



迴流對二行程平板熱質傳交換器效率之研究

The Study of Recycle on Transfer Efficiency of Double-Pass Parallel-Plate Heat and Mass Transfer Exchangers

計劃編號: NSC 88-2214-E-032-002

執行期限: 87/08/01~88/07/31

主持人: 何啓東 淡江大學化工系 副教授

一、中文摘要(關鍵詞: 熱量傳送、共軛格拉茲問題、迴流、正交展開法)

對於兩平行板間具有迴流效應的共軛格拉茲系統的熱量質量傳送問題，為求其解析解，吾等使用正交展開法(orthogonal expansion technique)求得其在固定壁溫時，迴流效應對兩平行間的熱傳導影響，並以實驗加以證明。

將兩平板間的流體視為完全展開之速度分佈，忽略軸傳導，且流體物性不隨溫度改變，而加以迴流裝置時對熱量傳送效果的影響，將與無隔板系統比較。結果顯示，預熱效果及滯留時間是影響熱量傳送行為的兩個因素，且在格拉茲數小時，無隔板系統熱傳效果較兩端具迴流系統的熱傳效果佳，當格拉茲數大時則反之。然而在格拉茲數大的系統，迴流的引入有促進熱量傳送之效果，但對於格拉茲數小的系統，迴流裝置之引入將減少熱量傳送。

本研究的目的是發展完整的數學理論，及設計改善兩平行板間具迴流效應之質傳效率的裝置。同時，實驗的操作是為確認此固定壁溫裝置的理論。

一、中文摘要(關鍵詞: 質量傳送、共軛格拉茲問題、迴流、正交展開法)。

對於兩平行板間具有迴流效應的共軛格拉茲系統的質量傳送問題，使用正交展開法(orthogonal expansion technique)求得其在固定兩壁濃度之解析解。相較於單行程系統(無可透性隔板的裝置)，將討論加裝外部迴流和可透性隔板之裝置，對質量傳送效率的改善。

本研究的目的是發展完整的數學理論，及設計改善兩平行板間具迴流效應之質傳效率的裝置，並探討迴流和隔板位置對質量傳送效率的影響。

英文摘要(Keywords: Mass transfer; Conjugated Graetz problem; Recycle; Orthogonal expansion technique)

The effect of the mass transfer through a parallel-plate channel with uniform wall concentration and external refluxes has been theoretically investigated by use of an orthogonal technique. The improvement in mass transfer efficiency for the device with external refluxes and a permeable barrier compared with that in a single-pass device (without a permeable barrier inserted) will be discussed.

It is the purpose of study to develop the theoretical formulation of designing a double-pass mass-transfer device with external refluxes at both ends. Also, the improvement in mass transfer efficiency of such double-pass device and the influence of refluxes and barrier position on the device performance will be studied.

二、計劃緣由與目的

流體流動伴隨熱質傳效應一直是工程上到處可見到之現象，尤其在化工之分離程序與熱交換器設計上更顯得格外重要。有許多學者從事研究，關於流體流動伴隨熱質傳效應的數學模擬，其基本方程式為能量守恆，動量守恆，質量守恆所導出之微分方程，而以此三大守恆定律作為其建立自然界輸送現象之基礎。因此，動量、能量、質量的輸送現象之定量分析，使得輸送之變化更易掌握。

諸多熱質傳問題中，有一類是屬於格拉茲問題(Graetz Problem)，典型格拉茲問題是研究流體在穩流(Steady state)與層流(Laminar flow)，並忽略軸傳導狀態下在管內受熱質傳效應之影響[1,2]。然而當軸傳導不能忽略時，如液態金屬(具有低Prandtl number)，就必須加以考慮軸傳導項，此類問題即所謂擴展格拉茲問題(Extended Graetz Problem)[3-8]。還有一類稱之為共軛格拉茲問題(Conjugated Graetz Problem)[9-13]，也是即將探討的問題，其不同處在於引入多股流(multistream)或多相流(multiphase stream)，其中股與股，相與相之間具有熱傳或質傳效應。此類問題之困難處是各股的微分方程必須同時滿足界面條件。其中為增加其熱質傳效率便引進迴流裝置，Yeh and Tsai[14]等學者研究是

以具迴流共軛格拉茲中，加裝中間隔板產生二行程系統，而增加熱傳效果。

三、研究方法及成果

3.1 數學模式之表示式

考慮兩平板間帶有一隔板之具迴流效應熱傳系統(如圖一)，兩平板間距 W ，兩平板間加裝一可忽略厚度的平板，使之形成上下二行程流動，上下層流之間距分別為 ΔW (下層流)與 $(1-\Delta)W$ (上層流)，長度為 L ，寬度 $B(B \gg W)$ 。入口處是以溫度為 T_i ，體積流率為 V 並與由出口處回流比 R 混合流入下層流。為簡化問題的處理，作如下的假設：(a)物性為常數；(b)壁溫固定；(c)入口流體為完全發展流；(d)忽略軸傳導與邊端效應。由上之假設，能量與動量守恆之無因次溫度分布與速度分布微分方程如下：

$$\frac{\partial^2 \psi_a(\eta_a, \xi)}{\partial \eta_a^2} = \left(\frac{W_a^2 v_a}{L\alpha} \right) \frac{\partial \psi_a(\eta_a, \xi)}{\partial \xi} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_b(\eta_b, \xi)}{\partial \eta_b^2} = \left(\frac{W_b^2 v_b}{L\alpha} \right) \frac{\partial \psi_b(\eta_b, \xi)}{\partial \xi} \quad (2)$$

$$v_a(\eta_a) = \bar{v}_a(6\eta_a - 6\eta_a^2), \quad 0 \leq \eta_a \leq 1 \quad (3)$$

$$v_b(\eta_b) = \bar{v}_b(6\eta_b - 6\eta_b^2), \quad 0 \leq \eta_b \leq 1 \quad (4)$$

其中

$$v_a = [V(R+1)/W_a B] = \bar{v}_a(R+1), \quad v_b = -[V(R+1)/W_b B] = \bar{v}_b(R+1),$$

$$G_z = \frac{V(W_a + W_b)}{\alpha B L} = \frac{VW}{\alpha B L}, \quad W_a = \Delta W, \quad W_b = (1-\Delta)W,$$

$$\frac{W_a}{W_b} = \frac{\Delta}{1-\Delta}, \quad \theta_a = 1 - \psi_a = \frac{T_a - T_i}{T_s - T_i}, \quad \theta_b = 1 - \psi_b = \frac{T_b - T_i}{T_s - T_i} \quad (5)$$

方程式(1)，(2)之邊界條件如下：

$$\psi_a(0, \xi) = 0 \quad (6)$$

$$\psi_b(0, \xi) = 0 \quad (7)$$

$$\psi_a(1, \xi) = \psi_b(1, \xi) \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \psi_a(1, \xi)}{\partial \eta_a} = \frac{W_a}{W_b} \frac{\partial \psi_b(1, \xi)}{\partial \eta_b} \quad (9)$$

$$\psi_F = \frac{T_F - T_s}{T_i - T_s}, \quad \theta_F = 1 - \psi_F \quad (10)$$

解此系統偏微分方程式，以分離變數法如下：

$$\psi_a(\eta_a, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{a,m} F_{a,m}(\eta_a) G_m(\xi) \quad (11)$$

$$\psi_b(\eta_b, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{b,m} F_{b,m}(\eta_b) G_m(\xi) \quad (12)$$

代入式(1)和(2)與邊界條件式(6)至式(9)得：

$$G_m(\xi) = e^{-\lambda_m(1-\xi)} \quad (13)$$

$$F_{a,m}^*(\eta_a) - \left[\frac{\lambda_m W_a^2 v_a(\eta_a)}{L\alpha} \right] F_{a,m}(\eta_a) = 0 \quad (14)$$

$$F_{b,m}^*(\eta_b) - \left[\frac{\lambda_m W_b^2 v_b(\eta_b)}{L\alpha} \right] F_{b,m}(\eta_b) = 0 \quad (15)$$

$$F_{a,m}(0) = 0 \quad (16)$$

$$F_{b,m}(0) = 0 \quad (17)$$

$$S_{a,m} F_{a,m}(1) = S_{b,m} F_{b,m}(1) \quad (18)$$

$$-S_{a,m} F_{a,m}'(\eta_a)|_{\eta_a=1} = \frac{W_a}{W_b} S_{b,m} F_{b,m}'(\eta_b)|_{\eta_b=1} \quad (19)$$

對於解式(14)與式(15)兩常微分方程是以級數解求其解之， $F_{a,m}(\eta_a)$ 與 $F_{b,m}(\eta_b)$ 分別為 η_a 與 η_b 之多項式，並代入式(16)，式(17)得：

$$F_{a,m}(\eta_a) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} \eta_a^n, \quad e_{m0} = 0 \text{ (式(16))}, \quad e_{m1} = 1 \text{ (選定值)} \quad (20)$$

$$F_{b,m}(\eta_b) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} \eta_b^n, \quad e_{m0} = 0 \text{ (式(17))}, \quad e_{m1} = 1 \text{ (選定值)} \quad (21)$$

將式(18)與(19)結合得：

$$\frac{F_{b,m}(1)}{F_{a,m}(1)} = \frac{W_a}{W_b} \frac{F_{b,m}'(\eta_b)|_{\eta_b=1}}{F_{a,m}'(\eta_a)|_{\eta_a=1}} \quad (22)$$

因此，由式(22)可輕易求出特徵值，然後由式(20)及式(21)的定義求得。又由式(14)至式(19)可得一具正交性質之積分方程如下：

$$W_b \int_0^1 \left[\frac{W_a^2 v_a(\eta_a)}{L\alpha} \right] S_{a,m} S_{a,n} F_{a,m} F_{a,n} d\eta_a + W_a \int_0^1 \left[\frac{W_b^2 v_b(\eta_b)}{L\alpha} \right] S_{b,m} S_{b,n} F_{b,m} F_{b,n} d\eta_b = 0, \quad n \neq m \quad (23)$$

又下層末端溫度為：

$$\psi_L = \sum_{m=1}^{\infty} S_{a,m} F_{a,m}(\eta_a) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{b,m} F_{b,m}(\eta_b) \quad (24)$$

將式(24)引入式(23)得：

$$\psi_L \left[\frac{W_b S_{a,m}}{\lambda_m} \{F_{a,m}'(1) - F_{a,m}'(0)\} + \frac{W_a S_{b,m}}{\lambda_m} \{F_{b,m}'(1) - F_{b,m}'(0)\} \right] = W_b S_{a,m}^2 \left[F_{a,m}(1) \frac{\partial F_{a,m}(1)}{\partial \lambda_m} - F_{a,m}(1) \frac{\partial F_{a,m}(1)}{\partial \lambda_m} + F_{a,m}(0) \frac{\partial F_{a,m}(0)}{\partial \lambda_m} \right] + W_a S_{b,m}^2 \left[F_{b,m}(1) \frac{\partial F_{b,m}(1)}{\partial \lambda_m} - F_{b,m}(1) \frac{\partial F_{b,m}(1)}{\partial \lambda_m} + F_{b,m}(0) \frac{\partial F_{b,m}(0)}{\partial \lambda_m} \right] \quad (25)$$

利用下層末端經泵到上層末端，其無因次溫度(在 $\xi=1$)可分別表示如下：

$$\psi_L = \frac{\int_0^1 v_a W_a B \psi_a(\eta_a, 1) d\eta_a}{(R+1)V} = \frac{1}{(R+1)G_z \Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{a,m}}{\lambda_m} \{F_{a,m}'(1) - F_{a,m}'(0)\} \quad (26)$$

和

$$\psi_L = \frac{-\int_0^1 v_b W_b B \psi_b(\eta_b, 1) d\eta_b}{(R+1)V} = \frac{-1}{(R+1)G_z(1-\Delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{b,m}}{\lambda_m} \{F_{b,m}'(1) - F_{b,m}'(0)\} \quad (27)$$

由上述所列出之方程式，未知而須待定者為 $S_{a,m}$ 、

$S_{b,m}$ 和 ψ_L ，共有 $(2n+1)$ 個未知數，先假設一 ψ_L 值，代入式(18)、式(19)和式(26)，求出 $S_{a,m}$ 和 $S_{b,m}$ ，然後利用式(27)或式(28)驗證 ψ_L 值。

因以上之結果，及能量守恒關係，可求得出口溫度 ψ_F 和入口混合溫度 $\psi_a(\eta_a, 0)$ 分別如下：

$$\psi_F = 1 - \frac{1}{G_z} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda_m})}{\lambda_m \Delta} S_{a,m} F_{a,m}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda_m})}{\lambda_m (1-\Delta)} S_{b,m} F_{b,m}(0) \right] \quad (28)$$

$$\psi_a(\eta_a, 0) = \frac{1}{R+1} \left[1 - \frac{1}{G_z(1-\Delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_m} S_{b,m}}{\lambda_m} \right) (F_{b,m}(1) - F_{b,m}(0)) \right] \quad (29)$$

定義一納塞數(Nusselt number)，以獲得熱傳效率改善程度，其中納塞數之定義如下：

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{hW}}{k} \quad (30)$$

效率的定義如下：

$$I_h = \frac{\overline{Nu} - \overline{Nu}_0}{\overline{Nu}_0} = \frac{\psi_{0,F} - \psi_F}{1 - \psi_{0,F}} = \frac{\theta_F - \theta_{0,F}}{\theta_{0,F}} \quad (31)$$

其中

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{hW}}{k} = \frac{VW}{2\alpha BL} (1 - \psi_F) = 0.5 G_z \theta_F \quad (32)$$

3.2 實驗裝置：

如圖(一)所示，以不銹鋼建造一 $120 \times 20 \times 4.3$ 公分平板式熱交換器，並於 $\Delta = 0.5$ 處焊接一塊 $120 \times 20 \times 0.3$ 公分之不銹鋼板，在冷卻用夾層中，以高流量的冷卻用水循環使用，以保持壁溫於 $16 \pm 0.5^\circ\text{C}$ ，且於下通到出口處裝設一個 $1/4$ 匹馬力泵和兩個控制閥，並於前端裝設兩個浮子流量計，以準確地控制進料體積流率 V 和迴流體積流率 RV 。為了確保熱量不散失，以泡綿包住熱交換器主體，並以玻璃綿填塞於泡綿與主體間之空隙。利用八支 Pt-type 熱電偶連接記錄器來測量溫度，亦即上、下外壁之進出口，及上、下層通道進出口溫度。

實驗步驟如下：

- (1) 選定迴流比 R ；
- (2) 選擇進料體積流率 V ，迴流體積流率 RV ；
- (3) 開始操作系統一段時間，待系統穩定後，量取記錄器數據，並對於不同的 R 值和 V 值，重複步驟(1)與(2)之實驗。

四、結論與討論

影響入口溫度和出口溫度的因素有兩個，即格拉茲數和迴流比值。格拉茲數大小可表示其流體流動的快慢，也影響流體之滯留時間，而迴流比產生預熱效果，可影響改變入口處溫度。所以，格拉茲數與迴流比為探討此系統受熱傳效率之影響。由圖(二)可看出在迴流比值固定下，隨著格拉茲數的增加，滯留時間愈短，則出口的無因次溫度會隨之降低。而且在任何格拉茲數時，迴流比值愈大，其出口溫度愈高。

然而，圖(二)是在 $\Delta = 0.5$ 下 θ_F 對 G_z 所得的圖

形。在圖中，我們可以發現大約在 G_z 小於 10 的時候，沒迴流裝置之系統較本系統為佳，但在 G_z 大於 10 的時候，有迴流裝置之共軛格拉茲系統較會比較佳

表(一)可發現，在相同的 Δ 下，迴流比越大，熱傳效率高，代表了熱傳量越多。隔板的位置亦會影響熱傳量，亦即在固定的迴流比值，其熱傳效果為 $\Delta = 0.25 > \Delta = 0.75 > \Delta = 0.50$ 。

五、符號說明

\bar{h}	: 平均熱傳係數, $kW/m^2 \cdot K$
I	: 熱傳改善率
L	: 通道長度, cm
\overline{Nu}	: 納塞數
S_m	: 相對於 λ_m 之展開式的係數
R	: 迴流比值
Re	: 雷諾數
T	: 流體溫度, $^\circ\text{C}$
V	: 管道流體體積流率, cm^3/s
v	: 無因次速度, cm/s
x	: 縱向座標, cm
z	: 軸向座標, cm

希臘符號：

ξ	: 無因次軸向座標, z/L
ψ	: 無因次溫度
λ_m	: 特徵值
η	: 無因次縱向座標, x/W

上下標：

a	: 下通道
b	: 上通道
F	: 二行程裝置之出口處
I	: 進口處
L	: 在 $\xi = 1$ 之出口處
o	: 單行程無迴流之裝置
s	: 管壁處

致謝-本研究承行政院國家科學委員會補助經費(NSC 88-2214-E-032-002)，特此致謝。

六、參考文獻

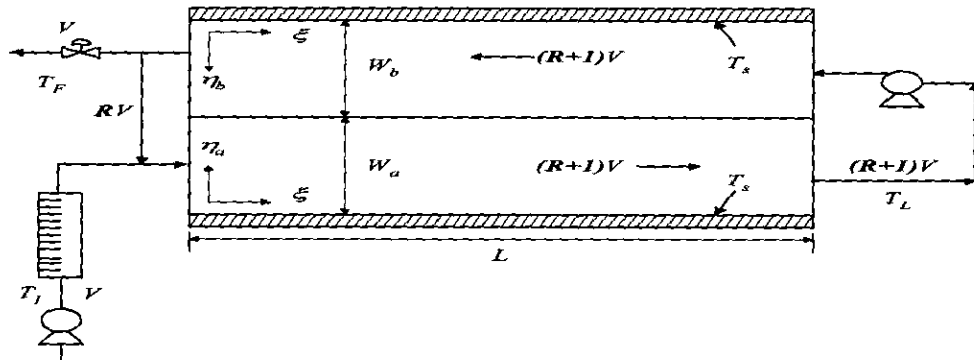
1. Shah, R. K. and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. p.169, Academic Press, New York(1978).
2. Dang, V.-D., and M.Steinberg, "Convective Diffusion with Homogeneous and Heterogeneous Reaction in a Tube," *J. Phys. Chem.*, **84**,214(1980).
3. Sellars, J. R., Tribus, M. and Klein, J. S., Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit-The Graetz Problem Extended, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, 1956, **78**, 441-448.
4. Hatton, A. P., and Quarmby, A., Heat Transfer in the Thermal Entry Length with Laminar Flow in An Annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1962, **5**, 973-

980.

5. Nunge, R. J., and W. N. Gill, "Analysis of Heat or Mass Transfer in Some Countercurrent Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **8**, 873 (1965).
6. Davis, E. J., Exact Solution for a Class of Heat and Mass Transfer Problems, *Can. J. Chem. Eng.*, 1973, **51**, 562-572.
7. Michelsen, M. L. and Villadsen, J., The Graetz Problem with Axial Heat Conduction, *Int. J. heat Mass Transfer*, 1974, **17**, 1391-1402.
8. Weigand, B., "An Extract Analytical Solution for the Extended Turbulent Graetz Problem with Dirichlet Wall Boundary Conditions for Pipe and Channel Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**, pp. 1625-1637 (1996).
9. Murkerjee, D., and E. J. Davis, "Direct-Contact Heat Transfer Immiscible Fluid Layers in Laminar Flow," *AIChE J.*, **18**, 94 (1972).
10. Kim, S. S., and D. O. Cooney, "Improved Theory for

Hollow-Fiber Enzyme Reactor," *Chem. Eng. Sci.*, **31**, 289 (1976).

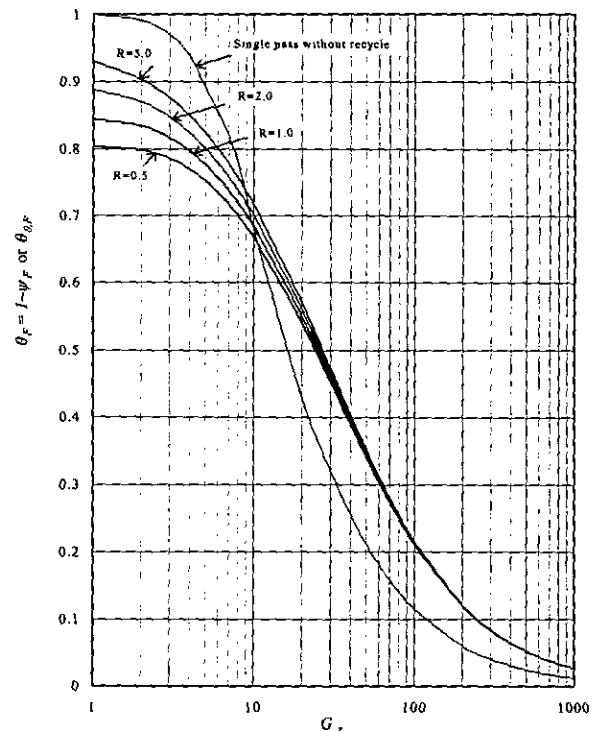
11. Papoutsakis, E., and D. Ramkrishna, "Conjugated Graetz Problems. I: General Formalism and a class of Solid-Fluid Problems," *Chem. Eng. Sci.*, **36**, 1381 (1981).
12. Ho, C. D., Yeh, H. M. and Sheu, W. S., An Analytical Study of Heat and Mass Transfer through a Parallel-Plate Channel with Recycle, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1998, **41**, 2589-2599.
13. Ho, C. D., Yeh, H. M. and Sheu, W. S., The influence of recycle on double-pass heat and mass transfer through a parallel-plate device, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1999, **42**, 1707-1722.
14. Yeh, H. M., Tsai, S. W. and Chiang, C. L., Recycle Effects on Heat and Mass Transfer through a Parallel-Plate Channel, *AIChE J.*, 1987, **33**, 1743-1746.



圖(一) 迴流平板式熱交換系統

表(一) 傳送效率與迴流比值和隔板的位置之關係

I_h (%)	R=1.0			R=5.0		
	$\Delta = 0.25$	$\Delta = 0.5$	$\Delta = 0.75$	$\Delta = 0.25$	$\Delta = 0.5$	$\Delta = 0.75$
$G_z = 1$	-12.9	-15.5	-11.9	-5.1	-6.94	-5.34
10	15.1	0.7	8.3	20.5	5.6	12.4
100	187.8	84.8	121.8	192.6	87.2	124.5
1000	292.1	116.1	172.2	294.5	116.6	173.8



圖(二) 出口溫度與格拉茲數之關係圖