行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元化輔助教材的研發與評量之研究

--子計畫一：教材發展的研究

計畫編號： NSC 89-2115-M-032-016

執行期限：89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日

主持人：高金美

E-mail: cmfu@mail.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱：淡江大學數學系

微積分中定積分單元之教材設計

一、中文摘要

微積分的課程中主要是包含微分與積分兩個主題發展及其應用之介紹。在學習過程中學生較不易瞭解的部份為積分的計算及定積分之應用，為了讓學生瞭解如何利用定積分來求得面積與體積之問題。在本計劃中我們特別針對定積分這單元的教材，分別用中文解說、圖形輔助說明的方式介紹之，希望讓學生可以在課前預習，在課後複習使用，同時也可以當作教師教學中之輔助教材。在本計劃下我們將定積分應用在求平面上之區域的面積及三度空間中立體圖形之體積之教材做一番整理。

關鍵詞： 微積分，積分，定積分，面積，體積。

二、英文摘要

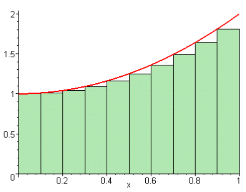
Calculus consists of two major topics, differentiation and integration. Evaluating the given integral and solving the problems related to definite integral are the hardest parts when learning calculus. We hope students/instructors may have some visualized figures to learn/teach this topic very easily. Even after the class students still can lean by themselves. In this project we try to tell students what is the definite integral and how can we use the definite integral to

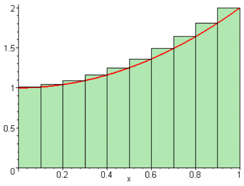
find the area or the volume of the solid. We hope it can be used for students to learn calculus before classes, or after the class. It can be used for teachers to assist their teaching. In this report we will give part of teaching material about how to apply the definite integral to obtain the area of the region and the volume of the solid.

Keywords: calculus, integral, definite integral, area, volume,.

在本計畫中為了配合子計劃二之評量設計及子計劃三之師資訓練，我們在教材設計的單元選擇以定積分的應用為最先製作的題材。對於定積分的應用，我們將從最基本之定積分之由來談到如何利用定積分求得平面區域的面積；接著再利用定積分求得將一平面區域繞著一直線旋轉所形成之旋轉體的體積；最後進而介紹如何利用二重積分及三重積分求得立體圖形之體積。

在定積分之由來中，我們經由一般規則圖形之面積求法，進而說明如何利用分割的觀念，求得不規則圖形之面積。其中介紹左端點法及右端點法求得曲線下平面區域之面積近似值：





進而解說什麼是黎曼和及定積分。

黎曼和

假設 f 為定義在 $[a,b]$ 的一個函數，若將區間 $[a,b]$ 分成 n 個小區間 $[a = x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n = b]$， 則每個小區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的長度為 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$。令 $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$，若 $|P| = \max\{\Delta x_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$，即 $|P|$ 為所有 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots,n$ 中最大的數。 若 c_i^* 為小區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的任一個數，則以 $f(c_i^*)$ 為高，Δx_i 為底的長方形面積總和為 S_n.

$$S_n = f(c_1^*)\Delta x_1 + f(c_2^*)\Delta x_2 + \cdots\cdots + f(c_n^*)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i$$

我們稱 $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i$ 為黎曼和。

定積分

令函數 f(x)為定義在區間[a,b]上，若極限 $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ 存在，則稱它為該函數在[a,b]上的積分，並記為

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \text{。}$$

接著介紹如何利用定積分求得平面區域的面積及兩曲線間的面積。

平面區域的面積

假設 $f(x)$ 是定義在 $[a,b]$ 之間的非負函數，即 $f(x) \geq 0$。則圖形 $y = f(x)$ 下方，x 軸上方從 a 到 b 的區域的面積為

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{。}$$

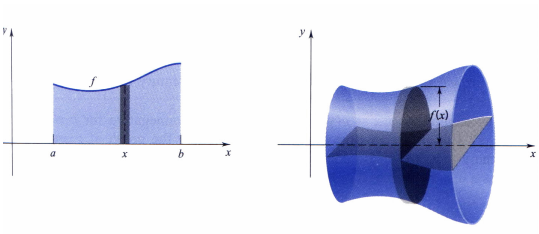
兩曲線間的面積

若 $f(x)$和 $g(x)$為定義在閉區間$[a,b]$的兩個連續函數且 $f(x)\geqq g(x)$，當 $x\in[a,b]$，則介於兩函數圖形間從 a 到 b 的區域面積為 $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$。

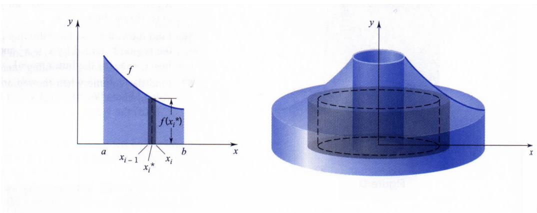
旋轉體的體積

將一平面區域繞著一直線旋轉所形成之旋轉體，由於旋轉之直線的位置不同，所產生之旋轉體的形狀亦不同。在介紹旋轉體的體積求法時，我們將介紹兩種方法：圓盤法及圓柱槽法，分別來求得此旋轉體之體積。

(1) 圓盤法



(2) 圓柱槽法



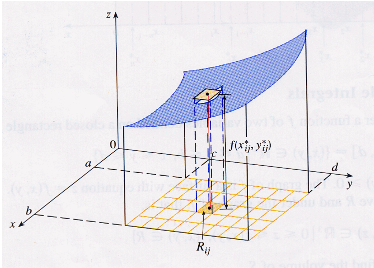
立體圖形之體積

如何求得立體圖形之體積？

基本上我們仍然利用分割的概念，將立體圖形 S 的底部平面區域 R 切割成小長方形，如果 $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A$ 存在的話，我們就定義此為雙重（或二重）積分

$$\iint_R f(x,y)dA=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A$$

，這也就是立體圖形 S 的體積。



由於底部之平面區域不同，再化簡此二重積分 $\iint_R f(x,y)dA$ 的方法就不一樣，在教材設計上我們就分別以不同的例子解說之。

三重積分

設 $f(x,y,z)$ 是一個三個變數 x,y,z 的函數，其定義域為長方體所圍成的立體

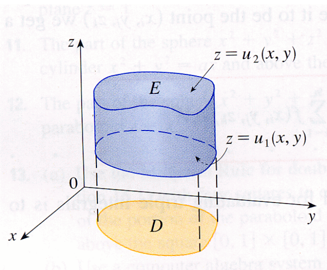
$B=\{(x,y,z)\,|\,a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ r\le z\le s\}$

如同二重積分定義 f 在 B 上的三重積分

$$\iiint_B f(x,y,z)dV=\int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

如果 f 的定義域不是長方體所圍的立體而是一般的立體圖形 E，則應該如何求三重積分呢？ 例如：

$E=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$



$$\iiint_E f(x,y,z)dV=\iint_D\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dA$$

在教材設計上我們將分成三種情況來說明之。

Reference.

1. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999
2. Dale Varberg and Edwin J. Purcell, Calculus, Seventh Edition,Prentice Hall International, Inc. 1997.