行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

韋伯分配加速壽命測試下參數估計法

Methods for Estimating Weibull Distribution Parameters with Censoring Data from Accelerated Life Test

計劃編號： NSC 88-2118-M-032-010
執行期限：87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日
主持人：李 秀 美　　淡江大學統計系

一、摘要：

在可靠度分析中，常利用加速壽命測試的方式快速產生產品壽命的資料。本研究探討 Weibull 分配加速壽命測試，在 Inverse power law 模型及聯合第二型設限資料下，以最大概似估計法及動差法估計正常情況下 Weibull 壽命分配的參數，以及利用模擬結果比較二估計法的優劣。

關鍵詞：Weibull 分配、加速壽命測試、設限資料、最大概似、動差法

Abstract

In reliability analysis, accelerated life testing is frequently used to quickly yield information on product life distribution. Suppose the lifetime of the test unit follows a Weibull distribution with shape parameter depending on stress, and the inverse power law is used to describe the relation between shape parameter and stress. Two estimating methods are provided and compared by using simulated data.

Keywords：Weibull Distribution, Accelerated Life Test, Censored Data, Maximum Likelihood , Moment Method

二、前言

有許多電子產品的壽命相當長，在考慮時間和經濟效益下，常利用加速壽命測試的方式快速產生產品壽命的資料。通常在正常情況下產品的壽命分配與加壓後產品的壽命分配有某些關係可以應用。因此，可以利用經加速的壽命資料估計正常情況下的產品壽命分配。在加速壽命測試中常假設的模型有 Arrhenius law, inverse power law, Eyring law[5]。本文假設產品在壓力水準值爲 S 的壽命分配是服從 Weibull 分配，令其形狀參數爲一常數 β，尺度參數爲 α 與壓力水準有關，且利用 inverse power law，令

$$\alpha(S) = \exp(\gamma_0) / S^{\gamma_1} \qquad (2.1)$$

其中 γ_0, γ_1 均爲未知的參數。

三、聯合第二型設限資料下的參數估計法

本研究假設在第 i 個壓力水準下，觀察 n_i 個產品(i=0,1,2,…,k)，並將此 k+1 組產品混合觀察至第 r 個產品失敗(死亡)事件發生後停止觀察。此種資料稱爲聯合第二型設限資料(Jointly type II censored data)[1]。

(一)、最大概似估計法

令 Fi 表示在壓力水準 Si 下設計的產品壽命長度的累積分配，S_0 表示正常情況下的壓力水準，又令 $\{X_{01},X_{02},\ldots,X_{0n0}\}$，$\{X_{11}, X_{12},\ldots,X_{1n1}\}$，…，$\{X_{k1},X_{k2},\ldots,X_{knk}\}$是 k+1 組互相獨立的隨機樣本，它們分別來自於 Weibull 分配 F_0，F_1，…，F_k，即

$$F_i(x) = 1 - \exp[-(x/\alpha_i)^\beta], \quad x \geq 0$$

由於本研究將此 k+1 組產品混合觀察至第 r 個產品失敗(死亡)事件發生後停止觀察。同時可知道失敗產品來自那一組樣本。通常爲求參數之 MLE，常將產品壽命 X 經自然對數的轉換，即 Y=lnX，則 Y 服從一極値分配(extreme value distribution)[3]。其 cdf 爲

$$G_i(y) = 1 - \exp\{-\exp[(y-\mu_i)/\sigma]\},$$
$$-\infty < y < \infty$$

其中 $\sigma>0$，$-\infty<\mu_i<\infty$，

$$\sigma = 1/\beta, \quad \mu_i = \ln(\alpha_i)$$

因此，(2.1)式可以改寫成

$$\mu_i = \gamma_0 + \gamma_1 \ln(1/S_i) \quad (3.1)$$

爲方便說明數學式，令

$V_i=\ln(1/S_i)$。

那麼在此加速壽命測試實驗中可獲得的資料包括(Z,W)，此處

$$W = [W_1\ W_2\ \ldots\ W_r]^T$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{01}, Z_{02}, \ldots, Z_{0r} \\ Z_{11}, Z_{12}, \ldots, Z_{1r} \\ . \\ . \\ Z_{k1}, Z_{k2}, \ldots, Z_{kr} \end{bmatrix}_{(k+1)\times r}$$

其中 $W_1 \leq W_2 \leq \ldots \leq W_r$，爲觀察到的樣本資料(經過對數轉換的資料)；而

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} W_j \text{屬於第} i \text{個樣本}, \\ & i = 0,1,\ldots k,\ j = 1,2,\ldots,r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $M_i = \sum_{j=1}^{r} Z_{ij}$，i=0,1,…,k，則

$\sum_{i=0}^{k} M_i = r$，M_i 是第組樣本中所觀察到的樣本數。所以(Z,W)的概似函數爲

$$\begin{aligned} &\ln L(\mu,\sigma|Z,W) \\ &= r\times\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp\left(\frac{Y_{i(j)}-\mu_i}{\sigma}\right) \\ &\quad -\sum_{i=0}^{k}(n_i - M_i)\exp\left(\frac{W_r-\mu_i}{\sigma}\right) \\ &\quad +\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{i(j)} - \sum_{i=0}^{k}M_i\mu_i\right) \end{aligned}$$

此處的 $Y_{i(j)}$表示$\{Y_{i1}, Y_{i2},\ldots,Y_{ini}\}$的第 j 個順序統計量。再由(3.1)式將上式改寫成

$$\begin{aligned} &\ln L(\gamma_0,\gamma_1,\sigma|Z,W) \\ &= r\times\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp\left(\frac{Y_{i(j)}-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right) \\ &\quad -\sum_{i=0}^{k}(n_i - M_i)\exp\left(\frac{W_r-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right) \\ &\quad +\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{i(j)} - \sum_{i=0}^{k}M_i(\gamma_0+\gamma_1 V_i)\right) \end{aligned}$$

則可求得參數 $\gamma_0, \gamma_1, \sigma$ 之最大概似估計量(MLE)爲滿足下列方程式之解，分別記作 $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}$：

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp\left(\frac{Y_{i(j)}-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right) + \sum_{i=0}^{k}(n_i - M_i)\exp\left(\frac{W_r-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right) - r = 0 \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp\left(\frac{Y_{i(j)}-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right)V_i + \sum_{i=0}^{k}(n_i - M_i)\exp\left(\frac{W_r-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right)V_i - \sum_{i=0}^{k}M_i V_i = 0 \qquad (3.3)$$

$$-r\sigma + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp\left(\frac{Y_{i(j)}-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right)\times(Y_{i(j)}-\gamma_0-\gamma_1 V_i) + \sum_{i=0}^{k}(n_i - M_i)\exp\left(\frac{W_r-\gamma_0-\gamma_1 V_i}{\sigma}\right)\times(W_r-\gamma_0-\gamma_1 V_i) - \left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{i(j)} - \sum_{i=0}^{k}M_i(\gamma_0+\gamma_1 V_i)\right) = 0$$

(3.4)

由上述聯立方程式無法直接得到 $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}$ 的 closed form，因此，雖然 MLE 有很好的性質，但並不容易求得。下一節提出另一估計法，並利用模擬結果比較二估計量的性質。

(二)、動差法

定義

$$I'_{ij} = \begin{cases} 1, & 若 Y_{ij} \le \xi, \\ 0, & 若 Y_{ij} > \xi, \\ & i = 0,1,\ldots,k \\ & j = 1,2,\ldots n_i \end{cases}$$

其中 ξ 爲 $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i G_i$ 分配的 100p-th percentile，而 $\lambda_i = \lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n}$。則可得到

$$E[I'_{ij}(\xi - Y_{ij})] = \sigma\left(P_i \ln\ln(\frac{1}{1-P_i}) - \int_0^{P_i}\ln\ln(\frac{1}{1-t})dt\right)$$

故令 σ 的動差估計量爲

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{I_{ij}(W_r - Y_{ij})}{h(M_i/n_i)}$$

其中

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & 若 Y_{ij} \le W_r, \\ 0, & 若 Y_{ij} > W_r, \\ & i = 0,1,\ldots,k \\ & j = 1,2,\ldots n_i \end{cases}$$

$$h(M_i/n_i) = \frac{M_i}{n_i}\ln\ln(\frac{1}{1-M_i/n_i}) - \int_0^{\frac{M_i}{n_i}}\ln\ln(\frac{1}{1-t})dt$$

依相類似的作法，則可令 γ_1 的動差估計量爲

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{2}{\sum_{i=0} n_i(n-n_i)} \times \sum \frac{I_{ij}I_{lm}(Y_{ij}-Y_{lm}) - \hat{\sigma}h_{il}}{M_i M_l (V_i - V_l)/n_i n_l}$$

其中

$$h_{il}=\frac{M_l}{n_l}\int_0^{\frac{M_l}{n_l}}\ln\ln(\frac{1}{1-t})dt$$
$$-\frac{M_i}{n_i}\int_0^{\frac{M_i}{n_i}}\ln\ln(\frac{1}{1-t})dt$$

以及將 $\tilde{\sigma},\tilde{\gamma}_1$ 代入(3.2)式，得 γ_0 的動差估計量爲

$$\tilde{\gamma}_0=\tilde{\sigma}\times[\ln(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}\exp(\frac{Y_{i(j)}-\tilde{\gamma}_1V_i}{\tilde{\sigma}})$$
$$+\sum_{i=0}^{k}(n_i-M_i)\exp(\frac{W_r-\tilde{\gamma}_1V_i}{\tilde{\sigma}}))$$
$$-\ln(r)]$$

(三)、模擬比較

採用以下組合之狀況以產生樣本：

(1) 壓力水準三種：S_0=20，S_1=25，S_2=30。
(2) 樣本重複 1000 次。
(3) 樣本數有二狀況：n_i =20,30,50，及 n_i =30,30,40。
(4) 參數真值：β=2/3，γ_0=10，γ_1=2
(5) 設限比率有三種：0.5，0.7，0.9。

定義 Q 爲在壓力水準值爲 S_0=20.0 時，Weibull 壽命分配的 50-th percentile。則

$$Q=\exp[\gamma_0+\gamma_1\ln(1/S_0)+(1/\beta)\ln(-\ln(0.5))]$$

即 Q=31.7777。

而其 MLE 以符號 $\hat{Q}$ 表之，動差估計量則以 $\tilde{Q}$ 表之。分別依各種狀況模擬所得結果列表如下：

表 1. n_0 =30, n_1 =30, n_2 =40
設限比率=0.9

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6666	-0.0002	0.0025
$\tilde{\beta}$	0.7065	0.0597	0.0079
$\hat{Q}$	35.5604	0.1190	85.7128
$\tilde{Q}$	34.9445	0.0997	171.1505

表 2. n_0 =30, n_1 =30, n_2 =40
設限比率=0.7

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6664	- 0.0004	0.0035
$\tilde{\beta}$	0.6906	0.0360	0.0060
$\hat{Q}$	35.9392	0.1310	104.1828
$\tilde{Q}$	34.9526	0.0999	239.6958

表 3. n_0 =30, n_1 =30, n_2 =40
設限比率=0.5

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6730	- 0.0096	0.0055
$\tilde{\beta}$	0.6970	0.0455	0.0099
$\hat{Q}$	36.1610	0.1379	150.2907
$\tilde{Q}$	36.5125	0.1490	424.2949

表 4. n_0 =20, n_1 =30, n_2 =50
設限比率=0.9

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6663	- 0.0005	0.0025
$\tilde{\beta}$	0.6994	0.0491	0.0065
$\hat{Q}$	36.7272	0.1556	123.7145
$\tilde{Q}$	35.8542	0.1283	279.6073

表 5. $n_0=20, n_1=30, n_2=50$

設限比率=0.7

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6669	0.0004	0.0035
$\tilde{\beta}$	0.6898	0.0348	0.0062
$\hat{Q}$	37.3127	0.1742	169.9962
$\tilde{Q}$	36.9535	0.1629	436.7298

表 6. $n_0=20, n_1=30, n_2=50$

設限比率=0.5

	EST	RB	MSE
$\hat{\beta}$	0.6730	0.0096	0.0056
$\tilde{\beta}$	0.6966	0.0449	0.0092
$\hat{Q}$	37.9103	0.1930	247.4117
$\tilde{Q}$	40.2409	0.2663	825.0993

四、結論

本研究在韋伯(Weibull)分配之加速壽命測試下，利用 Inverse power law 及聯合第二型設限資料，提出二種估計方法：最大概似法及動差法，來估計韋伯分配之參數。雖然 MLE 有很好的性質，但必須用數值方法才能求得估計值，相對地得到動差估計值，在計算上卻較爲簡單。同時，依據模擬比較的結果發現在估計形狀參數β時，二法所得相對偏誤相去不遠，唯動差估計量的變異較大。而用動差法估計 50 百分位數時，估計之相對偏誤卻較 MLE 小。

五、參考文獻

[1] Bhattacharyya G.K. and Mehrotra K. G., Confidence Intervals with Jointly Type- II Censored Sample From Two Exponential Distribution, JASA 77,378,441-446,1982.

[2] Meeter C.A. and Meeker W. Q., Optimum Accelerated Life Tests With a Nonconstant Scale Parameter, Technometrics, 36,71-83, Feb. 1994.

[3] Nelson, W. and Meeker W.Q.,Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme ValueDistributions,Technometrics,20, 171-177, May 1978.

[4] Sirvanci Mete and Yang Grace., Estimation of The Weibull Parameter under Type-I Censoring, JASA 79,183-187, 1984.

[5] Wayne Nelson , Accelerated Testing-Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses, Wiley, New York.