

Topics on Resolution of Imaging Systems and Computer Tomography

影像系統分辨率及層析成像之相關問題

(NSC 96-2115-M-032-007-)

Mengnien Wu

October 10, 2008

X-ray 與 radar 層析成像 (*tomography*)

在層析成像法裡頭, 我們測量某密度 (吸收率) 函數 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^2 直線 L 上做線積分的值, 即: 以所謂的 *Radon transform* 來表示:

$$(Rf)(\theta, s) := \int_{\mathbb{R}^2} \delta(s - \langle \theta, x \rangle) f(x) dx \quad (1)$$

其中 $L = \{x \mid s - \theta \cdot x = 0\}$, $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)$ 是 L 的單位法向量, s 是 L 到原點的距離, $\delta(s - \theta \cdot x) = \begin{cases} 1 & \text{假如 } x \in L \\ 0 & \text{假如 } x \notin L \end{cases}$ 在層析成像法裡頭 (*tomography*), 法向量 θ 有一定的入射角的角度範圍 $|\phi| \leq \Phi$.

以上是「偵測器是極小」的情況。假使偵測器在一定的範圍都能接收到訊號, 則 (1) 將修改成:

$$(R_b f)(\theta, s_i) := \int (Rf)(\theta, s) \chi_{\Delta s}(s - s_i) ds \quad (2)$$

其中 $\chi_{\Delta s} := \begin{cases} 1 & \text{訊號抵達偵測器} \\ 0 & \text{訊號偏離偵測器} \end{cases}$ 。這裡的 b 其實是反應接收範圍的一個常數。

因為 $\chi_{\Delta s}$ Fourier transform 的樣子像是一個在 0 附近 $\pm b$ 的 step function, 所以根據取樣定理, 主頻寬 b 近似於 $\pi/\Delta s$ 。並且我們將忽略負的頻率, 即限制 $\chi_{\Delta s}$ 在 $[0, b)$ 上。

Fourier transform

「震盪頻率版的」 Fourier transform (*oscillation frequency*):

$$\text{Fourier transform: } \mathcal{F}[g(x)](k) = \hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$\text{inverse transform: } \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(k)](x) = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{2\pi i k x} dk$$

「角頻率版的」 Fourier transform (*angular frequency*):

$$\text{Fourier transform: } \mathcal{F}[g(t)](\omega) = \hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\text{inverse transform: } \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(\omega)](t) = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

這裡我們將使用「角頻率版的」 Fourier transform 。

「濾波」

如果 $g(t)$ 經過 Fourier transform 後要「濾波」(只容許頻率 ω 從 ω_1 到 ω_2 的範圍), 即:

$$g(t) \xrightarrow{\text{Fourier transform}} \hat{g}(\omega) \xrightarrow{\text{filter}} \hat{g}(\omega) \cdot [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)],$$

令 $\chi(t)$ 使得

$$[g(t) * \chi(t)]^{\wedge}(\omega) = \hat{g}(\omega) \cdot [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)]$$

即 $\chi(t)$ 是 $u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)$ 的 inverse Fourier transform

$$\begin{aligned} \chi(t) = \mathcal{F}^{-1}[u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{1}{t} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) \cdot [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \cdot [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g(t) \cdot [u_s(\omega - \omega_1) - u_s(\omega - \omega_2)] \right\} e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

所以, 所謂的「濾波」, 就相當於 接收訊息 $g(t)$ 與 $\chi(t)$ 做了 convolution: $g(t)*\chi(t)$, 而 $\chi(t)$ 的 Fourier transform $\hat{\chi}(\omega)$ 就是用來「濾波」的。

回過頭來看, X-ray case 的接收訊息 $d(\theta, s)$ 為

$$d(\theta, s) = (Rf(\theta, \cdot) * \chi_{\Delta s})(s), \text{ 其中 } \chi_{\Delta s} := \begin{cases} 1 & \text{訊號抵達偵測器} \\ 0 & \text{訊號偏離偵測器} \end{cases}, \quad (3)$$

Radar case 的接收訊息 $\eta(\theta, s)$ 為

$$\begin{aligned}\eta(\theta, t) &= \int f(x) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t(t-\theta \cdot x)} d\omega dx \\ &= \int f(x) \int \delta(s - \theta \cdot x) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t(t-\theta \cdot x)} d\omega ds dx \\ &= \int (Rf)(\theta, s) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega(t-s)} d\omega ds \\ &= ((Rf)(\theta, \cdot) * \chi)(t)\end{aligned}$$

$$\eta(\theta, s) = (Rf(\theta, \cdot) * \chi)(s), \text{ 其中 } \chi := \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t}, \quad (4)$$

兩種 case 的接收訊息 皆是 $d(\theta, \cdot) = Rf(\theta, \cdot) * \chi$ 的形式, 只是各自有不同的頻寬函數 χ 。X-ray case 的 χ 頻寬是 $[0, b)$, radar case 的 χ 頻寬是 ω_1 至 ω_2 (以 $\omega_c := (\omega_1 + \omega_2)/2$ 為中心頻率)。我們可視 x-ray case 為 $\omega_1 = 0, \omega_2 = b$ 。事實上, 兩種 case 都有所謂的孔徑 (角度) 範圍。所以我們將上述的接收訊息乘上一個 限制角度的 step function

$$\chi_{\Phi}(\theta(\phi)) := \begin{cases} 1 & \text{若 } |\phi| \leq \Phi \\ 0 & \text{若 } \phi \text{ 超出範圍} \end{cases}, \quad (5)$$

接收訊息 $d(\theta, \cdot)$ 改成

$$D(\theta, s) = \chi_{\Phi}(\theta) ((Rf)(\theta, \cdot) * \chi)(s) \quad (6)$$

根據 Fourier 投影切片定理 (*projection-slice theorem*), $\widehat{Rf}(\theta, \omega) = \hat{f}(\omega\theta)$, 接收訊息 D 的 Fourier transform 爲

$$\begin{aligned}\hat{D}(\theta, \omega) &= \chi_{\Phi}(\theta) \widehat{Rf}(\theta, \omega) \hat{\chi}(\omega) \\ &= \underbrace{\chi_{\Phi}(\theta) \hat{\chi}(\omega)}_{\hat{K}(\omega, \theta)} \hat{f}(\omega\theta).\end{aligned}$$

令 $x = r(\cos \psi, \sin \psi)$, $\xi = \omega\theta = \omega(\cos \phi, \sin \phi)$, 則 $\hat{K}(\omega, \theta)$ 的 inverse Fourier transform $K(x)$ 可寫成

$$\begin{aligned}K(r, \psi) = K(x) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{K}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \iint_{\substack{\omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ \phi \in [-\Phi, \Phi]}} \hat{K}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i(r \cos \psi \omega \cos \phi + r \sin \psi \omega \sin \phi)} \omega d\phi d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i\omega r \cos(\phi - \psi)} \omega d\phi d\omega\end{aligned}\quad (7)$$

我們稱這個 $K(r, \psi)$ 爲 *point spread function* (PSF)。我們先對頻寬函數 χ 做計算:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega r} d\omega &= \frac{i}{r} (e^{i\omega_1 r} - e^{i\omega_2 r}) \\ &= \frac{i}{r} (e^{ir\omega_c - \frac{b}{2}} - e^{ir\omega_c + \frac{b}{2}}) \\ &= \frac{i}{r} e^{i\omega_c r} \left(\frac{e^{-i\frac{b}{2}} - e^{i\frac{b}{2}}}{2i} 2i \right) \\ &= b e^{i\omega_c r} \left(\frac{\sin(\frac{b}{2}r)}{(\frac{b}{2}r)} \right) = b e^{i\omega_c r} \text{sinc}(\frac{b}{2}r)\end{aligned}\quad (8)$$

在 radar case 裡有兩個術語: down-range 對應 $\psi = 0$, cross-range 對應 $\psi = \pi/2$ 的問題。

當 $\psi = 0$, 角度 ϕ 很小時, $\cos(\phi - \psi) \approx 1$, 由 (7) 估計 down-range 的 PSF 為

$$\begin{aligned}
 K(r, 0) &\approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i\omega r} d\phi d\omega \\
 &= 2\Phi \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega e^{i\omega r} d\omega \\
 &= \frac{2\Phi}{i} \frac{d}{dr} \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega r} d\omega \right] \\
 &= \frac{2b\Phi}{i} \frac{d}{dr} \left[e^{i\omega_c r} \text{sinc}\left(\frac{b}{2}r\right) \right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

在 x-ray case 的 $\omega_c = b/2$, 所以 $\text{Re } K(r, 0)$ 為

$$\begin{aligned}
 \text{Re } K(r, 0) &\approx 2b\Phi \frac{d}{dr} \left[\text{sinc}\left(\frac{b}{2}r\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{2}r\right) \right] \\
 &= b\Phi \frac{d}{dr} \left[\frac{1 - \cos br}{\frac{b}{2}r} \right] \\
 &= 2b^2\Phi \left(\text{sinc}(br) - \frac{1}{2} \left(\text{sinc}\left(\frac{b}{2}r\right) \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

在 radar case 裡, $\omega_c \gg b$, 所以 (9) 的 PSF

$$K(r, 0) \approx b\omega_c \Phi e^{i\omega_c r} \text{sinc}\left(\frac{b}{2}r\right) \tag{11}$$

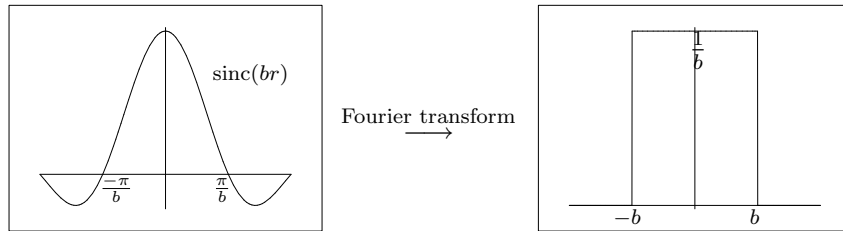


Figure 1: Fourier transform of $\text{sinc}(br)$

如 Figure 1 可知 $\text{sinc}(br)$ 函數的主要部分是在 $[-2\pi/b, 2\pi/b]$, 於是乎 x-ray 的 down-range resolution 是 $2\pi/b$, 而 radar 的 down-range resolution 是 $4\pi/b$.

當 $\psi = \pi/2$, 角度 ϕ 很小時, $\cos(\phi - \psi) = \sin \phi, \approx \phi$, 由 (7) 估計 cross-range

的 PSF 為

$$\begin{aligned}
K(r, \pi/2) &\approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i\omega r \Phi} d\phi d\omega \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \frac{e^{i\omega r \Phi} - e^{-i\omega r \Phi}}{i\omega r} d\omega \\
&= \frac{1}{2ri} \left(e^{i\omega_c r \Phi} b \operatorname{sinc}\left(\frac{b\Phi}{2} r\right) - e^{-i\omega_c r \Phi} b \operatorname{sinc}\left(\frac{b\Phi}{2} r\right) \right) \\
&= b\omega_c \Phi \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{2} r\right) \operatorname{sinc}(\omega_c \Phi r)
\end{aligned} \tag{12}$$

在 radar case 裡, $\omega_c \gg b$, 所以 (12) 的 PSF 為 $K(r, \pi/2) \approx b\omega_c \Phi \operatorname{sinc}(\omega_c \Phi r)$, 在 x-ray case 裡 $\omega_c = b/2$, 所以 (12) 的 PSF 為 $K(r, \pi/2) \approx b^2 \Phi (\operatorname{sinc}(\frac{\omega_c \Phi}{2} r))^2$, 如 Figure 1, radar 的 cross-range resolution 是 $2\pi/(\omega_c \Phi)$, 而 x-ray 的 cross-range resolution 是 $4\pi/(b\Phi)$ 。

計算 PSF 的 covariance

令 $K(r, \psi)$ 為某 PSF, σ 為 K 的 covariance 矩陣,

$$\begin{aligned}
m &:= \iint K dx dy, \\
m_x &:= \frac{\iint xK dx dy}{m}, \\
m_y &:= \frac{\iint yK dx dy}{m}, \\
\sigma &:= \begin{bmatrix} \frac{\iint (x - m_x)^2 K dx dy}{m} & \frac{\iint (x - m_x)(y - m_y) K dx dy}{m} \\ \frac{\iint (x - m_x)(y - m_y) K dx dy}{m} & \frac{\iint (y - m_y)^2 K dx dy}{m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

我們至少必須先知道 $m = \iint K dx dy$ 是否可積、如何計算, 才進一步估計 $\iint xK dx dy$ 、 $\iint yK dx dy$ 、 $\iint xyK dx dy$ 、 $\iint x^2 K dx dy$ 、 $\iint y^2 K dx dy$ 。

首先, 我們取 (7) PSF 的實部:

$$K(r, \psi) = \int_{-\Phi}^{\Phi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cos(\omega r \cos(\phi - \psi)) d\omega d\phi \tag{13}$$

爲了減省符號, 令 $g(\phi, \psi) := \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cos(\omega r \cos(\phi - \psi)) d\omega$ 且 令 $y = \phi - \psi$,
 $J(\phi, y) := g(\phi, \phi - y) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cos(\omega r \cos(y)) d\omega$, 並改變積分順序, 便可將

$$\iint_{\mathbb{R}^2} K = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty K(r, \psi) r dr d\psi = \int_0^\infty r \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \int_{-\Phi}^\Phi g(\phi, \psi) d\phi d\psi \right)}_{A(r)} dr$$

括號裡的重積分 $A(r)$ 分成三個部分:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-\Phi}^\Phi g(\phi, \psi) d\phi d\psi &= \int_{-\Phi}^\Phi \int_0^{2\pi} g(\phi, \psi) d\psi d\phi = \int_{-\Phi}^\Phi \int_{\phi-2\pi}^\phi J dy d\phi \\ &= \int_{-\Phi-2\pi}^{\Phi-2\pi} \int_{-\Phi}^{y+2\pi} J d\phi dy + \int_{\Phi-2\pi}^{-\Phi} \int_{-\Phi}^\Phi J d\phi dy + \int_{-\Phi}^\Phi \int_y^\Phi J d\phi dy \end{aligned}$$

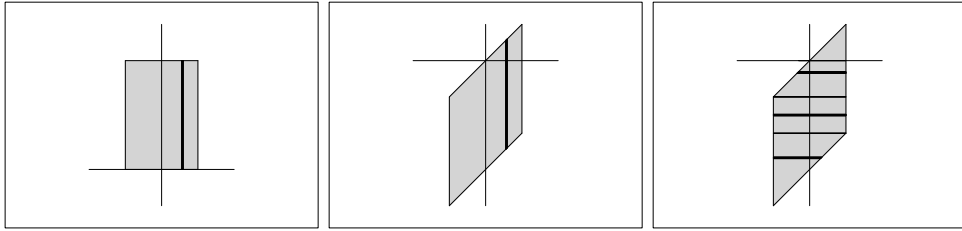


Figure 2: 變數變換並改變積分順序

令 $J_c := J|_{c := \cos y} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cos(\omega r c) d\omega$ 簡化 $A(r)$ 式子。由於 $\cos y$ 在 $y \in [\phi - 2\pi, \phi]$ 不是單調的, 於是我們再將 c 分做三段處理:

$$\begin{aligned} \text{當 } -\Phi \leq \phi \leq 0: \int_{\phi-2\pi}^\phi J dy &= \left[\int_{\cos(\phi-2\pi)}^{\cos(-2\pi)} - \int_{\cos(-2\pi)}^{\cos(-\pi)} + \int_{\cos(-\pi)}^{\cos(\phi)} \right] J_c dc \\ &= \left[\int_{\cos \phi}^1 - \int_1^{-1} + \int_{-1}^{\cos \phi} \right] J_c dc = 8 \frac{(\cos(\frac{\omega_1 r}{2}))^2 - (\cos(\frac{\omega_2 r}{2}))^2}{r^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{當 } 0 \leq \phi \leq \Phi: \int_{\phi-2\pi}^\phi J dy &= \left[- \int_{\cos(\phi-2\pi)}^{\cos(-\pi)} + \int_{\cos(-\pi)}^{\cos(0)} - \int_{\cos(0)}^{\cos(\phi)} \right] J_c dc \\ &= \left[- \int_{\cos \phi}^{-1} + \int_{-1}^1 - \int_1^{\cos \phi} \right] J_c dc = 8 \frac{(\cos(\frac{\omega_1 r}{2}))^2 - (\cos(\frac{\omega_2 r}{2}))^2}{r^2}, \text{ 和上式一樣。} \end{aligned}$$