行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

以雙型II設限樣本對 Weibull 分配的形狀參數做統計推論

計劃編號：NSC89-2118-M-032-017
執行期限：2000 年 8 月 1 日至 2001 年 7 月 31 日
主持人：吳忠武　研究生：陳麗娟　執行機構及單位名稱：淡江大學統計學系

一、中文摘要

本文最主要的目的就是利用算術平均數與幾何平均數之比率來提供四個樞紐量（pivotal quantity**）在** Weibull **分配下的雙型 II 設限樣本對其分配之形狀參數（**shape parameter**）做假設檢定和建立其信賴區間，並與** Gumbel**（**1958**）或** Smith **和** Bain**（**1975**）所利用最小平方法（**least square method**）提出的樞紐量來比較其優劣。**

最後，我們也給幾個例子和做一些蒙地卡羅模擬來評估這四個樞紐量及最小平方法提出的樞紐量在給定信賴水準下，對形狀參數所建立的信賴區間，那一個信賴區間的平均區間長度較短；而也評估利用這五個樞紐量在給定的顯著水準下，對形狀參數做假設檢定，那一個樞紐量提供的檢定統計量較為有效力。

Abstract

In this paper, we discuss the lifetime of a product from the Weibull distribution. We provide four pivotal quantities to test the shape parameter of the Weibull distribution, and establish confidence interval of the shape parameter. This paper proposes a simple exact statistical test for the shape parameter of the Weibull distribution, as well as an exact confidence interval for the same parameter. Necessary critical values of the test are given. Finally, we give some examples and the Monte Carlo simulation to assess the behaviors (including higher power and more shorter length of confidence interval) of five pivotal quantities for testing null hypotheses under given significance level and establishing confidence interval of the shape parameter under the confidence coefficient.

Keywords: Doubly type II censored sample; Shape parameter; Testing hypotheses; Confidence interval; Monte Carlo simulation.

二、緣由與目的

一般在工業生產中的可靠度或壽命試驗最常被討論的壽命分配之一就是 Weibull **分配，例如對一些製造元件或者是設備元件如真空管、電絕緣體等建立一個壽命模式。而且** Weibull **分配在生物醫學上也被廣泛的應用，像是在人類或實驗用之動物體內腫瘤的發生時間。**Gumbel(1958) **及** Bain **和** Antle(1967)**針對** Weibull **分配的形狀參數提出最小平方法的樞紐量，只是前者所取的累積機率函數** $F(x_{(i)})$**之估計式為** $\frac{i}{n+1}$**，而後者的估計式為** $1-Exp\left(-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}\right)$ **（也可看** Johnson, Kotz **和** Balakrishnan(1994)**）。因為形狀參數 δ 是決定** Weibull **分配形狀的一個很重要的依據，所以在本文中，我們有興趣去探討** Weibull **分配的形狀參數 δ 之假設檢定。因此，我們在最後的數值例子中，也會模擬形狀參數為** 0.5、1 **和** 3.60235 **的雙型 II 設限樣本之數值例子做假設檢定與區間估計。**

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **為一組來自具有形狀參數和尺度參數分別為 δ 與 θ 的** Weibull **分配之隨機樣本，而** X_i **的機率密度函數（**pdf**）與累積分配函數（**cdf**）之型式分別為**

$$f(x)=\left(\frac{\delta}{\theta^{\delta}}\right)x^{\delta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\delta}\right\} \qquad (1.1),$$

$$F(x)=1-\exp\left\{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\delta}\right\} \qquad (1.2),$$

其中 $x_i > 0$**，**$i = 1,2,\ldots,n$**，而參數範圍為 δ** > 0 **與 θ** > 0**。其所對應的失敗率函數（**failure rate function**）為**

$$h(x)=\left(\frac{\delta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\delta-1} \qquad (1.3),$$

同樣地，$x_i > 0$**，**$i = 1,2,\ldots,n$**，而參數範圍為 δ** > 0 **與 θ** > 0**。當 δ** > 1 **時，**$h(x)$**是** x **的遞增函數；當 δ** $= 1$ **時，**$h(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)$ **（為常數）；當 δ** < 1 **時，**$h(x)$**是** x **的遞減函數；此外，當 δ** $=1$ **和 δ ＝** 3.60235**，**Weibull **分配其實分別為指數分配和一近似常態分配具有偏態係數為** 0 **和峰度係數為** 2.72**（也可看** Cohen**（**1991**））。**

因此，若有另一組隨機樣本 $Y_i = \left(\frac{X_i}{\theta}\right)^{\delta}$, $i = 1,2,\ldots,n$**，則** $X_i = \theta Y_i^{\frac{1}{\delta}}$**，**$i = 1,2,\ldots,n$**。所以對**(1.1)**式做變數變換，則我們可得到** Y_i**之機率密度函數將為**

$$g(y)=\exp(-y), \quad y>0$$

即 Y_i **將會是來自於標準的指數分配（**standard exponential distribution**）（亦即，**Weibull **分配具有參數 θ＝** 1 **和 δ＝** 1**）的隨機變數。此外，因為** $y(x) = (x/\theta)^{\delta}$**是隨著** x **遞增而嚴格遞增的函數，所以，若令** $y_{(i)} = (x_{(i)}/\theta)^{\delta}$**，則** $Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \ldots \le Y_{(n)}$**將會是來自標準指數分配之隨機樣本所對應的** n **個順序統計量，其中** $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$**為來自** Weibull **分配具有形狀參數和尺度參數 θ 和 δ 之隨機樣本（**$X_1,X_2,\ldots,X_n$**）所對應的順序統計量。**

在此，我們所考慮的樣本型態是雙型 II 設限樣本。因此，我們的樣本假設是，針對來自 Weibull **分配具有參數 θ 和 δ 的一組樣本大小為** n **的隨機樣本，我們只能取得第** $r + 1$ **到第** $n - s$ **個觀察值為** $X_{(r+1)},X_{(r+2)},\ldots,X_{(n-s)}$**。因此，對這組雙型 II 設限樣本可做** $Y_{(i)} = \left(\frac{X_{(i)}}{\theta}\right)^{\delta}$, $i = r+1,r+2,\ldots,n-s$ **的變數變換，則可得到一組來自標準指數分配的雙型 II 設限樣本。在後續的推論中，我們將利用其對應的順序統計量** $Y_{(r+1)},Y_{(r+2)},\ldots,Y_{(n-s)}$**來建立我們所提出的四樞紐量。**

接著，我們利用順序統計量 $Y_{(r+1)},Y_{(r+2)},\ldots,Y_{(n-s)}$ **定義四個統計樞紐量形式如下**

$$W^{(1)}(\delta;n,r,s)=\frac{\frac{1}{n}\left[(r+1)X_{(r+1)}^{\delta}+\sum_{i=r+2}^{n-s-1}X_{(i)}^{\delta}+(s+1)X_{(n-s)}^{\delta}\right]}{\left[\prod_{j=r+2}^{n-s-1}X_{(j)}\cdot X_{(r+1)}^{r+1}\cdot X_{(n-s)}^{s+1}\right]^{\frac{\delta}{n}}},$$

$$n > s \qquad (1.4)$$

$$W^{(2)}(\delta;n,r,s)=\frac{\frac{1}{n-r-s}\left[\sum_{i=r+1}^{n-s}X_{(i)}^{\delta}\right]}{\left[\prod_{j=r+1}^{n-s}X_{(j)}\right]^{\frac{\delta}{n-r-s}}},$$

$$n > r + s \qquad (1.5)$$

$$W^{(3)}(\delta;n,r,s)=\frac{\frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=r+1}^{n-s-1}X_{(i)}^{\delta}+(s+1)X_{(n-s)}^{\delta}\right]}{\left[\prod_{j=r+1}^{n-s-1}X_{(j)}\cdot X_{(n-s)}^{s+1}\right]^{\frac{\delta}{n-r}}},$$

$$n > r \qquad (1.6)$$

$$W^{(4)}(\delta;n,r,s)=\frac{\frac{1}{n-s}\left[\sum_{i=r+2}^{n-s}X_{(i)}^{\delta}+(r+1)X_{(r+1)}^{\delta}\right]}{\left[\prod_{j=r+2}^{n-s}X_{(j)}\cdot X_{(r+1)}^{r+1}\right]^{\frac{\delta}{n-s}}},$$

$$n > s \qquad (1.7)$$

其中 $r \ge 0$ **和** $s \ge 0$**。我們可以證明**(1.4)**、**(1.5)**、**(1.6) **及**(1.7)**的分配是和（δ, θ）並無相關。因此，他們對 δ 分別可以提供一個樞紐量讓** $W_{\alpha}^{(i)}(n,r,s)$ **表示** $W^{(i)}(\delta;n,r,s)$**的分配之上 α 臨界值（**upper α critical value**），**$i = 1,2,3,4$**，則對任意** $0 < \alpha < 1$

$$P\left(W_{1-\alpha/2}^{(i)}(n,r,s) < W^{(i)}(\delta;n,r,s) < W_{\alpha/2}^{(i)}(n,r,s)\right)=1-\alpha$$

這裏，$i = 1,2,3,4$**。**

假設 $X_{(r+1)} \le X_{(r+2)} \le \ldots \le X_{(n-s)}$**如上面定義為來自** Weibull **分配具有形狀參數和尺度參數分別為 θ 和 δ 的一組大小為** n **的隨機樣本之雙型 II 設限樣本。而且讓** $W^{(i)}(\delta;n,r,s)$**和** $W_{\alpha}^{(i)}(n,r,s)$**如前定義。則對假設檢定**

$$H_0\text{: } \delta = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_a\text{: } \delta \ne \delta_0$$

的決策原則為

假如 $W^{(i)}(\delta;n,r,s) > W_{\alpha/2}^{(i)}(n,r,s)$

或 $W^{(i)}(\delta;n,r,s) < W_{1-\alpha/2}^{(i)}(n,r,s)$**，**

則拒絕 H_0: $\delta = \delta_0$**，**$i = 1,2,3,4$**。**

而 $W^{(i)}(\delta;n,r,s)$ **的上百分位數（**upper percentile**）和下百分位數（**lower percentile**）（也可看** Johnson **和** Bhattacharyya(1996)**）可以藉著蒙地卡羅（**Monte Carlo**）模擬求得，**$i = 1,2,3,4$**。其中形狀參數 δ 與樞紐量的分配無關，所以，我們將樞紐量中未知的參數以 δ** $= 1$ **代入，在此我們重覆的次數為** 60 **萬次，可以得到四個樞紐量**

的上α臨界值。

$$W^{(i)}(\boldsymbol{\delta};n,r,s) = t,\ i = 1,2,3,4$$

在δ> 0時，它們分別皆有一個δ的唯一解。因此，利用上面定義的雙型 II 設限樣本$Y_{(r+1)} \le Y_{(r+2)} \le \ldots \le Y_{(n-s)}$，則我們可以建立形狀參數的δ的 1-α信賴區間（$ä_L^{(i)}$, $ä_U^{(i)}$），其中分別是方程式

$$W^{(i)}(ä_L^{(i)};n,r,s) = W_{1-\alpha/2}^{(i)}(n,r,s), \qquad (1.8)$$

和

$$W^{(i)}(ä_U^{(i)};n,r,s) = W_{\alpha/2}^{(i)}(n,r,s), \qquad (1.9)$$

中δ的唯一解，$i = 1,2,3,4$。

在第二部份中，我們將提出的四個樞紐量與最小平方法提出的樞紐量估計式做比較。首先，我們先求出最小平方法的估計式形式如下

$$\hat{¢} = \frac{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left(lnx_{(i)} - \overline{lnx}\right)\left(k_{(i)} - \bar{k}\right)}{\sum_{i=r+1}^{n-s}\left(lnx_{(i)} - \overline{lnx}\right)^2}, \qquad (1.10)$$

其中，$\overline{lnx} = \frac{\sum_{i=r+1}^{n-s} lnx_{(i)}}{n-s-r}$，$k_{(i)} = ln\left[-ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right]$，$\bar{k} = \frac{1}{n-s-r}\sum_{i=r+1}^{n-s} k_{(i)}$。

根據 Bain 和 Antle 在 1967 年發表的文章中，我們可以知道形狀參數的估計式$\hat{¢}_{11}$的形式便是將$\hat{¢}$估計式中的 $X_{(i)}$用 $Y_{(i)} = \left(\frac{X_{(i)}}{-}\right)^{¢}$，$i = r+1, r+2, \ldots, n-s$ 代入得到與參數無關的最小平方法樞紐量，經由推導我們知道

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\delta};n,r,s) = \hat{¢}_{11} = \hat{¢} / ¢, \qquad (1.11)$$

由 Bain 和 Antle（1967）文中的定理 1 可知$\frac{\hat{¢}}{¢}$與$\hat{¢}_{11}$有相同的標準 Weibull 分配（standard Weibull distribution）而且與參數無關。所以，我們將$\hat{¢}_{11}$當作 Weibull 分配形狀參數δ的樞紐量，對δ提供一個樞紐量讓 $W_{\alpha}^{(0)}(n,r,s)$表示 $W^{(0)}$（$\boldsymbol{\delta};n,r,s$)的分配之上α臨界值（upper α critical value），則對任意 $0 < \alpha < 1$

$$P\left(W_{1-\sim/2}^{(0)}(n,r,s) < W^{(0)}(¢;n,r,s) < W_{\sim/2}^{(0)}(n,r,s)\right) = 1 - \sim$$

然後再根據模擬的步驟求得最小平方法樞紐量的上α臨界值表。

接著，我們將所求得的上α臨界值表來進行五個樞紐量的檢定力比較。同樣地，我們利用模擬的方式來比較五個樞紐量的檢定力。

除了在δ值為 1.2、樣本數為 10 和設限個數為 $r = 0$、$s = 0$ 的情況下，最小平方法所提出的樞紐量（(1.11)式）之檢定力高於其他四個方法（(1.4)式至(1.7)式）的檢定力之外，其他的情況皆是方法 1 至方法 4（(1.4)式至(1.7)式）的檢定力高於最小平方法所提出的樞紐量（(1.11)式）之檢定力，值得一提的是在樣本數為 40 的時候，方法 1 至方法 4（(1.4)式至(1.7)式）的檢定力都非常地接近 1，表示我們的方法在樣本數愈大的時候，檢定統計量的有效性愈強。

進一步，我們再來比較這五個樞紐量的信賴區間之平均區間長度。對任意 $t > 1$，我們也可以證明下列方程式

$$W^{(i)}(\boldsymbol{\delta};n,r,s) = t \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

在δ> 0時，它們分別皆有一個的唯一解。因此，利用上面定義的雙 II 設限樣本$X_{(r+1)} \le X_{(r+2)} \le \ldots \le X_{(n-s)}$，則我們可以建立形狀參數δ的 1-α信賴區間為（$¢_L^{(i)}$, $¢_U^{(i)}$），其中$¢_L^{(i)}$和$¢_U^{(i)}$分別是方程式

$$W^{(i)}(¢_L^{(i)};n,r,s) = W_{1-\alpha/2}^{(i)}(n,r,s)$$

和

$$W^{(i)}(¢_U^{(i)};n,r,s) = W_{\alpha/2}^{(i)}(n,r,s)$$

中δ的唯一解，$i = 1,2,3,4$。且我們也可以建立最小平方法所提出的樞紐量信賴區間為（$¢_L^{(i)}$, $¢_U^{(i)}$），其中$¢_L^{(i)}$和$¢_U^{(i)}$分別是方程式

$$W^{(0)}(\delta_U^{(0)};n,r,s) = W_{1-\alpha/2}^{(0)}(n,r,s)$$

和

$$W^{(0)}(\delta_L^{(0)};n,r,s) = W_{\alpha/2}^{(0)}(n,r,s)$$

中δ的唯一解。

當樣本數為 10 的時候無論是完整樣本或者是有設限個數的樣本，方法 1（1.4 式）的信賴區間平均長度都比其他四個樞紐量的信賴區間平均長度來的短；而在樣本數為 20 和 40 的時候，方法 2（1.5 式）在完整樣本的情形下，信賴區間平均長度都比其他四個樞紐量的區間長度較短；當樣本數為 30 的時候，就完整樣本的情況而言，方法 3（1.6 式）的信賴區間之平均區間長度最短。而有一個共同的現象是，當樣本數為 20，30 和 40 且設限數個(r,s)為$(1,1)$和$(2,2)$的時候都是方

法 3（1.6 式）的信賴區間之平均區間長度最短。總體而言，本文所提出的四個樞紐量所得到的信賴區間之平均區間長度都比最小平方法所建立信賴區間之平均區間長度來得短。

三、結果與討論

在前述的探討中，我們提出了針對配和 Weibull 分配在雙型 II 設限樣本下的形狀參數的統計檢定及信賴區間估計式. 而從電腦模擬及數值實例中，我們可歸納出下列結果：

對 Weibull 分配而言，本文所提出的檢定及區間估計方法可適用於完整樣本及雙型 II 設限樣本的情況，同樣地，在小樣本時，因為設限而減少訊息的緣故，我們的估計方法之有效性會降低；就信賴區間之平均區間長度比較而言，在樣本數為 10 的時候，方法 1 所建立的信賴區間之平均區間長度都比其他估計方法來的短，但在其他樣本數之下，皆以方法 3 在有設限個數的情形下所得到的信賴區間之平均區間長度為最短的。

四、計劃成果自評

就整體來講，就檢定力比較方面，我們的方法提出檢定統計量與最小平方法提出的檢定統計量的檢定力比較結果，得知我們所提出來的檢定統計量有效性都比最小平方法的檢定統計量高；而在其信賴區間之平均區間長度的比較方面，我們的樞紐量所得到的信賴區間之平均區間長度皆比最小平方法所提出的樞紐量來得短。

五、參考文獻

[1] Bain, L. J. and Antle, C. E.(1967), Estimation of parameters in the Weibull distribution, *Technometrics*, 9, pp.621-627.

[2] Chen, Z.(1996), Joint Confidence Region for the Parameters of Pareto Distribution, *Metrika*, 44, pp.191-197.

[3] Chen, Z.(1997), Parameter Estimation of the Gompertz Population, *Biom. J.*, 39, pp.117-197.

[4] Chen, Z.(1998(a)), Joint Estimation for the Parameters of the Extreme Value Distributions, *Statistical Papers*, 39, pp.135-146.

[5] Chen, Z.(1998(b)), Joint Estimation for the Parameters of Weibull Distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 66,pp.113-120.

[6] Chen, Z.(1999), Statistical Inference about the Shape Parameter of the Exponential Power Distribution, *Statistical Papers*, 40, pp.459-468.

[7] Cohen, A. Clifford(1991), *Truncated and Censored Samples*, Marcel Dekker, Inc.

[8] Eastmen, J. and Bain, L.(1973), A Property of Maximum Likelihood Estimators in the Presence of Location-Scale Nuisance Parameters, *Communications in Statistics*, 2, pp.23-28.

[9] Engelhardt, M. and Bain, L. J.(1978), Construction of Optimal Unbiased Inference Procedures for the Parameters of the Gamma Distribution, *Technometrics*, 20, pp.485-489.

[10] Gumbel, E. J.(1958), *Statistics of Extremes*, New York: Columbia University Press.

[11] Grubbs, F. E.(1971), Fiducial Bounds on Reliability for the Two-Parameter Negative Exponential Distribution, *Technometrics*, 13, pp.873-876.

[12] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N.(1994), *Continuous Univariate Distribution*, Vol.1, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[13] Johnson, R. A. and Bhattacharyya, G. K (1996), *Statistics—Principles and Methods*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[14] Lawless, J. F.(1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.

[15] Leemis, L. M.(1986), Lifetime Distribution Identities, *IEEE: Transactions on Reliability*, 35, pp.170-174.

[16] Microsoft Developer Studio Fortran Powerstation 4.0 and IMSL(1995), Microsoft Corporation.

[17] Rajarshi, M. B. and Rajarshi, S.(1988), Bathtub Distributions: A review, *Communications in Statistics A: Theory and Methods*, 17, pp.2597-2621.

[18] Smith, R. M. and Bain, L. J.(1975), An Exponential Power Life-test Distribution, *Communications in Statistics*, 4, pp.469-481.