{v}\}$  不等於零的解，也就是肢幹仍可微量轉動。由於這時肢幹長度固定 ( $\{\dot{d}\} = 0$ )，表示活動平台仍可微量運動。

### 四、3RPS 平台之工作空間

若  $d_i$  是第  $i$  肢幹的長度，那麼可將  $d_i$  分解成兩個方向上的分量： $d_{pi}$  表示此桿長在基座上的分量，而  $d_{ni}$  是桿長在垂直基座上的長度(圖 3)。那麼在  $(d_{n1}, d_{n2}, d_{n3})$  座標系

之中，活動平台的工作空間是如圖 2 所示的圓柱形區域[3]。若在此圓柱形區域上取一截面，並在面上取一點，而此點在其所在截面上的位置表示活動平台的方向，而活動平台的高度則是由座標原點  $O$  沿著圓柱主軸 ( $d_{1n} = d_{2n} = d_{3n}$ ) 到此截面的距離  $d_{ave}$  來決定。

### 五、尋找正向奇異位置

劉昭華等[4]證明 3RPS 平台機構的活動平台不能從事「平行基座方向的純粹平移」(pure translation parallel to the fixed base)，平行基座方向的平移必須伴隨著旋轉同時產生，這表示在活動平台的方向保持固定不變的情況下，那麼此活動平台只可能在垂直基座的方向平移運動。而且，活動平台的水平位置，與活動平台的方向之間有彼此對應的關係，亦即活動平台在某個水平位置，就只能採取特定的方向。本研究因而將尋找 3RPS 三自由度平台機構之「正向運動奇異位置」的程序分解為兩個步驟：

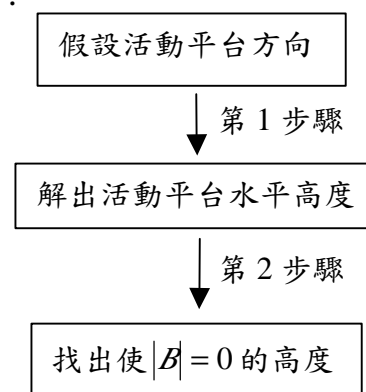
1. 活動平台的水平位置：

首先假設活動平台的方向，求出這時活動平台的水平位置，亦即平台在基座平面上的投影。

2. 使  $|B| = 0$  的高度：

活動平台的方向既已假定，而且維持此方向的活動平台僅能在垂直方向上平移，因此可找到維持此方向之極限，此即工作空間邊界，這位置會使得  $[B]$  矩陣行列式為零，因此是「正向運動奇異位置」。

上述的解題步驟可以用下列之流程圖加以說明：



## 六、結果與討論

上述的第 1 步驟須解三個聯立非線性方程組，而第 2 步驟須解一個三階單變數多項式方程式，本研究係利用解析技巧 ( analytical techniques ) 找出這些方程組的根，並且判別這些解是否滿足平台的運動限制條件，詳細過程請參閱[3]。

研究結果顯示針對每個活動平台的方向，都可找出三個正向奇異位置，通常都是活動平台與三個肢幹中的一個肢幹共面的狀況，圖 4 顯示肢幹 3( $A_3B_3$ )與活動平台共面的正向奇異位置，圖中  $A_1$ 、 $A_2$  及  $A_3$  是基座上的旋轉接頭，而  $B_1$ 、 $B_2$  及  $B_3$  是活動平台上的球窩接頭。但若是活動平台較大，會使得正向奇異位置發生在其他情況 [3]。

## 七、計劃成果自評

本研究所發展出的方法，已能找出 3RPS 平台所有的正向奇異位置。因此完全達成計劃目標。

## 八、參考文獻

- [1] Tsai, L. W., 1999, *Robot Analysis : the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [2] 李啟泰、張建華、劉全輝、翟志道，1998，“六軸動感平台設計與發展”，中國航空太空學會第四十屆學術研討會，1998 年 12 月台中，第 537-543 頁。
- [3] 鄭勝嘉，2002，“三軸 RPS 並聯式機械手臂正向奇異位置”，淡江大學機械系碩士論文。
- [4] 劉昭華、邱建源、簡嘉志、林永清，2002，“3PRPS 及 3RPS 並聯式機械手臂之運動限制”，中華民國機構與機械原理學會，第五屆全國機構與機器設計學術研討會。

## 九、相關圖表

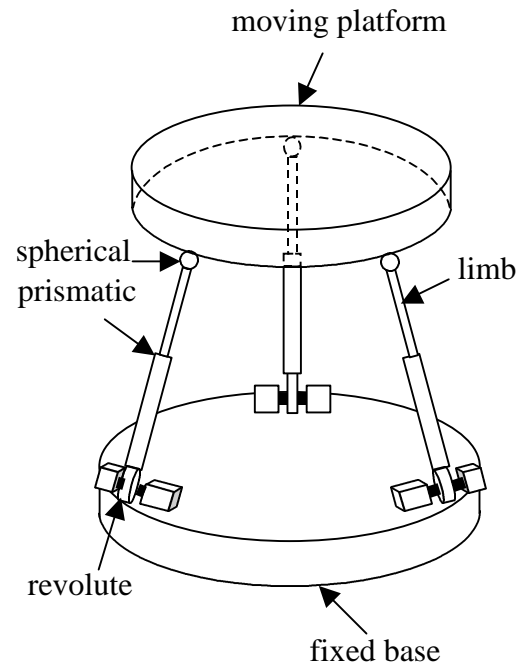


Figure 1 3-RPS parallel manipulator

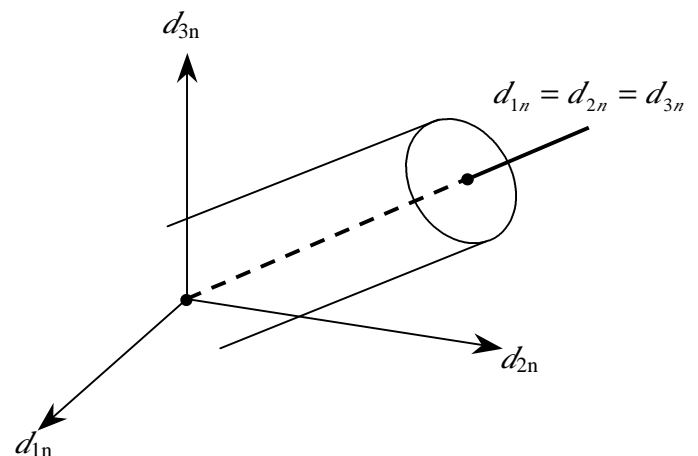


Figure 2 circular cylinder.

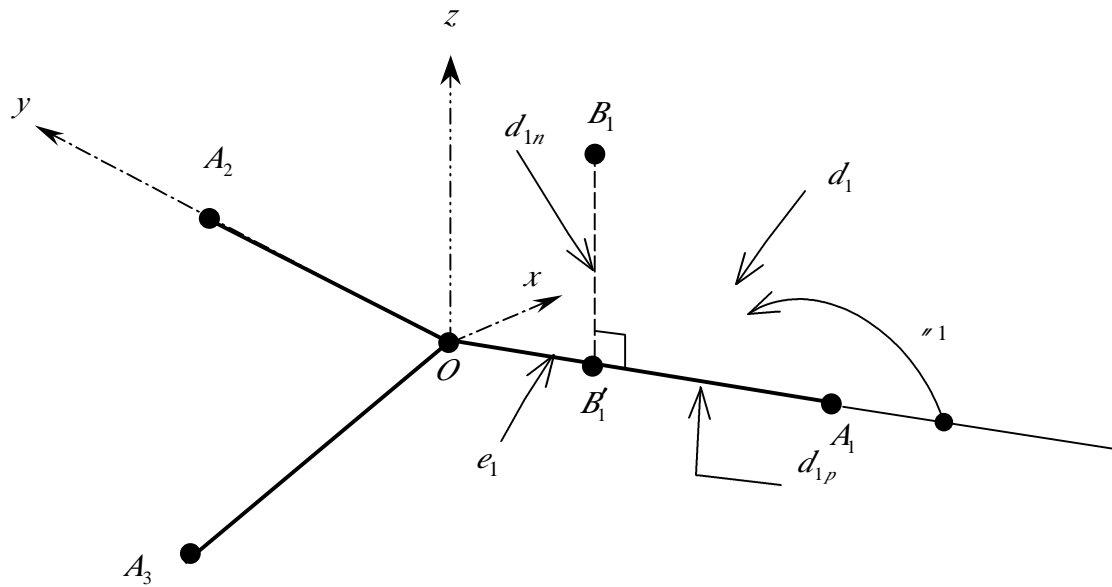


Figure 3 The point  $B_1$  can be represented by coordinates  $d_{1p}$  and  $d_{1n}$

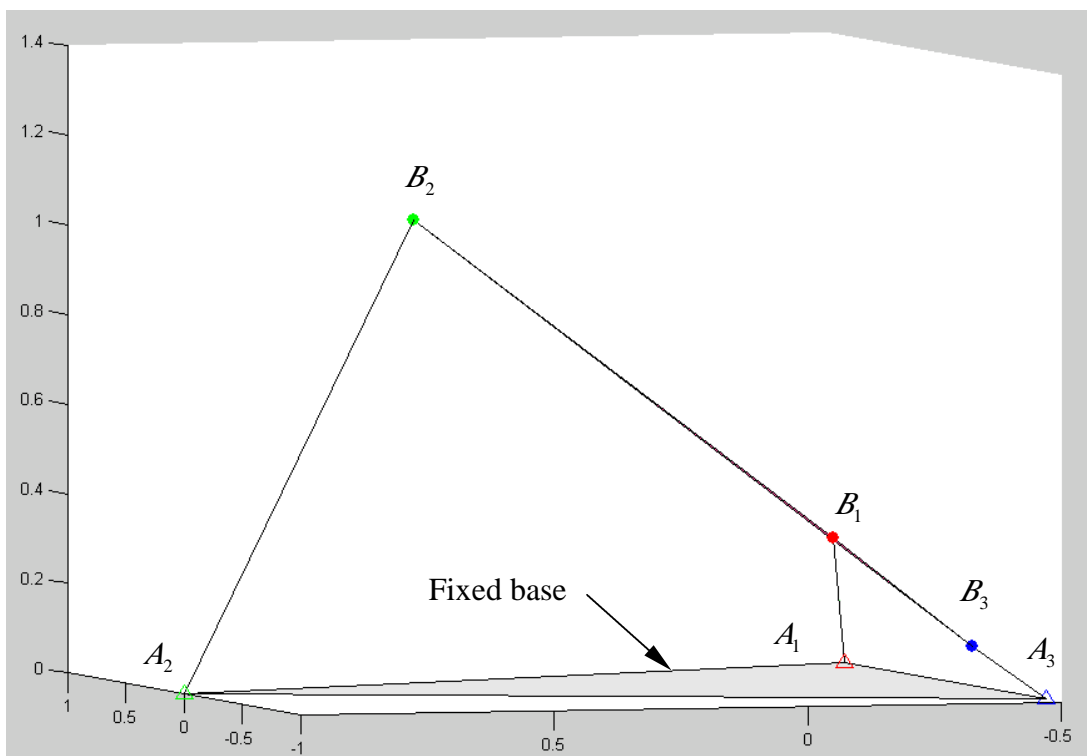


Figure 4 A direct singular position ; the moving platform  $B_1B_2B_3$  and limb  $A_3B_3$  are on the same plane

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※

※          **三軸 RPS 並聯式機械手臂正向奇異位置分析**          ※

※          **Direct singular Configuration Analysis of**          ※

※          **3-RPS Parallel Manipulators**          ※

※※※

計畫類別：個別型計畫          整合型計畫

計畫編號：NSC 90-2212-E-032-008

執行期間：90年8月1日至91年7月31日

計畫主持人：劉昭華

執行單位：淡江大學機械系

中華民國 91年 10月 18日