行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

隨機移除之逐步型二設限樣本對雙參數柏拉圖分配參數之區間估計及未來觀測值之預測區間

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC94-2118-M-032-004-
執行期間：94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學統計學系

計畫主持人：吳淑妃

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 95 年 6 月 22 日

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

隨機移除之逐步型二設限樣本對雙參數柏拉圖分配參數之區間估計及未來觀測值之預測區間

Interval Estimation of Parameters of Pareto Distribution and the Prediction of Future Observation for Type II Progressive Censored Samples or General Type II Progressive Censored Samples

計劃編號: NSC94-2118-M-032-009

執行期限: 94 年 8 月 1 日 至 95 年 7 月 31 日

主持人: 吳淑妃 淡江大學統計系

一. 中文摘要

有時因時間、成本的限制或資料蒐集時人為的疏失，而需面對不完整設限資料。若壽命分配之失敗率λ為具有尺度參數θ與形狀參數ν之 Gamma 分配，則此產品之壽命有柏拉圖分配, 其在壽命檢測與可靠度問題上佔據一個很重要的地位。所以本研究針對隨機移除之逐步型二設限樣本及隨機移除之一般化逐步型二設限樣本, 對具有雙參數θ與ν之雙參數型 I 柏拉圖分配之參數進行區間估計及信賴區域之研究. 同時提出未來觀測值和未來相鄰故障時間比值的預測區間。另外, 我們給一個數值例子來示範這些估計與預測結果, 並用 Monte Carlo 模擬法, 來評估這些估計與預測結果之表現.

關鍵辭:

逐步型二設限樣本, 一般化逐步型二設限樣本, 型 I 柏拉圖分配, 信賴區間, 信賴區域, Monte Carlo 模擬法.

ABSTRACT

In this research, the estimation of parameters for the two-parameter Type I Pareto distribution by progressively type Ⅱ censored sample or general progressively type Ⅱ censored sample with uniform removal or Binomial removal is investigated by individual confidence intervals or confidence regions. The distribution of the proposed pivotal quantities will be derived in this research. The future observation and the ratio of any two adjacent future lifetimes are predicted as well. One numerical example is given to demonstrate all results and the Monte Carlo simulation is used to assess the performance of all results based on the length of confidence interval or the area of confidence region under the confidence coefficient.

Keywords：Progressively Type-II censored sample; General Progressively Type-II censored sample; Type I Pareto Distribution; Confidence Interval; Confidence Region, Monte Carlo Simulation.

對一組樣本大小為n的樣本，由於時間、成本的限制或資料蒐集時人為的疏失，而無法取得完整樣本, 而取得的部分樣本稱為設限樣本. 對此設限樣本, 一般完整樣本的統計分析方法並無法適用. 近來如 Lawless(1982), Cohen(1991)等已開始探討對設限樣本之統計分析方法.

在可靠度分析(Analysis of Reliability) 及壽命檢定實驗(Life Test Experiments)方面, see, e.q., pp. 220-221 of Johnson and Kotz (1970)就常有此種設限的問題產生. 當產品失敗率λ為常數時，其壽命分配為一指數分配，而當失敗率λ為隨機變數時，則產品的壽命分配便為一混合分配(參閱 McNolty, Doyle 和 Hansen(1980))。若失敗率λ為具有尺度參數θ與形狀參數ν之 Gamma 分配，則此產品之壽命有柏拉圖分配, 其機率密度函數為

$$f(y)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}\frac{\theta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\nu-1}e^{-\theta\lambda}d\lambda=\frac{\nu}{\theta}(1+\frac{y}{\theta})^{-(\nu+1)}$$

。此為型 II 柏拉圖分配. 令 $X=Y+\theta$,則

X 之機率密度函數(probability density function)為：

$$f(x)=\frac{\nu}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{-(\nu+1)},$$

$x>\theta,\nu>0,\theta>0$；

其累積分配函數(cumulative distribution function)為

$F(x)=1-(\frac{x}{\theta})^{-\nu}$, $x>\theta$。此為型 I 柏拉圖分配.本研究就是針對型 I 柏拉圖分配之雙參數.

設第 1 個失敗的產品有被觀察到, 記為X_1, 以此類推, 觀察到的是第i個有序樣本, 記為X_i, 則隨機移除R_i個隨機樣本. $i=1,\ldots,m$, 且設限計劃(Censoring Scheme) $\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$是事先決定的, where $R_m=n-r_{r+1}-\ldots-r_{m-1}-m$. 則$X_1<X_2<\cdots<X_m$為兩參數$\nu$、$\theta$之型I柏拉圖分配在型二逐步設限下的有序樣本，此處$m$是事先決定的。在型二逐步設限下$\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$是事先決定的，這樣我們可以定義概似函數 (likelihood function) (參考Cohen, A. C. (1976))為

$$L_1(\mathbf{x};\nu,\theta|\mathbf{R}=r)$$

$$=c^*\prod_{i=1}^{m}\frac{\nu}{\theta}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{(1+r_i)(-2\nu-1)}\quad, \qquad (3.1)$$

上式中 $c^*=n(n-r_1-1)\cdots(n-r_1-\cdots-r_{m-1}-m+1)$

且 $x_1<x_2<\cdots<x_m$。在型二逐步設限下$\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$是隨機的包括

(1). 二項移除

$$P(R_i=r_i|R_{i-1}=r_{i-1},\cdots,R_1=r_1)=\begin{pmatrix}n-m-\sum_{j=1}^{i-1}r_j\\ r_i\end{pmatrix}p^{r_i}(1-p)^{n-}$$

上式中

$0\le r_i\le n-m-(r_1+\cdots+r_{i-1}),\ i=2,\cdots,m-1$

(2) 均勻移除

$$P(R_i=r_i|R_{i-1}=r_{i-1},\ldots,R_1=r_1)=\frac{1}{n-m-(r_1+\cdots+r_{i-1})+1}$$

上式中

$0\le r_i\le n-m-(r_1+\cdots+r_{i-1}),\quad i=1,\ldots,m-1$

(a) 隨機移除之逐步型二設限樣本下雙參數θ與ν的信賴區間

設 $X_1<X_2<\cdots<X_m$ 為n個隨機樣本中的前m個失敗的有序樣本，此處m是事先決定的。則$Y_i=\nu\ln(\frac{X_i}{\theta})$是尺度參數為 1 之指數分配在型二逐步設限下的有序樣本，當$\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$ 事先固定時，利用變數轉換(參考Thomas, D. R. & Wilson, W. M. (1972))：

$$\begin{cases} Z_1 = nY_1, \\ Z_2 = (n - r_1 - 1)(Y_2 - Y_1), \\ Z_3 = (n - r_1 - r_2 - 2)(Y_3 - Y_2), \\ \cdots \quad \cdots \\ Z_m = (n - r_1 - \cdots - r_{m-1} - m + 1)(Y_m - Y_{m-1}), \end{cases} \qquad (*)$$

可以得到 $Z_1,...,Z_m$ 為iid之標準指數分配. 由於在 $\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$ 事先給定下，其分配與 $\boldsymbol{R}=(R_1=r_1,\ldots,R_{m-1}=r_{m-1})$ 無關，所以 $Z_1,...,Z_m$ 之邊際分配為iid之標準指數分配. 故可得到下列輔助定理：

［輔助定理］若令 $U = 2Z_1$，$V = 2\left(\sum_{i=2}^{m} Z_i\right)$，則

(a) $U \sim \chi^2(2)$，

(b) $V \sim \chi^2(2m-2)$，

(c) U 與 V 獨立。

為了求得參數 ν 與 θ 的區間估計，以上述三點輔助定理可得到下面兩種樞紐量：

$$h = U = 2n\nu \ln(\frac{X_1}{\theta}),$$

$$g = V = 2\nu[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)(\ln X_i - \ln\theta) - (n - r_1 - 1)(\ln X_1 - \ln\theta)] = 2\nu[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i - (n - r_1 - 1)\ln X_1]$$

, where

$r_m = n - r_1 - ... - r_{m-1} - m$.

$r_m = n - r_1 - ... - r_{m-1} - m$.

所以兩種樞紐量 h 與 g 互相獨立且其分配與雙參數無關，其分配分別為 $h \sim \chi^2(2)$ 且 $g \sim \chi^2(2m-2)$，其中 m >1。

［定理 1］假設 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 為 m 個兩參數 ν、θ 之型 I 柏拉圖分配在型二逐步設限下的有序樣本，且當 $\theta > 0, 0 < \alpha < 1$ 時，

$$[\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2m-2)}{2[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i - (n - r_1 - 1)\ln X_1]} < \nu < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2}{2[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i}$$

為參數 ν 的 $1-\alpha$ 水準之信賴區間。

［定理 2］假設 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 為 m 個兩參數 ν、θ 之型 I 柏拉圖分配在型二逐步設限下的有序樣本，且當 $\theta > 0, 0 < \alpha < 1$ 時，

$$\begin{cases} [\dfrac{X_1}{\exp(\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2)/(2n\nu))} > \theta > \dfrac{X_1}{\exp(\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2)/(2n\nu))}] \\ [\dfrac{\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2m-2)}{2[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i - (n - r_1 - 1)\ln X_1]} < \nu < \dfrac{\chi^2_{1-}}{2[\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln} \end{cases}$$

為參數 ν 和 θ 的 $1-\alpha$ 水準之聯合信賴區間。

(b) 隨機移除之一般化逐步型二設限樣本下雙參數 θ 與 μ 的信賴區間

設前 r 個失敗的有序樣本沒被觀察到，第一次觀察到的是第 r+1 個有序樣本，記為 X_{r+1}，以此類推，觀察到第 $(r+i)$ 個有序樣本，記為 X_{r+i}，則隨機移除 R_{r+i} 個隨機樣本. $1 \le i \le m-r$. 則 $X_{r+1} < \cdots < X_m$ 稱為一般化逐步型二設限樣本，且設限計劃(Censoring Scheme)為 $R_r = (R_{r+1} = r_{r+1},...,R_{m-1} = r_{m-1}, R_m = r_m)$ 是事先決定的, where $R_m = n - r_{r+1} - ... - r_{m-1} - m$. 當 $r = 0$ 時，一般化逐步型二設限樣本即為前面之型二設限樣本. 當 $R_r = (R_{r+1} = r_{r+1},...,R_{m-1} = r_{m-1}, R_m = r_m)$ 事先固定時，利用變數轉換(參考 Balakrishnan and Aggarwala (2000))：

$$
\begin{cases}
Z_{r+1} = (n-r)Y_{r+1}, \\
Z_{r+2} = \left(n-r-r_{r+1}-1\right)\left(Y_{r+2}-Y_{r+1}\right), \\
Z_{r+3} = \left(n-r-r_{r+1}-r_{r+2}-2\right)\left(Y_{r+3}-Y_{r+2}\right), \\
\cdots \quad \cdots \\
Z_m = \left(n-r-r_{r+1}-\cdots-r_{m-1}-m+r+1\right)\left(Y_m-Y_{m-1}\right)
\end{cases}
$$

可以得到$Z_{r+2},...,Z_m$為iid之標準指數

分配. 且 $Y_{r+1}=\dfrac{Z_{r+1}}{n-r}$ 為標準指數分配之第r+1個有序統計量, 其和

$Z_{r+2},...,Z_m$互相獨立. By Johnson and

Kotz (1970), the pdf of $Y_{r+1}=\dfrac{Z_{r+1}}{n-r}$

is given by

$$f_{Y_{r+1}}(t_2)=\frac{n!}{r!(n-r-1)!\theta}[1-e^{-t_2}]^r[e^{-t_2}]^{n-r}$$

. 由於在

$R_r=(R_{r+1}=r_{r+1},...,R_{m-1}=r_{m-1},R_m=r_m)$

事先給定下, 其分配與

$R_r=(R_{r+1}=r_{r+1},...,R_{m-1}=r_{m-1},R_m=r_m)$

無關, 所以$Z_{r+2},...,Z_m$之邊際分配為iid之標準指數分配.我們提出兩個樞紐量如下:

$$h=Y_{r+1}=\nu\ln(\frac{X_{r+1}}{\theta}),$$

$$g=2\nu[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+1)\ln(\frac{X_i}{\theta})-(n-r-r_{r+1}-1)\ln(\frac{X_{r+1}}{\theta})]=2\nu[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)\ln X_{r+1}]$$

, where $r_m=n-r_1-...-r_{m-1}-m$.

所以兩種樞紐量h與g互相獨立且其分配與雙參數無關, 其分配分別

為$h\sim F^*(m,n,r)$且

$g\sim\chi^2(2(m-r-1))$，其中$F^*(.)(m,n,r)$

爲$Y_{r+1}=\dfrac{Z_{r+1}}{n-r}$之 cdf.且$m>1$。爲

$Y_{r+1}=\dfrac{Z_{r+1}}{n-r}$之 cdf。

[定理3] 假設$X_{r+1},\cdots,X_m$為兩參數ν、θ之型I柏拉圖分配在型二逐步設限下的有序樣本，且當 $\theta>0, 0<\alpha<1$時，

$$[\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2m-2)}{2[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)\ln X_{r+1}]}<\nu<\frac{\quad}{2[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+\cdots}$$

為參數ν的$1-\alpha$水準之信賴區間。

[定理 4] 假設$X_{r+1},\cdots,X_m$為兩參數ν、θ之型I柏拉圖分配之一般化逐步型二設限下的有序樣本，且當

$0<\alpha<1$時，

$$
\begin{cases}
[\dfrac{X_{r+1}}{\exp(F^*_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(m,n,r)/\nu)}>\theta>\dfrac{X_{r+1}}{\exp(F^*_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(m,n,r)/\nu)} \\
[\dfrac{\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2m-2)}{2[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)\ln X_{r+1}]}<\nu<\dfrac{\quad}{2[\sum_{i=r+2}^{m}(r_i\cdots}
\end{cases}
$$

為參數ν和θ的$1-\alpha$水準之聯合信賴區間。

三:結果與分析:下表是兩參數(ν、θ)=(1,e)之柏拉圖分配,m=8, 9, 10 for n=10 and m=18, 19, 20 for n=20, r=0, 1, 2, 均勻移除(PCR)和二項移除(P=.1, .3, .5, .8)之平均信賴區間長度和平均信賴區域面積(模擬次數5000 次). For any given (n,m,P), 信賴區間長度和信賴區域面積隨著 r 的增加而增加. 而設限結果會趨近於完整樣本當有效樣本比值 m/n 趨近於 1. 且模擬信心水準皆可達到名目信心水準.95.

			PCR	0.1	0.3	0.5	0.8
n=10	R=0	m=8	1.72186	1.7035	1.70188	1.70708	1.69392
			1.78339	1.77803	1.78156	1.77827	1.77788
		m=9	1.55681	1.57216	1.56422	1.56706	1.55969
			1.66462	1.67012	1.67183	1.67241	1.66743
		m=10	1.46033				
			1.57339				
	R=1	m=8	1.91299	1.90079	1.90089	1.88892	1.8865
			2.87434	2.86195	2.85674	2.835	2.83212
		m=9	1.72502	1.70098	1.72674	1.72494	1.69324
			2.65495	2.64794	2.65991	2.65219	2.63663
		m=10	1.55735				
			2.47763				
	r=2	m=8	2.16207	2.16155	2.14062	2.12925	2.16422
			4.03889	4.04034	4.05346	4.00991	4.07146
		m=9	1.90855	1.88514	1.88631	1.87407	1.89572
			3.74282	3.70645	3.69913	3.71361	3.72071
		m=10	1.69237				
			3.45896				
n=20	r=0	m=18	1.00298	1.00905	1.00271	1.00871	1.00299
			.61023	.60943	.60944	.61012	.60956
		m=19	.9729	.97729	.97766	.97573	.97343
			.5928	.59287	.59284	.59295	.59256
		m=20	.94394				
			.57669				
	r=1	m=18	1.04248	1.04164	1.04142	1.04015	1.0459
			.91163	.91024	.91188	.91155	.91258
		m=19	1.00395	1.00799	1.00532	1.00505	1.00022
			.88375	.88422	.88472	.88416	.88613
		m=20	.97510				
			.86162				
	r=2	m=18	1.07695	1.08317	1.07693	1.07461	1.07121
			1.18991	1.18752	1.18807	1.18602	1.1852
		m=19	1.03779	1.04301	1.0432	1.03561	1.03929
			1.14785	1.15306	1.15254	1.14911	1.14875
		m=20	1.00715				
			1.11759				

**未來觀測值和未來等候時間之預測區間。

(1) 未來觀測值

我們欲預測未來第 $m+1$ 個觀測值之預測區間，

(a) 利用隨機移除之逐步型二設限樣本 $X_1,...,X_m$ 來預測未來觀測值的預測區間，

我們提出以下樞紐量：

$$k=\frac{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-m+1)(\ln X_{m+1}-\ln X_m)}{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_1}$$

， 其中 $k \sim F(2,2m-2)$, df=2(m-1).

根據已發生故障之樣本壽命觀測值 $X_1,...,X_m$ ，我們便能求得 X_{m+1} 之 100(1-α)%預測區間為

$$\{X_m \exp(\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_1}{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-m+1)}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2,2m-2))$$

$$,\,X_m \exp(\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_{11}}{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-m+1)}F_{\frac{\alpha}{2}}(2,2m-2))\}$$

(b) 利用隨機移除之一般化逐步型二設限樣本 $X_{r+1},...,X_m$ 來預測未來觀測值的預測區間，

我們提出以下樞紐量：

$$k_1=\frac{df\,(n-r-r_1-...-r_{m-1}-m+r+1)(\ln X_{m+1}-\ln X_m)}{\sum_{i=r+2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+11}-1)\ln X_{r+1}}\text{，}$$

其中 $k_1 \sim F(2,2(m-r-1))$,

根據已發生故障之樣本壽命觀測值 $X_{r+1},...,X_m$ ，我們便能求得 X_{m+1} 之 100(1-α)%預測區間為

$$\{X_m \exp(\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)\ln X_1}{df\,(n-r-r_1-...-r_{m-1}-m+r+1)}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2,2(m-r-1)))$$

$$,\,X_m \exp(\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{1r+1}-1)\ln X_1}{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-m+1)}F_{\frac{\alpha}{2}}(2,2(m-r-1)))\}$$

(2)未來時間比之預測區間

我們欲預測未來第 j 個到第 $j+1$ $(m \le j \le n-1)$ 個發生故障的等候時間之預測區間，

(a)利用隨機移除之逐步型二設限樣本 $X_1,...,X_m$ 來預測未來等時間比的預測區間，

因此提出了下列樞紐量

$$k_2(j)=\frac{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-j+1)(\ln X_{j+1}-\ln X_j)}{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_1}$$

， $m \le j \le n-1$，其中 $k_2(j) \sim F(2,2m-2)$, df=2(m-1).

我們便能求得 X_{j+1}/X_j 之100(1-α)%預測區間為

$$\{\exp\{\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_1}{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-j+1)}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2,2m-2)\}$$

$$,\exp\{\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r_1-1)\ln X_1}{df\,(n-r_1-...-r_{m-1}-j+1)}F_{\frac{\alpha}{2}}(2,2m-2)\}\}$$

(b)利用隨機移除之一般化逐步型二設限樣本 $X_{r+1},...,X_m$ 來預測未來等候時間的預測區間，

我們提出以下樞紐量：

$$k_3(j)=\frac{df\,(n-r-r_1-\ldots-r_{m-1}-j+r+1)(X_{j+1}-X_j)}{(n-r-r_1-\ldots-r_{m-1}-j+r+1)X_m+\sum_{i=r+2}^{m-1}(r_i+1)X_i-(n-r-r_{r+1}-1)X_{r+1}}$$

， $m \le j \le n-1$，其中

$k_3(j) \sim F(2,2(m-r-1))$, df=2(m-r-1).

我們便能求得 X_{j+1}/X_j 之100(1-α)% 預測區間為

$$\{\exp\{\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)X_{r+1}}{df\,(n-r_1-\ldots-r_{m-1}-j+1)}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2,2(m-r-1))\}$$

$$,\exp\{\frac{\sum_{i=2}^{m}(r_i+1)\ln X_i-(n-r-r_{r+1}-1)X_{r+1}}{df\,(n-r_1-\ldots-r_{m-1}-j+1)}F_{\frac{\alpha}{2}}(2,2(m-r-1))\}\}$$

，

數值實例示範

We consider the data reported by Nigm *et al*. (2003, p535 subsection 3.1). The data proposed that n = 20 items are put on test simultaneously. Moreover, Nigm *et al*. (2003) have assumed that the failure time of items is distributed according to the Pareto distribution. We use this data to demonstrate our proposed methods. With Binomial random for (n,m,r,P)=(20,15,2,.1), the sample is given by $(X_3, X_4, \cdots, X_{15})$ =(2.810, 2.993,3.042,3.312,4.29,5.038,5.629,7.009,7.54,7.955,9.527, 10.099,10.286,13.125,16.338) under the censoring scheme $(r_3, r_4, \ldots, r_{15})$ =(0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,4) . As to the 95% confidence interval for ν is (0.34102, 1.08246) with confidence length 0.74145. As to the 95% joint confidence region for ν與μ, The area of the confidence region is given by 1.11457. The prediction interval for X_{16} is given by (16.49606, 83.88744). At last the prediction interval for $X_{16}-X_{15}$ =(1.00965, 5.13436) , $X_{17}-X_{16}$ =(1.01288, 8.85758), $X_{18}-X_{17}$ =(1.01939, 26.36165), $X_{19}-X_{18}$ =(1.03915, 694.93655)

由於篇幅限制只能些結果，其他結果保留在作者處

四. 計劃結果與自評

我已完成理論推導以及模擬的研究，所有的程式皆已建立完成. 故此研究已完成百分之百. 此研究結果相信很快就可在學術學刊發表.

五. 參考資料

Aggarwala, R. & Balakrishan, N. (1998) Some properties of progressive censored order statistics from the pareto distribution with applications to inference, *Submitted for publication.*

Bain, L. J. & Engelhart, M. (1992) *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury Press.

Balakrishan, N. & Aggarwala, R. (2000) *Progressive* *censoring：Theory, Methods and Applications* (Boston, Birkhauser).

Balakrishan, N. ＆ Sandhu, R. A. (1995) A simple simulational algorithm for generating progressive Type II cersored samples, *The American Statistician*, 49, pp. 229-230.

Chen, Z. (1998a) Joint estimation for the parameters of the extreme value dsitributions. Statistical Papers. 39, pp. 135-146.

Cohen, A. C. (1963) Progressively censored samples in the life testing, *Technometrics*, 5, pp. 327-339.

Cohen, A. C. (1976) Progressively censored sampling in the three parameter log-normal distribution, *Technometrics*, 17, pp. 347-351.

Cohen, A. C. & Norgaard, N. J. (1977) Progressively censored sampling in the three parameter gamma distribution, *Technometrics*, 19, pp. 333-340.

Engelhart, M., Bin, L. J. & Shiue, W. K. (1986) Statistical analysis of a compound Exponential failure model. *J. Statistical Computation and Simulation*, 23, pp. 229-315.

Gajjar, A. V. & Khatri, C. G. (1969) Progressively censored samples from log-normal and logistic distributions, *Technometrics*, 11, pp. 793-803.

Gibbons, D. I. & Vance, L. C. (1983) Estimators for the 2-parameter Weibull distribution with progressively censored samples, *IEE Transactions on Reliability*, R-32, pp. 95-99.

Gumbel, E. J. (1958) *Statistics of Extremes*, New York：Columbia University Press.

Johnson, L. N. & Kotz, S. (1970) *Distribution in Statistics：Continuous Univariate Distributions-Vol.1&2*, Wiley, New York

Lawless, J. F. (1982) *Statistical Models for Lifetime Data* (New York, Wiley).

Mann, N. R. (1971) Best linear invariant estimation for Weibull parameters under progressive censoring, *Technometrics*, 13, pp. 521-533.

Mcnolty, F., Doyle, J. & Hansen, E. (1980) Properties of the mixed Exponential failure process. *Technometrics*, 22, pp. 555-565.

Nigm, A. M., Al-Hussaini, E. K. and Jaheen, Z. F. (2003), Bayesian one-sample prediction of future observations under Pareto distribution, *Statistics*, **37**, 527-536.

Nordquist, J. F. (1945) Theory of largest values, applied to earthquake magnitudes, *Transactions of American Geographical Union*, 26, pp. 29-31.

Potter, W. D. (1949) Normalcy test of Precipitation and frequency studies of runoff on small watersheds, U. S. Department of Agriculture Technical Bulletin, No.985, Washington, DC：GPO.

Rantz, S. F. & Riggs, H. C.(1949) Magnitude and frequency of floods in the Columbia River Basin, U. S. Geological Survey, Water Supply Paper1080, pp. 317-476.

Thomas, D. R. ＆ Wilson, W. M. (1972) Linear order statistics estimation for the two-parameter Weibull and extreme-value distribution form Type II progressive censored samples, *Technometrics*, 14, pp. 679-691.

Tse, S. K. ＆ Yuen, H. K.(1998)Expected experiment times for the Weibull distribution under progressive censoring with random removals, *Journal of Applied statistics*,25, pp. 75-83.

Tse, S. K., Yang, C. & Yuen, H. K. (2000) Statistical analysis of Weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals, *Journal of Applied statistics*, 27, pp. 1033-1043.

Viveros, R. & Balakrishnan, N. (1994) Interval estimation of parameters of life from progressively censored data, *Technometrics*, 36, pp. 84-91.

Wu, J. W. and Li, P. L. (2003) Optimal estimation of the parameters of the extreme value distribution based on the type II censored sample, Communication in Statistics Theory and Methods, 32, 533-554.

Yuen, H. K. & Tse, S. K. (1996) Parameters estimation for Weibull distributed lifetime under progressive censoring with random removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 55, pp. 57-71.