行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

圖的圓著色數和圖的圓連續選擇數之研究
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 97-2115-M-032-008-
執 行 期 間 ：97 年 10 月 01 日至 98 年 07 月 31 日
執 行 單 位 ：淡江大學數學系

計畫主持人：潘志實

處 理 方 式 ：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 98 年 10 月 31 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ■ 成 果 報 告 □期中進度報告

圖的圓著色數和圖的圓連續選擇數之研究

計畫類別：■ 個別型計畫　　□ 整合型計畫
計畫編號：NSC 97－2115－M－032－008－
執行期間：2008 年 10 月　1 日至　2009 年　7 月 31 日

計畫主持人：潘志實
共同主持人：
計畫參與人員：何婉嫙，黃逸齊，鄭至程

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：■精簡報告　□完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

執行單位：淡江大學

中　華　民　國　　98 年　　10 月　　15 日

中文摘要

令$S(r)$是一個周長為r的圓。圖G的圓連續選擇數 (circular consecutive choosability) $ch_{cc}(G)$是指最小的實數t使得對任意的$r \geq \chi_c(G)$，假如每個點v被賦予一個長度為t閉區間在$S(r)$上，存在一個圖G的圓r-著色f使得$f(v) \in L(v)$。我們研究一個圖在選擇數和圓選擇數之間的關係。對任意個k，如果一個圖是k－可選擇的(k-choosable)，則$ch_{cc}(G) < k+1-1/k$；更近一步來說，當$k \geq 3$的時候，這個界是最好的了。當$k=2$時，如果G是 2-可選擇的(2-choosable)則$ch_{cc}(G) \leq 2$，且等式成立當且且當G包含一個圈(cycle)。再者，我們證明存在有圓連續 2-可選擇(circular consecutive 2-choosable)的圖不是 2-可選擇的。特別的，也證明了對任意的圈和$K_{2,n}$當$n \geq 2$，這些圖會滿足$ch_{cc}(G)=2$。另一方面，我們也證明了對很多廣義的θ圖(theta graphs)$ch_{cc}(G) > 2$是成立的。

關鍵詞: 圓著色(circular coloring)，圓著色數(circular chromatic number)，選擇數(choosability)，圓選擇數(circular choosability)，圓連續選擇數(circular consecutive choosability)。

Abstract

Let $S(r)$ denote a circle of circumference r. The circular consecutive choosability $ch_{cc}(G)$ of a graph G is the least real number t such that for any $r \geq \chi_c(G)$, if each vertex v is assigned a closed interval $f(v) \in L(v)$ of length t on $S(r)$, then there is a circular r-colouring f of G such that $f(v) \in L(v)$. We investigate, for a graph, the relations between its circular consecutive choosability and choosibility. It is proved that for any positive integer k, if a graph G is k-choosable, then $ch_{cc}(G) < k+1-1/k$; moreover, the bound is sharp for $k \geq 3$. For $k=2$, it is proved that if G is 2-choosable then $ch_{cc}(G) \leq 2$, while the equality holds if and only if G contains a cycle. In addition, we prove that there exist circular consecutive 2-choosable graphs which are not 2-choosable. In particular, it is shown that $ch_{cc}(G)=2$ holds for all cycles and for $K_{2,n}$ with $n \geq 2$. On the other hand, we prove that $ch_{cc}(G) > 2$ holds for many generalized theta graphs.

Key word: circular coloring, circular chromatic number, choosability, circular choosability, circular consecutive choosability.

報告內容:

(一) 前言

令 $S(r)$ 是一個周長為 r 的圓。令 $a,b \in S(r)$，a 和 b 在 $S(r)$ 上的距離定義為 $|a-b|_r = \min\{|a-b|, r-|a-b|\}$。在一個圖 G 上的圓 r 著色(circular r-colouring)是一個映射(mapping) $f: V(G) \to S(r)$ 使得對於 G 的每個邊 xy 滿足 $|f(x)-f(y)|_r \geq 1$。圖 G 的圓著色數(circular chromatic number) $\chi_c(G)$ 就是最小的 r 使得 G 有一個圓 r 著色。對任意的圖 G，$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$ 是已知的，所以對於圖 G 的圓著色數是該圖著色數(chromatic number)的一個更精細化的值。圓著色在過去 20 年來的文獻已被廣泛的研究[26,27]。但是仍然有很多有趣而且未知的問題。這的計畫主要是針對這些圓著色的問題進行更進一步的研究。

在 1980 年，Erdős, Rubin 和 Taylor[2]介紹了有關圖的選擇數(Choosibility) $ch(G)$ 的概念，至今已被廣泛的研究。圖 G 的圓連續選擇數 (circular consecutive choosability) $ch_{cc}(G)$ 是指最小的實數 t 使得對任意的 $r \geq \chi_c(G)$，假如每個點 v 被賦予一個長度為 t 閉區間在 $S(r)$ 上，存在一個圖 G 的圓 r 著色 f 使得 $f(v) \in L(v)$。如同著色數 χ 和圓著色數 χ_c 的關係。圓連續選擇數是選擇數的一種變形。在[7]裡面，對於完全圖、樹、偶圈(even cycles)以及平衡完全二部圖(balanced complete bipartite graphs)的圓連續選擇數 $ch_{cc}(G)$ 都已經被計算出來了；以及一些其他圖的圓連續選擇數 $ch_{cc}(G)$ 的上界。在[8]，圖的選擇數 $ch(G)$ 和圖的圓連續選擇數 $ch_{cc}(G)$ 的關係也被研究了。但是仍然有很多公開的問題。本計畫也會試著在這些問題上著手。

(二) 研究目的、文獻探討

對於選擇數的問題，一直以來都是很困難的問題，在[3,9,10,15,17,21,23,26]都有被討論到。然而，它也有很多其他的變形。最初的圓選擇數(circular choosability)本來是我們比較想做的推廣，但是發現這樣的推廣比原來的選擇數還複雜很多，而且這也被證明了[7]和選擇數的關係不像著色數和圓著色數這樣密切。所以我們進而討論圓連續選擇數的問題，發現這樣的定義和選擇數的關係比較密切。同時我們也證明了[8]一些它們之間的關係。所以對於圓連續選擇數在其他以知選擇數的圖的研究，就變得更有意義。在這方面也有很多題材可以加以研究。

對選擇數來說，和它相關的一些變形的課題在過去的文獻中已經被討論很多。其中一個由 Waters 介紹的問題，討論有關連續的選擇數，這是給每個點的列表(list)是一個連續的整數集合。另外的變形，稱為圓選擇數，這是由圖的圓著色推廣過來的。不過在定義上，

圓選擇數在每個點的列表上的限制並不嚴格。一般而言，一個圖的圓選擇數會比它的選擇數-1 還大。但是另一方面，林文菘、楊大慶、楊宗穎和朱緒鼎在[10]証明了存在有圖形，其圓選擇數差不多是選擇數的兩倍大。直觀來說，我們會覺得選擇數是著色的推廣，而同樣的圓選擇數是圓著色數的推廣。既然圓著色數是著色數的精細化的表現，我們會期待選擇數和圓選擇數也有相同的關係。所以這個結果顯示著這樣的推廣方式似乎比較沒有那麼讓人滿意。所以在這裡我們討論圖的圓連續選擇數，名義上雖然說是由連續選擇數推廣過來的，但是實際上，圓連續選擇數和連續選擇數再意義上來是有些不一樣的。在結果上來說，這兩者目前也沒有很直接的關係，但是如果只是討論選擇數和圓連續選擇數，則有比較好的關係。在我們的研究中，我們證明了 $ch_{cc}(G) < k+1-1/k$ ，如果 G 是 k-可選擇的。由這個關係可以看出，圓的連續選擇數範圍不會離選擇數太遠，某個意義來說，這兩個數的關係比圓選擇數和選擇數的關係來的密切許多。或許我們在討論有關圓選擇數的時候漏掉了什麼條件，才能讓圓選擇數是選擇數的關係如同圓著色數是著色數的關係一樣。如果能夠找到這個條件，那很多在圓著色數和著色數的關係的結果，都可以用在圓選擇數和選擇數的關係。所以連續的選擇數，提供了一些方向，在每個點的列表的條件上，或許有些應該是要連續，或者長度應該要有一定的條件。這些都是很好的研究方向。

另外，我們知道平面圖(planar graphs)和外平面圖(outplanar graphs)的著色一直以來都是很重要的課題。平面圖的選擇數一直以來也都是熱門的討論問題，而且也已經有很多基本的結果。在圓選擇數方面在[2,4,8]中也討論很多平面圖和圍長(girth)有關的一些上界的結果。既然我們知道平面圖的選擇數小於等餘 5，而外平面圖的選擇數小於等餘 3，而且在[10]也証明了平面圖的圓連續選擇數的上界是 5.8，而外平面圖的圓連續選擇數的上界是 11/3。這裡我門也試著往下界的方向去著手。

（三）研究方法

1. 就當前的問題，先收集國內外相關研究的文章進行研讀並學習其方法，並主動與其他作者聯繫並討論。
2. 參與研討會，藉此了解其他學者目前研究，是否與本計畫有相關研究，可以增加合作的機會。並且也可以增加可以研究的方向。
3. 藉由指導學生，也可增加計畫研究的靈活度，讓計畫有多方面的發展。
4. 透過教學及討論，可透過其他學科的相關知識來輔助本計畫的執行。

（四）結果與討論

有關於圓連續選擇數方面，我們證明了對任意的整數 k ，如果圖 G 是 k 可選擇的（k-choosable)，則 $ch_{cc}(G) \le k+1-1/k$ ；此外，當 $k \ge 3$ 的時候這個界是最好的。這證明了圓連續選擇數對於選擇數和圓選擇數在每個點的列表的條件中，加上連續是有意義的。然而，當 $k=2$ 的時候，2-可選擇的的圖形早就被討論過而且有好的刻畫。Erdős, Rubin 和 Taylor 在[2]中刻畫了 2-可選擇的圖形是，在刪掉一些度數為一的點之後，剩下的圖如果是一個點、一個圈或是一個 θ 圖的時候就是 2-可選擇的。所以這裡我們證明了 θ 圖是 2-圓連續可選擇的，這也證明了如果圖 G 是 2-可選擇的(2-choosable)，則 $ch_{cc}(G) \le 2$ ，當等式成立的時候等價於圖 G 包含一個圈(cycle)。更進一步的，我們證明了存在一些圓連續

2-可選擇(circular consecutive 2-choosable)的圖但不是 2-可選擇的。特別地，我們還證明了對所有的圈和$K_{2,n}$當$n \geq 2$, $ch_{cc}(G)=2$是成立的。另一方面，我們也證明了對很多廣義的θ圖(theta graphs)$ch_{cc}(G)>2$是成立的。但是如同前面說的，圓連續選擇數和選擇數的關係還是有些不明確，像奇數圈(odd cycle)的選擇數是 3，但是圓連續選擇數卻是 2。所以我們也一直想探討還有那些圖，其圓連續選擇數為 2。然而，也有一些圖是圓連續選擇數大過選擇數。所以刻畫出選擇數和理想中的圓選擇數(非現在定義的圓選擇數)，是我們現在努力的目標。

前面提到在[10]証明了平面圖的圓連續選擇數的上界是 5.8，而外平面圖的圓連續選擇數的上界是 11/3。這裡我們證明了一些下界的結果，如果Q是指所有的外平面圖(outplanar graphs)的集合，而P是只所有平面圖(planar graphs)的集合。我們說Q(或P)的圓連續選擇數是指所有Q(或P)裡面的圖中，圓連續選擇數最大的那個值。這裡證明了P的圓連續選擇數會大於等於 4.7，也就是說P的圓連續選擇數會介於 4.7 到 5.8 之間。而Q的圓連續選擇數的下界是 11/3，也就是說Q的圓連續選擇數會等於 11/3。

參考文獻:

1. J. A. Bondy and P. Hell, *A note on the star chromatic number*, J. Graph Theory 14 (1990), 479-482.
2. O. V. Borodin, S. J. Kim, A. V. Kostochka and D. B.West, *Homomorphisms from sparse graph with large girth*, J. Combin. Theory Ser. B, 90 (2004), no. 1, 147--159.
3. P. Erdős, A. L. Rubin and H. Taylor, *Choosibility in graphs*, Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theoryand Computing, Congress. Numer., XXVI (1980), 125-157.
4. A. Galluccio, L. Goddyn and P. Hell, *High-girth graphs avoiding a minor are nearly bipartite*, J. Combin. Theory Ser. B, 83 (2001), 1-14.
5. A. Gyarfas, T. Jensen, M. Stiebitz, *On graphs with strongly independent colour-classes*, Journal of Graph Theory, 46 (2004) 1-14.
6. G. Hahn and C. Tardif, *Graph homomorphisms: structure and symmetry*, Graph symmetry (Montreal, PQ, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., (497(1997), 107--166.
7. P. Hell and J. Nešetřil, *Graph homomorphisms* , Oxfrod University Press, 2004.
8. W. Klostermeyer and C.Q.Zhang, $(2+\varepsilon)$-*colouring of planar graphs with large odd girth*, J. Graph Theory, 33 (2000), 109-119.
9. P.C.B. Lam, W. Lin, G. Gu and Z. Song, *Circular chromatic number and a generalization of construction of Mycielski*, J. Combin. Theor. Ser. B. 89 (2003) 195-205.
10. W. Lin, C. Yang, D. Yang and X. Zhu, *Circular consecutive choosability of graphs*, Taiwanese Journal of Mathematics, to appear.
11. D.D.-F. Liu, *Circular chromatic number for iterated Mycielski graphs*, Discrete Math. 285 (2004) 335-340.
12. Lovász, L., *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Comb. Theory (Ser. A) 25 (1978)319-324.
13. M. Larsen, J. Propp and D. H. Ullman, *The fractional chromatic number of Mycielski graphs*, J Graph Theory 19 (1995), 411-416.
14. J. Matoušek and G. Ziegler, *Topological lower bounds for the chromatic number*: A hierarchy, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 106(2004),71-90.
15. S. Norine, T. Wong and X. Zhu, *Circular choosability via Combinatorial Nullstellensatz*, Journal of Graph Theory, to appear.
16. Z. Pan and X. Zhu, *Multiple colouring of cone graphs,* manuscript, 2007.
17. A. Raspaud and X. Zhu, *List circular colouring of trees and cycles*, J. Graph Theory, 55 (2007), 249-265.
18. E. R. Scheinerman, D. H. *Ullman, Fractional Graph Theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization (John Wiley & Son, New York,1997).
19. Gábor Simonyi and Gábor Tardos. *Local chromatic number, ky fan's theorem, and circualr colourings*. Preprint, arXiv:math.CO/0407075, 2004.
20. C. Tardif, *Fractional chromatic numbers of cones over graphs*, J.Graph Theory38(2001)87-94
21. C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory Ser. B, 62(1) (1994), 180-181.
22. A. Vince, *Star chromatic number*, J. Graph Theory 12 (1988), 551-559.
23. R.J.Waters, *Consecutive list colouring and a new graph invariant*, J. London Math. Soc. (2), 73 (2006), 565-585.
24. X. Zhu, *Circular chromatic number: a survey*, Discrete Math, 229 (2001), 371-410
25. X. Zhu, *Recent developments in circular colouring of graphs*, in Topics in Discrete Mathematics, Algorithms Combin. 26(Springer, Berlin, 2006), 497--550.
26. X. Zhu, *Circular choosability of graphs*, J. Graph Theory, 48(2005), 210-218.

計畫成果自評:

本次計畫的成果的內容都是原先預計的結果，基本上都有達到預計的成果。不過對於其他新的問題還沒有什麼特別的成果，不過在這方面還是有很多問題可以繼續研究。另外，相關的結果都已經寫成文章，且也已經投到期刊審查，雖然可能需要一些時間才會刊出，但是相信其結果一定是會受到肯定的。