行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

產銷配合問題的最適售價控制研究

The Study of Optimal Price Control Model in Matching Problem Between Manufacturing and Marketing

計劃編號：NSC 89-2416-H-032-011
執行期限：88 年 8 月 1 日至 89 年 7 月 31 日

主持人：張 紘 炬　淡江大學管理科學系
共同主持人：陳淼勝
博士研究生：朱美珍 楊明玉

一、摘要

本研究爲線性需求函數，線性存貨成本假設下的一個產銷配合控制問題的數學模式。其目的在探討：如何透過價格的制定來控制各個不同時點的銷售率，使得在一給定的銷售期間總利潤最大。研究結果顯示：我們可將與最佳解有關的各種環境因素如：單位存貨成本，產品價格上限，增加一銷售量的降價額，銷售時間區間，單位生產成本等參數，綜合成一數學式子，稱之爲產銷配合指標。透過此產銷配合指標値的大小，可界定決策者最適存貨政策的類別：屬於全時期的零存貨政策；或屬於全時期的非零存貨政策；或屬於部份時期的零存貨政策。

關鍵詞： 產銷配合,最適控制,決策分析,零存貨政策

Abstract

This paper presents a mathematical model under the assumptions of linear demand and inventory function for investigating the matching problem between manufacturing and marketing. The main purpose of this paper is to analyze the optimal sales rate at each time t through different pricing strategies so as to achieve the maximum profit in a specific time. The results revealed that the optimal inventory policies including Zero Inventory for Whole Interval (ZIWI), Non-Zero Inventory for WholeInterval (NZIWI), and Partly-Zero Inventory for Whole Interval (PZIWI) can be determined through the establishment of the Matching Index (MI) which is composed of unit inventory cost, price ceiling, the demand elasticity, sales horizon and unit production cost. Furthermore, the sensitivity analysis is performed.

Keywords: The matching problem between manufacturing and marketing, Optimal control, Decision analysis, Zero-Inventory policy

二、前言

處在二十一世紀蓬勃多變發展急速的社會，企業面對的是一個變遷快速又多元化的環境。再又國民所得提高及資訊流通的普及，消費者消費的習性也隨之改變，因此在這強調消費者主權的世紀，任何企業如果能夠高度有效滿足消費者的需求就是市場上的贏家。而爲了順應此社會潮流的改變，產品需求已由製造商決定的模式轉爲以消費者的需求爲主，也促使企業經營型態轉變爲產品從製造商，批發商，零售商而至消費者手中之配銷系統的流通業；如萬客隆，家樂福，7-11 便利商店等購物中心。

經濟趨勢的改變，流通業也更爲開放，再加上 POS(Point On Sale)銷售點情報管理系統導入(此系統係指結合商品條碼、電腦連線收銀機，於銷售的當時，收集各商品的銷售資訊，並傳送至電腦，藉由電腦的計算、分析、整理等功能，精確地掌握商品的商情資料，以提供使用者正確銷售資訊的系統)[11]，使得整個經營系統能迅速得知銷售狀況的相關資訊，並迅速與製造商做一生產策略之協調。因此，企業面對這種經營型態的轉變，並非如何決定生產速率多少以期總成本極小化問題，亦或如何制定價格以期總利潤極大化問題，而是必須結合生產與銷售所要探討的產銷配合控制問題。

在過去的研究裡，關於生產與銷售互相配合問題的討論有 Pekelman[10]視價格爲決策變數在一時間區間內探討動態連續性的生產-存貨模式，Feichtinger and Hantl[2]也探討了同樣問題但放寬需求函數且允許缺貨的情形下得到最適價格與生產率的協調策略。陸續的又有一些學者：如 Jorgersen[5]、Eliashberg 和 Steinberg[1]、Gaimon[3]等各別將銷售因素，生產規模加入此生產-存貨模式中考量，探討生產與銷售之間的協調策略問題。然而上述的學者在討論此一產銷配合問題時，僅針對在固定時間區間內對價格的制定與生產率之協調，但對協調內容並未考量變動價格下對生產時間長度及零存貨時間長度的最適配合問題。當然，近幾年依舊有多位學者：如 Lee[8]、Kim 和 Lee[7]、Lee 和 Kim[9]等探討訂購銷售產品之銷售商如何決定最適訂購量及價格以獲取最大利潤的相關文獻，但也僅針對訂購量與價格個別制定，並未對每一時點變化之影響做進一步的討論。在本研究中構建的模式係站在一銷售商的立場，思考該如何透過各時點之價格的決定，來控制其產品銷售速率，進而決定其零存貨時間長度與生產時間終點，以期在給定的銷售期間總利潤最大之產銷配合問題。

三、數學符號與假設

本研究採用下列符號來說明數學模式所代表的意義：

<u>參數與給定的函數</u>

$[0,T]$:可從事生產及銷售的時間區間

q:產品的生產率

$c(q)$:生產率爲 q 之單位時間的生產成本

h :單位貨品儲存單位時間的儲存成本

$P_t=-as_t+b$:在 t 時點之需要函數，$a>0$，$b>0$，且 $0\le s_t\le b/a$

x^+:$\max\{0,x\}$

<u>決策變數或函數</u>

$y(t)$:在 $[0,t]$ 內的銷售量， $0\le t\le \bar{t}_y\le T$；其中 $\bar{t}_y$ 爲 y 所對應之銷售時間區間的終點，$y(0)=0$ 且 $y(t)\le qt \quad \forall t\in[0,\bar{t}_y]$

$\frac{y(\bar{t}_y)}{q}$: y 所對應之生產活動的時間終點；即 $[0,y(\bar{t}_y)/q]$ 爲生產時間區間，其中 $y(\bar{t}_y)/q\le T$

t_y: y 所對應之零存貨時間長度

同時爲了便利模式的建立，本研究有下列假設條件：

(1) 在維持銷售率等於生產率q的情形下，單位時間利潤爲一非負的實數。即

$$(-aq+b)q \ge c(q) \qquad (3.1)$$

(2) 每單位時間t皆不允許缺貨且在銷售的時間區間累積生產量等於累積銷售量

藉由上面的數學符號與假設條件，我們將此一最適價格控制模式問題透過圖3.1表示。

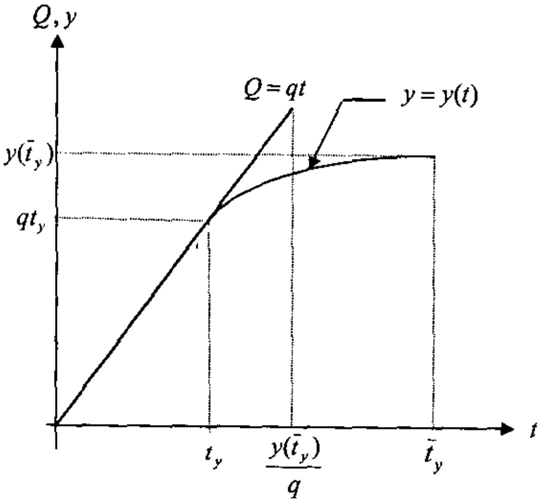

圖 3-1 產品累積產量函數$Q = qt$與累積銷售函數$y = y(t)$的關係圖

四、數學模式與最佳解

如圖(3.1)所示且由(3.1)假設條件可得證 $\tilde{t}_{y^*} = T$，因此，欲決定銷售函數$y(t)$，使得在可銷售時間區間$[0,T]$獲取最大利潤，則其數學模式可表成:

模式I:

$$\operatorname*{Max}_{y} \int_{t_y}^{T} \left(-ay'^2(t) + by'(t) + hy(t)\right)dt + (-aq+b)qt_y - \frac{c(q)y(T)}{q} + \frac{hqt_y^{\,2}}{2} + \frac{hy^2(T)}{2q} - hTy(T)$$

s.t. $y(t_y) = qt_y$ 且 $y(t) < qt \quad \forall t \in (t_y, T]$

$$0 \le y'(t) \le \frac{b}{a} \qquad \forall t \in [t_y, T]$$

令$y^*(t)$，$0 \le t \le T$爲模式I的最佳解。再利用變分法[6]求模式II的最佳解，可得模式 II 之最佳解$y^*(t)$的必要條件如下：

尤拉方程式(Euler equation):

$$y^{*''}(t) = -h/(2a) \quad \forall t \in (t_{y^*}, T] \qquad (4.1)$$

邊界條件: $y^*(t_{y^*}) = qt_{y^*}$ (4.2)

$y^*(T)$的Transversality 條件:

$$y^*(T) - 2ay^{*'}(T) + b - \frac{c(q)}{q} + \frac{hy^*(T)}{q} - hT = 0 \qquad (4.3)$$

由(4.1)、(4.2)和(4.3)，可解出模式I之最佳解爲

$$y^*(t) = -\frac{h}{4a}(t - t_{y^*})^2 + f(t_{y^*})(t - t_{y^*}) + qt_{y^*} \qquad \forall t \in [t_{y^*}, T]$$

其中f定義爲：

$$f(\tilde{t}) = \frac{1}{4a}\left[2aq + h(T - \tilde{t}) + 4a\frac{(-aq+b)q - c(q)}{2aq - h(T - \tilde{t})}\right]$$

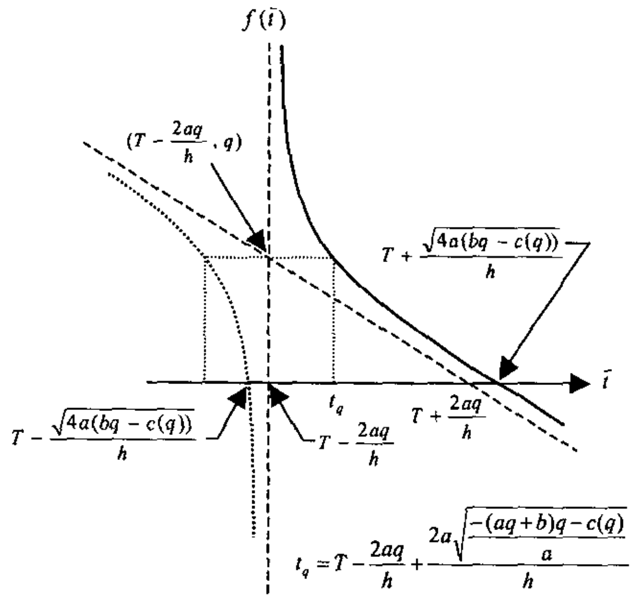

圖 4.1 函數$f(\tilde{t})$的圖形

至於最佳解$y^*(t)$所對應的零存貨時間長度t_{y^*}，則可由下面的集合的關係界定。

$$t_{y^*}=\min\{\bar t\mid 0\le\bar t<T\ ,\ T-\frac{2aq}{h}<\bar t \text{ 和 } y_{\bar t} \text{ 爲模式I的一可行解}\}$$

$$=\min\{\bar t\mid 0\le\bar t<T\ ,\ T-\frac{2aq}{h}<\bar t \text{ 和 } 0\le y_{\bar t}'(\bar t)=f(\bar t)\le q\}$$

；利用圖(4.1)之關係圖

$$=\min\{\bar t\mid 0\le\bar t<T,\ t_q\le\bar t\le T\}$$

$$=\min\{\bar t\mid t_q^+\le\bar t<T\}$$

$$=\begin{cases}t_q^+ & \text{若 } t_q^+<T\\ \phi & \text{若 } t_q^+\ge T\end{cases}$$

$$=\begin{cases}t_q^+ & \text{若 } \sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}<q\\ \phi & \text{若 } \sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}\ge q\end{cases}$$

綜合上面的討論，我們可得到模式I之最佳解 $y^*(t)$ 表成下列三種情況：

情況一：若 $0<q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}<\frac{hT}{2a}$ 則

$$t_{y^*}=T-\frac{2a}{h}\left(q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}\right) \tag{4.4}$$

$$y^*(t)=\begin{cases}qt & \forall\, t\in[0\,,t_{y^*}]\\ -\frac{h}{4a}(t-t_{y^*})^2+qt & \forall\, t\in[t_{y^*}\,,T]\end{cases} \tag{4.5}$$

(即最佳解爲零存貨與非零存貨時間長度皆大於零之情形)

情況二： 若 $q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}\ge\frac{hT}{2a}$ 則

$$t_{y^*}=0$$

$$y^*(t)=-\frac{h}{4a}t^2+\frac{1}{4a}\left[2aq+hT+4a\frac{(-aq+b)q-c(q)}{2aq-hT}\right]t$$

$$\forall\, t\in[0\,,T] \tag{4.6}$$

(即最佳解爲零存貨時間長度爲零之情形)

情況三：若 $q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}\le 0$ 則

$$t_{y^*}=T$$

$$y^*(t)=qt \qquad \forall t\in[0\,,T] \tag{4.7}$$

(即最佳解爲非零存貨時間長度爲零之情形)

五、最佳解的敏感度分析

最佳解的零存貨與非零存貨時間長度皆大於零之情形的敏感度分析結果如表 5.1 所示:

表 5.1

決策變數	參　數				
	a	b	h	T	q
t_{y^*}	-	+	+	+	-
$y^*(t)$	-	+	+	+	*

當最佳解之零存貨時間長度爲零時之敏感度分析結果如表 5.2 所示

表 5.2

決策變數	參　數				
	a	b	h	T	q
$y^*(t)$	*	+	+	+	*

其中

"+" ：決策變數是參數的增函數

"-" ：決策變數是參數的減函數

"*" ：當參數值或函數對應確認後，決策變數的符號便可決定

六、結論

本研究構建一個屬於產銷配合控制問題的數學模式。透過數學模式可求得最佳解 $y^*(t)$ 所對應的決策變數如下：(1) t 時點的最佳銷售率 $y^*(t)$；(2) t 時點的最佳銷售價格 $-ay^*(t)+b$ ；(3) 最佳零存貨時間長度 t_{y^*}；(4)最佳生產活動之時間終點 $\frac{y^*(T)}{q}$ 。

最佳解 $y^*(t)$ 的函數型態與產銷配合指標： $q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}$ 的大小有密切關係；其中 q 爲零存貨期間之單位時間產量；$(-aq+b)q-c(q)$ 爲單位時間利潤

而 a 爲增加單位賣量之降價額。

研究結果顯示：若產銷配合指標愈小，則對任一時點 t，銷售速率 $y^*(t)$ 愈高(即生產速率 q 相對於銷售速率 $y^*(t)$ 愈小) 玆說明如下：

情況 1：假設當產銷配合指標 $q-\sqrt{\frac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}$ 小於或等於零(即 $aq \le (-aq+b)-\frac{c(q)}{q}$)時。情況 1 發生的場合爲：在零存貨期間內單位時間內多賣一單位貨品之損失(降價額 a 與售量 q 之乘積)小於或等於多賣一單位貨品之利益(單位收入 $(-aq+b)$ 與單位成本 $\frac{c(q)}{q}$)之差額，此時最佳非零存貨時間長度($T-t_{y^*}$)等於零即最佳解爲一直維持零存貨狀態(維持生產速率 q 等於銷售速率 $y^*(t)$)從事產與銷配合活動(參見 4.7)。

情況 2：假設當產銷配合指標介於 0 與 $\frac{hT}{2a}$ 之間，其中 $\frac{hT}{2a}$ 可視爲期末 T 時點的單位售量提早至期初 0 時點出售之影響因子(因 hT 爲其單存貨成本，而 a 爲增加單位賣量之降價)。此時最佳解之零存貨時間長度 t_{y^*} 與非零存時間長度 $T-t_{y^*}$ 皆大於零。即最佳解爲有部份時間爲零存貨狀態，而另部份一時間爲非零存貨狀態(參見 4.5)。

情況 3: 假設當產銷配合指標大於或等於 $\frac{hT}{2a}$。此時最佳解之零存貨時間長度 t_{y^*} 等於零。即最佳解爲一直維持非零存貨狀態從事產與銷配合活動(參見 4.6)。

利用最佳解的敏感度分析表 5.1 和表 5.2，可得下列性質：

(i) 當產銷配合指標介於 0 與 $\frac{hT}{2a}$ 時：

(1) 最佳零存貨時間長度 t_{y^*} 隨增加單位賣量之降價 a 或單位時間產量 q 的增加而減少；但隨價格上限 b、單位儲存成本 h 或銷售時間長度 T 的增加而增加。

(2) 最佳銷售量 $y^*(t)$ 隨增加單位賣量之降價 a 的增加而減少；但隨價格上限 b、單位儲存成本 h 或銷售時間長度 T 的增加而增加；而 $y^*(t)$ 與單位時間產量 q 之間的變化關係則需視 a、b、h 和 T 參數値的相對大小而定。零存貨時間長度 t_{y^*} 隨單位儲存成本 h 的增加而增加。另外，在 a 維持不變之情形下，零存貨時間 t_{y^*} 爲產銷配合指標的減函數(參見 4.4)。

(ii) 當產銷配合指標大於或等於 $\frac{hT}{2a}$ 時：

最佳銷售量 $y^*(t)$ 隨價格上限 b，單位儲存成本 h 和銷售時間長度 T 的增加而增加。而 $y^*(t)$ 與增加單位賣量之降價 a 和單位時間產量 q 之間的變化關係則需視其他參數値的相對大小而定。

以上性質都是決策變數與各個參數之間變化方向關係。若要進一步探討決策變數與各個參數之間變化率的大小關係，則可從本文第五節決策變數對各個參數的偏導數之數學式獲得。

參考資料

[1] Eliashhberg, J. and Steinberg, R., "Marketing-Production Decisions in an Industrial Chanel of Distribution,"

Management Science, Vol. 33, No. 8, pp. 981-1000, 1987.

[2] Feichhtinger, G. and Hartl, R., "Optimal Pricing and Production in an Inventory Model," European Journal of Operational Research, Vol. 19, No. 1, pp.45-56, 1985.

[3] Gaimon, C., "Simultaneous and Dynamic Price, Production, Inventory and Capacity Decisions," European Journal of Operational Research, Vol. 35, pp. 426-441, 1988.

[4] Hax, A. C. and Candea, D., Production and Inventory Management, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

[5] Jorgensen, S., "Optimal Production, Purchasing and Pricing: A Differential Game Approach," European Journal of Operational Research, Vol. 24, pp. 64-76, 1986.

[6] Kamien, M. I. And Schwartz, N. L., Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland New York, 1981.

[7] Kim, D. and Lee, W. J., "Optimal Coordination Strategies for Production and Marketing Decisions," Operations Research Letter, Vol. 22, pp.41-47, 1998.

[8] Lee, W. J., "Determining Order Quantity and Selling Pricing by Geometric Programing: Optimal Solution, Bounds, and Sensitivity," Decision Science, Vol. 24, No. 1, pp.76-87, 1993.

[9] Lee, W. J. and Kim, D., "Optimal and Heuristic Decision Strategies for Integrated Production and Marketing Planning," Decision Science, Vol. 24, No. 6, pp.1203-1213, 1993.

[10] Pekelman, D., "Simultaneous Price-Production Decisions," Operations Research, Vol. 22, No. 1, pp. 788-794, 1974.

[11] Simon, H., Price Management, North Holland, NY, 1989.

[12] 徐重生，"世界流通業何去何從"，突破雜誌，112期，pp.37-39. 1988.

[13]戴造煜，"國外通路引進本土化的適應歷程"，中國生產力中心課程講義，1994.

[14]譚瑾瑜，"台灣流動業之變遷與未來趨勢"，台灣經濟研究月刊，5期，pp.22-25 1996.