856

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

Collatz-Wielandt 函數連續性及其相關問題探討

A study on the continuity of Collatz-Wielandt function and related topics

計畫編號：NSC 87-2115-M-032-005

執行期限：86 年 8月 1 日 至 87年 7 月 31 日

主持人：陳功宇　　　執行機關：淡江大學數學系

一、中文摘要：

(a). Collatz-Wielandt 函數在研究非負矩陣譜及譜半徑上有很重要的地位，我們希望能夠解決連續性的問題。

(b). 矩陣冪的範數之研究也是探討的重點。

關鍵詞：Collatz-Wielandt 函數、冪範數

Abstract：

This article investigate the continuity of Collatz-Wielandt function of a nonnegative matrix. In addition, we study the structure of power norm of a matrix.

Keywords:

Collatz-Wielandt function , power norm

二、緣由與目的：

(a). 給定 n×n 非負矩陣 A，它的 Collatz-Wielandt 函數 f_A 定義如下：$f_A(x)=\min_{x_i\neq 0}\frac{(Ax)_i}{x_i}$；

$x=(x_1,\cdots,x_n), x_j\geq 0, \sum x_i=1$

當 A 是不可約時，f_A 的最大值正是 A 的譜半徑，也是 A 的特徵值。但是對一般的 A 而言，f_A 並不是連續的。本研究希望在 A 上找出充分必要條件而使 f_A 是連續。

(b). 一個佈於體(實數或複數)大小為 p×p 的方陣 A 中，若$(A^n)_{n\in N}$(A 的冪數列)是收斂的，則稱方陣 A 是冪收斂的；若$(A^n)_{n\in N}$是有界的，則稱方陣 A 是冪有界的。

給定一個方陣 A∈M_p。方陣的表面譜(peripheral spectrum of A)，意指所有方陣 A 的特徵值伴隨模數 ρ(A)(譜半徑)所成的集合。也就是，$\{\lambda\in\sigma(A):|\lambda|=\rho(A)\}$ 所成的集合，此處σ(A)是 A 的譜而∂D 是單位圓的邊界。方陣 A 的索引(index of A) 意指會使得 $rankA^k=rankA^{k+1}$ 的最小非負整數 k。

顯而易見地，矩陣 A 是一冪收斂，則對於每個範數$\|\cdot\|$而言 $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在，且對某些範數$\|\cdot\|$而言 $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在，則矩陣 A 是冪有界。然而，當 $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$ 對全部(或某些)範數存在時，我們似乎找不出有關方陣 A 的類似結果。本計劃中，將探

討有關$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在的問題。

三、結果與討論：

以下是我們所得到的一些充分或必要條件：

(1). 定理　設方陣 $A\in M_p$。則下列條件是等價的：

(a).存在一純量$\lambda\in\partial D$，使得λA 是冪收斂的。

(b). 對於所有範數$\|\cdot\|$，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在。

(c). 對於所有矩陣範數$\|\cdot\|$，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在。

(2). 定理　設方陣 $A\in M_p$。若

(i) $\rho(A)<1$

或

(ii) $\rho(A)=1$ 且方陣 A 的邊界部分是酉的，

則$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在，此處$\|\cdot\|$是酉不變的範數。

(3). 定理　設方陣 $A\in M_p$。若$\sigma(A)\subseteq\partial D$且對任一酉不變的範數$\|\cdot\|$，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在，則方陣 A 是酉的。

我們並不能輕易地得到$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在的充分必要條件，是矩陣 A 的邊界部份是酉的。我們將舉一個我們發現的反例說明這事實。

反例.　考慮方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

在一簡單的計算可得

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=AU$$

其中 U 是一置換矩陣(permutation matrix)。因此，我們可得到

$A^3=A^2U, A^4=A^3U,\cdots,A^n=A^{n-1}U$

由這可推導出，當$\|\cdot\|$是酉不變的範數時，則

$$\begin{aligned}\|A\| &=\|AU\|\\ &=\|A^2\|\\ &=\|A^2U\|\\ &\vdots\\ &=\|A^n\|\end{aligned}$$

所以$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|$存在，但方陣 A 的邊界部份為$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，而這並不是酉的。

四、計畫成果自評

本計劃中(a)之部份未能獲得解決，但對矩陣冪的探討，則有進一步的認識，所得結果尚可。

利用上面的定理我們將得到一些相關性質及其應用，且與 J.A.Deddens 及 T.K Wong(見參考文獻 Deddens)同樣的結果。

五、參考資料

1.Belitskii, G.R., and Lyubich, Yu. I. Matrix Norms and Their Applications. Trans. A. Iacob. Bostonn: Birkhauser Verlag, 1988.

2.Berman, A., and Plemmons, R.J., Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, New York, 1979.

3.Deddens,J.A., and Wong,T.K. The Commutant of analytic Toeplitz Operators. Trans. Amer. Math. Soc., 184(1973), 261-273

4.Friedberg, Stephen H., et al., eds. Linear Algebra. New York: Prentice Hall, 1992

5.Hoffman, Kenneth, and Kunze, Ray. Linear Algebra. New Jersey: Southeast Book, 1971

6.Horn, Roger A., and Johnson, Charles R. Matrix Analysis. New York: U of Cambridge, 1990.

7.Lancaster, Peter. Theory of Matrices. Canada: U of Calgary,1969.

8.Pullman, N. J. Matrix Theory and Its Applications: Selected Topics. New York: Marcel Dekker, 1976