行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

具有前置時間混合常態需求分配的
欠撥與銷售損失混合存貨模式

計劃編號：NSC 89-2213-E-032-034
執行期限：2000 **年** 8 **月** 1 **日至** 2001 **年** 7 **月** 31 **日**
主持人：吳忠武　研究生：蔡慧瑩　執行機構及單位名稱：淡江大學統計學系

一、中文摘要

近幾年的文獻中, Ben-Daya **和** Raouf (1994) **與** Ouyang *et al.* (1996)**考慮前置時間和訂購量為決策變數之連續盤查存貨模式。在前置時間中，不同顧客會有不同的需求，不可能僅以一個需求分配**(Ouyang *et al.* (1996))**來表示前置時間的需求量。因此，我們調整與推廣** Ouyang *et al.* (1996)**的存貨模式，並且考慮需求為混合型常態分配**(Everitt and Hand (1981))**。另外，我們的模式也仍考慮短缺的情況。缺貨期間亦考慮部份欠撥和銷貨損失。最後，我們提出一演算法，可以求出最適經濟訂購量及最適前置時間。**

Abstract

In a recent paper, Ben-Daya and Raouf (1994) and Ouyang *et al.* (1996) presented a continuous review inventory model in which they considered both lead time and the order quantity as decision variables. When the demand of the different customers are not identical in the lead time, then we can't only use a distribution (such as Ouyang *et al.* (1996) using normal distribution) to describe the demand of the lead time. Hence, we correct and extend the model of Ouyang *et al.* (1996) by considering the mixtures of normal distribution (see Everitt and Hand (1981)). In addition, we also still assume that the shortages are allowed. Moreover, the total amount of stockout is considered a mixture of backorders and lost sales during the stockout period. Moreover, we also develop an algorithmic procedure to find the optimal order quantity and optimal lead time.

Keywords: Inventory; Lead time; Crashing cost; Order quantity; Mixtures of normal distribution; Backorders; Lost sales.

二、緣由與目的

以往學者所討論的存貨模式文獻（**如** Azoury and Brill (1994), Chiu (1995), Foote *et al.* (1988), Kim and Park (1985), Liberatore (1977), Magson (1979), Naddor (1966), and Silver and Peterson (1985) **等**)**中，無論是確定性模式**(deter-ministic model)**或機率性模式**(probabilistic model)**，大多將前置時間**(lead time)**視為已知且為不可控制的常數**(uncontrollable constant)**或隨機變數。之後，有些學者對於不可控制的前置時間開始產生質疑，進而著手探討連續性檢查訂購策略下的可控制前置時間。**

Liao **和** Shyu (1991)**首先提出在請購量為事前決定而前置時間為決策變數的機率性存貨模式。在他們的模式中，前置時間內的作業由** n **個成份組成，每一種成份各有不同的正常作業時間**(normal duration)**，充分趕工下的作業時間**(minimum duration)**，及單位時間的趕工成本** (crashing cost per unit time)**。**

近年來，Ben-Daya **和** Raouf (1994)**推廣** Liao **和** Shyu **的模式，考慮前置時間內的需求量服從常態分配，其中前置時間及訂購量均為決策變數，但他們的模式忽略缺貨的情況，也就沒考慮到缺貨成本。我們在本報告中，假設**

缺貨情況發生且推廣 Ben-Daya 和 Raouf (1994) 之模式，加入缺貨成本，且在缺貨期間，缺貨數量考慮部份欠撥和缺貨不補的情形。然而在實際問題中，既使有多家供應商的競爭，但由於某些顧客對特定供應商的忠誠及信賴，該供應商有缺貨的情形發生，顧客仍願意等待。因此，缺貨數量允許部份欠撥、部份不補的情況是值得予以考慮的。

在前置時間不同顧客其需求也會不同，所以我們不可能僅以一個分配來表示在前置時間中顧客之需求量。因此，本研究以二個常態分配之混合來表示前置時間中顧客之需求量分配，並且調整與推廣 Ouyang *et al.* (1996)之模式。

(1) 符號假設：

D	每年之平均需求量(average demand per year)
A	每次之訂購成本(fixed ordering cost per order)
h	每年之存貨持有成本(inventory holding cost per item per year)
$®$	每單位貨品的缺貨懲罰成本(fixed penalty cost per unit short)
$®_0$	每單位貨品的邊際利潤(marginal profit per unit)
	缺貨數量的欠撥比例(fraction of the demand backordered during the stockout period, $0 \le \beta \le 1$)
r	請購點(reorder point)
Q	訂購量(order quantity)
L	前置時間(length of lead time)
X	前置時間之需求量(the lead time demand with the mixtures of normal distribution)

(2) 模式假設：

本報告之模式假設與 Ouyang *et al.* (1996) 之模式假設第 3 項至第 6 項相同，除了下列二項不同，因此，敘述如下：

1. 前置時間 L 內之隨機需求量 X 來自於混合型常態分配具有機率密度函數為

$$f(x)=p\frac{1}{\sqrt{2®}±\sqrt{L}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-u_1L}{±\sqrt{L}})^2}+(1-p)\frac{1}{\sqrt{2®}±\sqrt{L}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-u_2L}{±\sqrt{L}})^2},$$

其中 $«_1-«_2=k_1±/\sqrt{L}$，$k_1, x\in R$，$0\le p\le 1$，$±>0$。當 $-\sqrt{27/8}<¦<\sqrt{27/8}$，對任一 $0\le p\le 1$，此混合型常態分配為單峰(unimodal)分配。當 $¦>2$ 或 $¦<-2$，至少可以找到一個 p ($0\le p\le 1$)，使得此混合型常態分配為雙峰 (bimodal)分配(Everitt and Hand (1981))。

2. 以連續盤查(continuously reviewed)的方式監視存貨數量，也就是隨時記錄每一項商品的存貨數量，當現有存貨降至請購點時，便發出訂單以補充存貨。請購量 r =前置時間內的期望需求量 + 安全存量 (safety stock) = $«_*L+k±_*\sqrt{L}$，其中 $«_*=p«_1+(1-p)«_2$，$±_*=\sqrt{1+p(1-p)k_1^2}±$，$«_1=«_*+(1-p)k_1±/\sqrt{L}$，$«_2=«_*-pk_1±/\sqrt{L}$，$k$ 為安全因子(safety factor)，滿足 $p(X>r)=p(Z>k)=1-p\Phi(r_1)-(1-p)\Phi(r_2)=q$，其中 $r_1=k\sqrt{1+k_1^2p(1-p)}-k_1(1-p)$，$r_2=k\sqrt{1+k_1^2p(1-p)}+k_1p$，$Z$ 為服從標準常態分配，q 為在前置期間准許缺貨的機率。

(3) 模式的建立：

本報告之全年期望總成本(total expected annual cost)由訂購成本、持有成本、缺貨成本和前置時間之趕工成本所組成的，即

$$
\begin{aligned}
&EAC(Q,L)\\
&=ordering\ \ cost+holding\ \ cost+stockout\ \ cost\\
&\quad +lead\ \ time\ \ crashing\ \ cost\\
&=A\frac{D}{Q}+h\left\{\frac{Q}{2}+±\sqrt{L}\{p[r_1\Phi(\frac{«_*\sqrt{L}}{±}+(1-p)k_1)-¤(\frac{«_*\sqrt{L}}{±}+(1-p)k_1)]\right.\\
&\quad\left.+(1-p)[r_2\Phi(\frac{«_*\sqrt{L}}{±}-pk_1)-¤(\frac{«_*\sqrt{L}}{±}-pk_1)]\}+(1-\ \ )B(r)\right\}\\
&\quad+\frac{D}{Q}[®+®_0(1-\ \ )]B(r)+\frac{D}{Q}R(L)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

(4) 求解過程：

為了求此 (Q,L)，在每個時間區段 $[L_i, L_{i-1}]$ 將 $EAC(Q, L)$ 分別對 Q 和 L 作一階微分及二階微分，因此，由二階微分可知，對任意給定的前置時間 $L\in[L_i, L_{i-1}]$，$EAC(Q, L)$ 為 Q 的凸函數 (convex function)。另外，對任意給定的訂購量 Q 和 $«_*\sqrt{L}/±-p_i^{/}>\sqrt{2}$，$EAC(Q,L)$ 為 $L\in[L_i, L_{i-1}]$ 的凹函數 (concave function)。因此，$EAC(Q, L)$ 的最小值必發生在區間 $[L_i, L_{i-1}]$ 的端點上。令 $EAC(Q, L)$ 對 Q 作一階微分式等於 0, 即可求得經濟訂購量 Q：

$$Q=\left\{\frac{2D}{h}\{A+[®+®_0(1-\ \ )]±\sqrt{L}\Psi(r_1,r_2,p)+R(L)\}\right\}^{\frac{1}{2}},\ L\in(L_i, L_{i-1})$$

(3)

綜合以上所述，建立下列的演算流程可求得最適的經濟訂購量 Q 與最適的前置時間 L：

步驟 1: **給定** *A, D, h,* ®, ®$_0$, ±, *p*, , *q*, ¦, a_i, b_i, **和** c_i, $i = 1, 2, \cdots, n$。

步驟 2: **給定** ¦ 、 p **和** q，**即可透過** $1-p\Phi(r_1)-(1-p)\Phi(r_2)=q$ **計算出** k **值，其中** $r_1 = k\sqrt{1+¦^2 p(1-p)} - ¦(1-p)$ **和** $r_2 = k\sqrt{1+¦^2 p(1-p)} + ¦p$。**(使用電腦軟體** Microsoft Fortran Powerstation 4.0 **及** IMSL (1995)**的副程式** ZREAL **計算出** k **值)。再將** k **值代入** $r_1 = k\sqrt{1+¦^2 p(1-p)} - ¦(1-p)$ **和** $r_2 = k\sqrt{1+¦^2 p(1-p)} + ¦p$，**即可求出** r_1 **和** r_2。

步驟 3: **給定** a_i，b_i **和** c_i，$i = 1, 2, \cdots, n$，**透過** Ouyang *et al.* (1996)**模式假設**(6)**即可計算** L_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ **及** $R(L)$，**並透過**(1)**式可計算** $B(r)$。

步驟 4: **對於每一個前置時間** L_i, $i = 1, 2, \cdots, n$，**利用**(3)**式計算與之對應的** Q_i **值。**

步驟 5: **對每一對**(Q_i, L_i)**值，代入**(2)**式可計算其全年期望總成本** $EAC(Q_i, L_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$。

步驟 6: **固定** p **和 ，找出** $\min_{i=0,1,\ldots,n} EAC(Q_i, L_i)$。**若** $EAC(Q_*, L_*) = \min_{i=0,1,\ldots,n} EAC(Q_i, L_i)$，**則**$(Q_*, L_*)$ **即為此模式的最適解**(*the optimal solution*)。

步驟 7: **停止。**

(6)**範例：**

假設某銷售商訂購某項物品的相關資訊皆與 Ouyang *et al.* (1996)**的例子相同，其資料如下：**

$D = 600$ 件 / 年	® = \$50 / 件
$A = \$200$ 每次訂購成本	®$_0$ = \$150 / 件
$h = \$20$ / 件 / 年	± = 7 件 / 週

表 1 前置時間內的作業由三個成份所組成

前置時間組成成份 i	正常的作業時間 b_i (天)	充分趕工的作業時間 a_i (天)	單位時間的趕工成本 c_i(\$ /天)
1	20	6	0.4
2	20	6	1.2
3	16	9	5.0

在本例中，討論缺貨期間缺貨數量准許欠撥的比例 分別為 0(0.2)1、$k_1 = 0.7$, ± 3、$p = 0(0.2)1$ **和假設訂購週期內容許發生缺貨的機率** q **為** 0.2。

三、結果與討論

運用本報告之演算流程依 k_1 **之不同，其結果分別列於表** 2 **至表** 4。**由表** 2 **至表** 4 **可知，當** p = 0.0 **或** 1.0 **時，我們的模式即為調整** Ouyang *et al.* (1996)**之模式，由此可以看出調整後模式之全年期望總成本皆比原來** Ouyang *et al.* (1996)**模式之全年期望總成本還低。**

當 固定時，全年期望總成本隨著 p **的增加而先些許增加後稍微減少。當** p **固定時，全年期望總成本隨著缺貨期間缺貨數量准許欠撥比例 的增加而減少。**

當請購點 r **為事前決定，**p = 0.0 **或** 1.0 **和** = 0.0 **時，即為調整** Ben-Daya **和** Raouf (1994)**之模式。**

表 2. 不同 p **值和不同 值下的最適解**(L_i **單位為週和** ¦ = 0.7)

	Ouyang et al. (1996)			*p = 0.0 & p=1.0*	
	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$		(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(178, 3)	3791.26	0.0	(178, 3)	3789.226
0.2	(171, 3)	3646.27	0.2	(171, 3)	3644.202
0.4	(164, 3)	3495.30	0.4	(164, 3)	3493.233
0.6	(154, 4)	3324.47	0.6	(154, 4)	3323.884
0.8	(144, 4)	3129.54	0.8	(144, 4)	3128.944
1.0	(134, 4)	2921.38	1.0	(134, 4)	2920.779

	p = 0.2			*P = 0.4*	
	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$		(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(180, 3)	3845.083	0.0	(181, 3)	3857.139
0.2	(173, 3)	3694.317	0.2	(173, 3)	3705.431
0.4	(166, 3)	3537.202	0.4	(166, 3)	3547.306
0.6	(156, 4)	3367.938	0.6	(156, 4)	3378.813
0.8	(146, 4)	3164.821	0.8	(146, 4)	3174.353
1.0	(135, 4)	2947.457	1.0	(135, 4)	2955.474

	p = 0.6			*p = 0.8*	
	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$		(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(180, 3)	3844.515	0.0	(179, 3)	3819.563
0.2	(173, 3)	3694.285	0.2	(172, 3)	3671.800
0.4	(165, 3)	3537.743	0.4	(165, 3)	3517.898
0.6	(155, 4)	3369.820	0.6	(155, 4)	3349.793
0.8	(146, 4)	3167.466	0.8	(145, 4)	3150.954
1.0	(135, 4)	2950.962	1.0	(135, 4)	2938.406

表 3 不同 p **值和不同 值下的最適解**(L_i **單位為週和** ¦ = 3)

	Ouyang et al. (1996)			*p = 0.0 & p=1.0*	
	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$		(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$

0.0	(178, 3)	3791.26
0.2	(171, 3)	3646.27
0.4	(164, 3)	3495.30
0.6	(154, 4)	3324.47
0.8	(144, 4)	3129.54
1.0	(134, 4)	2921.38

0.0	(178, 3)	3789.226
0.2	(171, 3)	3644.202
0.4	(164, 3)	3493.233
0.6	(154, 4)	3323.884
0.8	(144, 4)	3128.944
1.0	(134, 4)	2920.779

p = 0.2

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
	0.0	(228, 3)
4914.581	0.2	(216, 3)
4655.390	0.4	(203, 3)
4381.161	0.6	(188, 3)
4088.761	0.8	(173, 3)
3773.786	1.0	(157, 3)
3429.701		

p = 0.4

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
	0.0	(196, 3)
4366.813	0.2	(187, 3)
4178.437	0.4	(178, 3)
3980.892	0.6	(168, 3)
3772.625	0.8	(157, 3)
3551.583	1.0	(146, 3)
3314.960		

p = 0.6

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(186, 3)	4079.149
0.2	(178, 3)	3914.697
0.4	(170, 3)	3742.902
0.6	(161, 3)	3562.637
0.8	(152, 3)	3372.448
1.0	(137, 4)	3164.798

p = 0.8

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(181, 3)	3884.791
0.2	(174, 3)	3732.267
0.4	(166, 3)	3573.269
0.6	(158, 3)	3406.855
0.8	(150, 3)	3231.831
1.0	(135, 4)	3013.445

表 4 不同 *p* 值和不同　值下的最適解(L_i **單位為週和** ¦ = -3)

Ouyang et al. (1996)

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(178, 3)	3791.26
0.2	(171, 3)	3646.27
0.4	(164, 3)	3495.30
0.6	(154, 4)	3324.47
0.8	(144, 4)	3129.54
1.0	(134, 4)	2921.38

p = 0.0 & p=1.0

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(178, 3)	3789.226
0.2	(171, 3)	3644.202
0.4	(164, 3)	3493.233
0.6	(154, 4)	3323.884
0.8	(144, 4)	3128.944
1.0	(134, 4)	2920.779

p = 0.2

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
	0.0	(181, 3)
3884.791	0.2	(174, 3)
3732.267	0.4	(166, 3)
3573.269	0.6	(158, 3)
3406.855	0.8	(150, 3)
3231.831	1.0	(135, 4)
3013.445		

P = 0.4

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
	0.0	(186, 3)
4079.149	0.2	(178, 3)
3914.697	0.4	(170, 3)
3742.903	0.6	(161, 3)
3562.637	0.8	(152, 3)
3372.448	1.0	(137, 4)
3164.798		

p = 0.6

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(196, 3)	4366.813
0.2	(187, 3)	4178.437
0.4	(178, 3)	3980.892
0.6	(168, 3)	3772.625
0.8	(157, 3)	3551.583
1.0	(146, 3)	3314.960

p = 0.8

	(Q_i, L_i)	$EAC(Q_i, L_i)$
0.0	(228, 3)	4914.581
0.2	(216, 3)	4655.390
0.4	(203, 3)	4381.161
0.6	(188, 3)	4088.761
0.8	(173, 3)	3773.786
1.0	(157, 3)	3429.701

四、計劃成果自評

本論文是針對可控制的前置時間提出二個存貨管理的數學模式，模式中前置時間之需求量均為混合型常態分配，未來應可朝以下的方向進行研究：

1. **本論文所考慮的趕工成本為一分段線性函數，未來研究可考慮其他型式的連續函數，以符合實際前置時間內的作業成份無法分割之情況。**
2. **本論文所考慮前置時間之需求量為二個常態分配之混合，未來研究可考慮更多常態分配之混合或其他已知分配之混合，甚至可考慮需求量為二個或多個未知分配情況下之混合。**

五、參考文獻

[1] Azoury, K. S. and Brill, P. H., 1994, Analysis of Net Inventory in Continuous Review Models with Random Lead Time. *European Journal of Operational Research*, **59**, 383-392.

[2] Ben-Daya, M. and Raouf, A., 1994, Inventory models involving lead time as decision variable. *Journal of the Operational Research Society*, **45**, 579-582.

[3] Chiu, H. N., 1995, An Approximation to the Continuous Review Inventory Model with Perishable Items and Lead Times. *European Journal of Operational Research*, **87**, No. 1, 93-108.

[4] Everitt, B. S. and Hand, D. J., 1981, *Finite Mixture Distribution.* Chapman and Hall, London, New York.

[5] Foote, B., Kebriaei, N., and Kumin, H., 1988, Heuristic Policies for Inventory Ordering Problems with Long and Randomly Varying Lead Times. *Journal of Operations Management*, **7**, 115-124.

[6] IMSL User's Manual MATH/LIBRARY (1989), IMSL, Inc., Houston, Texas, U.S.A.

[7] Kim, D. H. And Park, K. S., 1985, (Q, r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders. *Journal of the Operational Research Society*, **36**, 231-238.

[8] Liao, C. J. and Shyu, C. H., 1991, An analytical determination of lead time with normal demand. *Interational Journal of Operations & Production Management*, **11**, 72-78.

[9] Liberatore, M., 1977, Planning Horizons for a Stochastic Lead Time Model. *Operations Research*, **25**, 977-988.

[10] Magson, D., 1979, Stock Control When the Lead Time cannot be Considered Constant. *Journal of the Operational Research Society*, **30**, 317-322.

[11] Naddor, E., 1966, *Inventory Systems.* John Wiley, New York.

[12] Ouyang, L. Y., Yeh, N. C., and Wu, K. S., 1996, Mixture Inventory Model with Backorders and Lost Sales for Variable Lead Time. *Journal of the Operational Research Society*, **47**, 829-832.

[13] Silver, E. A. and Peterson, R., 1985, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.* John Wiley, New York.

[14] Tersine, R. J., 1982, *Principles of Inventory and Materials Management.* North-Holland, New York.