行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

擴增性超立方體結構嵌入環狀與樹狀結構

Embedding Rings and Complete Binary Trees into Incrementally Extensible Hypercubes (IEH)

計畫編號：NSC 87-2213-E-032-002

執行期限：86 年 8 月 01 日至 87 年 7 月 31 日

主持人：葛煥昭博士　　淡江大學資訊工程學系

一、中文摘要

本研究計劃針對可逐步擴增的超立方體結構圖中的部分問題加以討論。我們討論將環狀與完全二元樹嵌入可逐步擴增的超立方體結構圖中，在研究中，發現除了節點個數為 2^n-1 時，其可逐步擴增的超立方體結構僅包含漢米爾頓(Hamiltonian)路徑外，其它所有的可逐步擴增的超立方體結構皆包含漢米爾頓環路。同時也利用歸納法並結合格雷碼(Gray code) 對此提出證明。而根據這項結果，更進一步地，可以將任意個數的環狀結構包含在其中，並使得擴張度(dilation)和膨脹率(expansion)均為 1。此外，也提出將一完全二元樹嵌入一完全之可逐步擴增的超立方體結構圖之擴張度(dilation)為 2 和膨脹率(expansion)為 1 之演算法。

關鍵詞：可逐步擴增的超立方體結構、環狀結構、完整二元樹結構

Abstract

The Incrementally Extensible Hypercube (IEH) graph has been proposed in past years. Unlike the hypercube, the IEH graph is incrementally extensible. In other words, any number of nodes can construct the IEH graphs and the IEH graph does not have the drawbacks of the other generalizations of the hypercube. This project report presents these embedding of Hamiltonian cycles, rings and complete binary tree in IEH graphs. We show that it is always possible to form a Hamiltonian cycle between any two nodes in all of the IEH graphs, except those contains exactly 2^n-1 nodes. For an IEH graph with exactly 2^n-1 nodes, we can only find a Hamiltonian path on it. These results can readily be used in optimal embedding of a ring (or a linear array of processors) in the IEH graphs with expansion 1 and dilation 2. At the same time, we present simple and efficient models to fulfill embedding of a complete binary tree into an IEH graph containing 2^n-1 nodes. As the model we proposed an algorithm is developed for the embedding with expansion 1 and dilation 2.

Keywords: Incrementally Extensible Hyper-cube, ring, complete binary tree

二、緣由與目的

一個好的網路拓蹼結構應該具備有以下的特性：較低的分支度（degree）、正規性（regularity）、較短的直徑（diameter）、較佳的容錯（fault tolerance）能力和有效率的路徑決策演算法（routing algorithm），並且能夠模擬許多的網路拓蹼結構(亦即能把許多不同的網路拓蹼結構嵌入(embed)於其

上)等。另外，通常會以圖形模式(graphical model)來描述連結各個處理元素的網路拓蹼（network topology）結構。其中以節點（nodes/vertices）表示處理器(process)，以邊（edges/arcs）或鏈結（links）來表示雙向傳輸的通道（channels）。

超立方體結構（hypercubes/cosmic cube/binary n-cubes/boolean n-cubes）已經被廣泛的使用在平行機器上，因為它具有上述大部分的優良網路拓蹼特性，且其結構會對每一個節點自 0 到 N-1 以唯一的二元表示法（binary representations）予以編號，其中 $N=2^n$ 為節點總個數，$n \in N \cup \{0\}$，N 為自然數，而任意兩節點間存在一鏈結若且為若其節點之二元表示法恰巧僅有個一相異位元存在（bit），也就是說，鏈結僅存在於漢明距離（Hamming distance）為 1 的節點之間，且節點之間的最長距離為 $N \log_2 N$，以及高階超立方體可由低階超立方體遞迴建立。超立方體結構之所以受歡迎的原因主要在於具備有結構上的正規性和平行演算法的包容性，其結構上的正規性可使得電腦系統能較容易地被建立起來，而平行演算法上的包容性使得一般與結構相關的平行演算法（archiecture-dependent parallel algo-rithms），也就是指一些網路上常見的拓蹼結構，例如:環(rings)、網絡(meshes)、樹(trees)等，可不須經過大幅修改就能容易地被移植到超立方體結構電腦系統上來執行。除此之外，它的特性還包括較高的資料頻寬（data bandwidth）與較低的訊息傳遞延遲（message latency）等。

在實驗室中，在 1985 年加州理工學院（Caltec）就已製作完成具有 64 個節點的 Cosmic Cube[41]，而在商業上則有 Intel iPSC、Connection Machine、nCUBE 和 FTS T-series 等問世。儘管超立方體結構的網路拓蹼特性在理論和實作上有許許多多的優點，但它也有一個非常不好的限制：就是節點的個數必須符合 2^n 的限制。因此它並不適用於任意數目的節點個數，換句話說，超立方體結構在節點的個數上並不具備可逐步擴增的能力。但不論在實際應用或經濟的考量上，逐步擴增的能力均有其先天的必要性，目前雖然已有一些論文針對此問題詳加討論，但都仍有其缺點，茲分述如下，其中推廣的超立方體結構（generalized hypercubes），它有兩個缺點：（一）當節點的個數為質數時，則其網路拓蹼會降階（reduced）成為一個連通的完全圖（completely connected graph）（也就是說有最高的分支度，從硬體設計的觀點則可發現這並不是一個好特性）。（二）其內部連結網路必須經大幅的變動才能新增一個節點。而不完整的超立方體結構（incomplete hypercubes），其問題出在容錯的能力上，也就是說如果網路拓蹼上的某一個節點發生故障，則有可能造成不連接的兩個網路子圖（意即網路拓蹼已被切成任意無法溝通的兩部份）。另外一種叫做費柏納契立方體結構（fibonacci cubes），其理論基礎在於對任一自然數而言，必可找到一費柏納契數的組合與之對應，所以其網路拓蹼可適用於任意節點數目。因為已證明費柏納契立方體結構是超立方體結構的子圖，所以在超立方體結構上各種容錯的應用可容易地被移植到費柏納契立方體結構上，另一方面也說明了如何有效地將超立方體結構、線性陣列（linear arrays）、環（rings）和網絡（meshes）等嵌入（embedding）到費柏納契立方體結構中。但其缺點仍是正規性（regularity）不夠理想與相對較為稀疏的內部連結性（sparce interconnection），針對上述幾種網路拓蹼結構皆有其缺點，因此考慮另外一種網路拓蹼結構，稱之為可逐步擴增的超立方體結構圖（incrementally extensible hypercube (IEH) graphs），這也是本研究計畫的網路拓蹼基底，其設計主要的精神在於能適當地連結各個不同大小的多維度子立方體結構（subcubes），它的特性除了如同其名可

容易地逐步擴增網路拓蹼的大小而適用於任意數目的節點個數以外，它還具備了最佳的容錯能力與僅為$n+1$的直徑，且最重要的是在此結構中，任意具有最大與最小分支度的兩節點間其分支度差為1，這同時說明了它有較佳的正規性，在圖一中，列舉11個節點的可逐步擴增的超立方體結構圖。

由於較佳的正規性對系統的建構能提供有效地幫助，並且可較容易地將與結構相關的平行演算法移植到可逐步擴增的超立方體結構圖上，因此為了保持分支度差為1的特性，在漢明距離為2的節點之間仍可能有鏈結存在，這與超立方體結構是不同的，由於這個特性致使一般可在超立方體結構中嵌入其它網路拓蹼結構的方法並不能直接應用到超立方體結構圖中。基於這個原因，同時加上它也具備了各種吸引人的特性，所以刺激我們去探討可逐步擴增之超立方體結構圖的拓蹼結構，並研究如何把其它的網路拓蹼結構嵌入於可逐步擴增的超立方體結構圖。

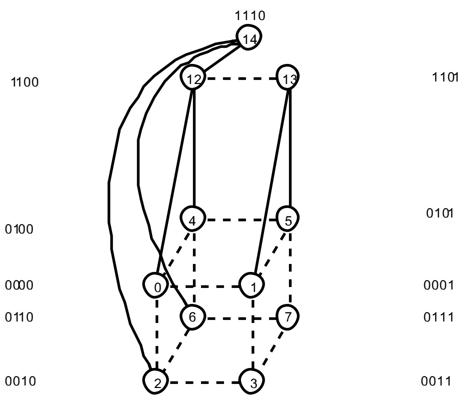

圖 三

三、結果與討論

由於可逐步擴增的超立方體在拓蹼結構上擁有許多良好的特質，其具有可逐步擴增性且克服了超立方體節點個數為2^n的限制；同時，其具有最佳的容錯能力，此容錯能力為不完整的超立方體及推廣的超立方體結構中所欠缺的，故本研究計畫以可逐步擴增的超立方體為嵌入的主要圖形。首先在可逐步擴增的超立方體結構中，找出漢米爾頓環路或路徑，並藉由它的規則(rule)，進一步地，將幾乎所有任意長度的環狀結構嵌入在可逐步擴增的超立方體結構上，使得原本在環狀結構上的平行演算法能直接移植到可逐步擴增的超立方體結構，同時也可應用於線性陣列以及藉由漢米爾頓環路或路徑而做一有效的廣播。

此外，由於完整二元樹在結構上具有完整性，使其應用十分廣泛，可將之應用在具有“分割－合併”這類特性的問題上，故本研究計畫亦以完整二元樹為嵌入的應用圖形。

將一棵完整二元樹嵌入至可逐步擴增的超立方體結構中。

通常在不考慮容錯問題的情形下，決定嵌入的好壞，有兩個主要的考量因素，就是擴張度(dilation)和膨脹率(expansion)。根據研究成果可知，除了節點個數為2^n-1時，只可找到漢米爾頓路徑，其餘均可在可逐步擴增的超立方體結構上找到漢米爾頓環路亦即可以找到一環狀結構其節點個數與可逐步擴增的超立方體結構的節點個數一樣多，而達到擴張度和膨脹率均為1，而若節點個數為2^n-1時，仍可找到一環狀結構其節點個數為2^n-2，使得其擴張度為1而膨脹率仍趨近於1，而完全二元樹嵌入一完全之可逐步擴增的超立方體結構圖之擴張度(dilation)為 2 和膨脹率(expansion)為1，因此，根據這兩項評估，故可知此方法為一相當不錯的嵌入方式。

四、計劃成果自評

研究成果的最主要貢獻就是第一個把環狀結構和完整二元樹嵌入在可逐步擴增的超立方體結構中，使得環狀結構和完整二元樹上的平行演算法能直接移植到可逐步擴增的超立方體結構中，但仍然尚有其它的網路拓蹼結構，尚未被嵌入在可逐步

擴增的超立方體結構中，因此這也就成為我們未來研究的主要方向。本研究計畫成果與與原計畫相符情形幾乎完全一致，所以可說是已經達到預期目標，同時也已經在一些國際相關會議上發表，以及成為碩士班學生的畢業論文，相信在未來幾年亦可能在一些學術期刊上發表。

五、參考文獻

[1] 林仁智, ``在可逐步擴增之超立方體結構圖中嵌入環狀圖," 私立淡江大學資訊工程學研究所資訊工程碩士學位論文, June 1996.

[2] 熊作珍, ``在可逐步擴增之超立方體結構圖中嵌入完整二元樹," 私立淡江大學資訊工程學研究所資訊工程碩士學位論文, June 1996.

[3] D. P. Agrawal, ``Graph theoretic analysis and design of multistage interconnection networks," IEEE Trans. on Computers, Vol. C-32, pp. 637-648, July 1983.

[4] L. Bhuyan and D. P. Agrawal, ``Generalized Hypercubes and Hyper-bus structure for a computer network," IEEE Trans. Computers, Vol. 33, pp. 323-333, 1984.

[5] B. Cong, S. Q. Zheng, and S. Sharma, ``On Simulations of Linear Arrays, Rings and 2-D Meshes on Fibonacci Cube Networks," Proceedings of seventh International Parallel Processing Symposium, pp. 748-751, April 1993.

[6] B. Cong, Y. Li, and S.Q. Zheng, ``Hamiltonian Paths and Cycles of Fibonacci Cubes with Applications," Proceedings of seventh Internal Conference of Computing and Information (ICCI-95), pp. 451-464, July 5-8, 1995.

[7] K. Ghose and K. R. Desai, ``Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol. 6, No. 4, pp. 427-435, April 1995.

[8] H. P. Katseff, ``Incomplete Hypercubes," IEEE Trans. on Computers, Vol. 37, No.5, pp. 604-608, May 1988 .

[9] F. T. Leighton, ``Introduction to Parallel Algorithms and Archi-tectures: Arrays, Trees, Hypercubes," MORGAN KAUFMANN PUBLISHERS, Inc., 1992.

[10] Y. Saad, and M. Schultz, ``Topological properties of Hypercube," IEEE Trans. on Computers, Vol. 37, No. 7, pp. 867-871, July 1988.

[11] S. Sur, and P. K. Srimani, ``Incrementally Extensible Hypercube (IEH) Graphs," IEEE International Conference on Computers and Commu-nications (IPCCC-92), Scottsdale, Arizona, pp. 1-7, April 1992.

[12] S. Sur, and P. K. Srimani, ``Incrementally Extensible Hypercube Networks and Their Fault Tolerance," Mathematical and Computer Modelling, Vol 23, pp. 1-15, April 1996.

[13] S. Sur, and P. K. Srimani, ``IEH graphs: A novel generalization of hypercube graphs," Acta Informatica, Volume 32, pp 597-609, 1995.

[14] A. Y. Wu, ``Embedding of tree networks into Hypercubes," J. Paral-lel Distrib. Comput.,Vol. 2, pp.238-249, 1985.