行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

Opial 不等式的推廣
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 96-2115-M-032-002-
執 行 期 間 ：96 年 08 月 01 日至 97 年 07 月 31 日
執 行 單 位 ：淡江大學數學系

計 畫 主 持 人 ：楊國勝

計畫參與人員： 碩士班研究生-兼任助理人員：蔡宗儒

處 理 方 式 ：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 98 年 05 月 06 日

一、中文摘要

本研究計劃中, 我們建立了下列的不等式: 設 $m>0$, $n>0$, p, q 在 $[a,b]$ 中爲正的連續的函數, 且 q 爲遞減的, 若 y 在 $[a,b]$ 中爲絕對連續且 $y(a)=0$, 則

(i) $2\int_a^b q^{2m}(x)|y(x)||y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{-n}(x)dx\right)\left(\int_a^b p^n(x)q^{2m}(x)|y'(x)|^2dx\right)$, 且

(ii) $2\int_a^b q^{m(n+1)}(x)|y(x)|^n|y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{\frac{-n-1}{2}}(x)dx\right)^n\left(\int_a^b p^{\frac{n(n+1)}{2}}(x)q^{m(n+1)}(x)|y'(x)|^{n+1}dx\right)$.

關鍵詞: Opial 不等式, Hölder 不等式。

Abstract

We have established in this project the following inequalities: Let $m>0$, $n>0$ and p,q are positive continuous with q non-increasing on $[a,b]$, and let y be absolutely continuous with $y(a)=0$. Then

(i) $2\int_a^b q^{2m}(x)|y(x)||y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{-n}(x)dx\right)\left(\int_a^b p^n(x)q^{2m}(x)|y'(x)|^2dx\right)$, and

(ii) $2\int_a^b q^{m(n+1)}(x)|y(x)|^n|y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{\frac{-n-1}{2}}(x)dx\right)^n\left(\int_a^b p^{\frac{n(n+1)}{2}}(x)q^{m(n+1)}(x)|y'(x)|^{n+1}dx\right)$.

Key words: Opial inequality, Hölder inequality.

二、計劃緣由與目的

若 $y(t)$ 在 $[0,h]$ 中爲連續可微且 $y(0)=0$, 則

$$\int_0^h |y(t)y'(t)|dt \le \frac{h}{2}\int_0^h |y'(t)|^2 dt \tag{1}$$

稱之爲 Opial 不等式。在 1960 年 Opial ([2]) 證明不等式 (1) 之後有種種不同的證法陸陸續續地發表出來, 而且種種不同的推廣也被建立起來, 在諸多證法中以 Mallows ([1]) 的證法最爲有趣。本人曾利用他的做法做出如下的結果 ([3]): 若 p, q 在 $[a,b]$ 中爲正的且連續的函數, 其中 q 爲非遞增的, 若 y 在 $[a,b]$ 中爲絕對連續且 $y(a)=0$, 則下列不等式成立

$$2\int_a^b q(x)|y(x)||y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{-1}(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)q(x)y'^2(x)dx\right) \tag{2}$$

上式中取 $q(x)=p(x)=1$, $a=0$, $b=h$, 則 (2) 式變成 (1) 式, 本研究目的在推廣不等式 (2)。

三、研究成果

我們將不等式 (2) 推廣如下: 設 $m>0$, $n>0$, p, q 在 $[a,b]$ 中爲正的連續函數, 且 q 爲非遞增的, 若 y 在 $[a,b]$ 中爲絕對連續且 $y(a)=0$, 則下列不等式成立

$$2\int_a^b q^{2m}(x)|y(x)y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{-n}(x)dx\right)\left(\int_a^b p^n(x)q^{2m}(x)|y'(x)|^2dx\right) \tag{3}$$

且

$$2\int_a^b q^{m(n+1)}(x)|y(x)|^n|y'(x)|dx \le \left(\int_a^b p^{\frac{-n-1}{2}}(x)dx\right)^n\left(\int_a^b p^{\frac{n(n+1)}{2}}(x)q^{m(n+1)}(x)|y'(x)|^{n+1}dx\right) \tag{4}$$

註: 在不等式 (3) 中取 $m=\frac{1}{2}$, $n=1$, 則 (3) 變成 (2)。

另外在不等式 (4) 中取 $m=\frac{1}{2}$, $n=1$, 則 (4) 也變成 (2)。

四、參考文獻

[1] Mallows, C.L., *An even simpler proof of Opial's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 173.

[2] Opial, Z., *Sur une inequalite*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), 29–32.

[3] Yang, G.S., *On a certain result of Z. Opial*, Proc. Japan Acad. 42 (1966), 78–83.