行政院國家科學委員會專題研究計畫　期中進度報告

圖的分割與組合設計之研究(2/3)

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2115-M-032-002-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：高金美

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 5 月 19 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫期中報告

計畫名稱：完全多分圖的分割,覆蓋及裝填性的研究

計畫編號: NSC 93-2115-M-032-002

執行期限: 93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

主持人: 高金美

E-mail: cmfu@mail.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱: 淡江大學數學系

點著色之臨界圖

一、中文摘要

假設圖 G 的著色數為 k, 即 $\chi(G) = k$, 如果對於 G 中任一點 v 使得 $\chi(G \setminus v) < k$，則稱 G 為一個 k-臨界圖。在[5-7]中獲得一些 k-臨界圖的建構法。Dirac 在 1970 年猜測[3]，當 k≧4 時，存在一個 k-臨界圖它沒有臨界邊。Brown 找到一個 5-臨界圖它沒有臨界邊的圖 [1]。Eröds 也猜測 [3]當 r≧3 時，存在一個 r-正則圖是 4-臨界圖。但是，當 r≧6 時，找不到這樣的圖。不過，Pyatkin 找到了一個 6-正則圖是 4-臨界圖的圖 [4]。

在這篇論文中，我們利用 7 個點的 4-臨界圖建構了一些 4-臨界圖。同時得到了一個 2k-正則循環圖為臨界圖的充份條件。

關鍵詞:著色數， k-臨界圖， 臨界邊，正則圖，正則循環圖。

二、英文摘要

Let G be a graph and $\chi(G) = k$，if for every vertex v of G, such that $\chi(G \setminus v) < k$，then we call G is a k-critical graph.In [5-7] they have already got some constructions of k-critical graph. In 1970, Dirac conjectured that [3]when k≧4, there exist a k-critical graphwhich has no critical edge. Brown found a 5-critical graph which has no critical edge [1]. Eröds conjectured that [3] when r≧3, there exists a r-regular graph which is 4-critical . But, when r≧6, it doesn’t exist. Pyatkin found a 6-critical graph which is 4-critical [4].

In this paper, we investigate all 4-critical graphs with 7 vertices. We find the sufficient condition of the existence of 2k-circulant graphs which are critical.

Keywords: chromatic number. k-critical, critical edge, regular graph, circulant graph。

假如一個圖 G 的著色數 $\chi(G) = k$ 且對於圖 G 中的任意點 v，若$\chi(G \setminus v) < k$，則稱圖 G 為一個 k-臨界圖 (k-critical graph)。

由定義我們可以得到臨界圖的性質。

性質：

(1) 如果圖 G 是一個 k-臨界圖，則對於圖 G 中任意點 v 使得
$$\chi(G \setminus v) = k - 1。$$

(2) K_2 是唯一 2-臨界圖。

(3) C_{2n+1} 是 3-臨界圖。

(4) C_{2n} 不是 2-臨界圖。

(5) K_n 是 n-臨界圖。

(6) 若 G 是臨界圖，則 G 是 2-連通圖。

定理 1：令 $G = (V, E)$，其中 $V = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1}, b_1, b_2, \cdots, b_{2k+1}, v\}$，$E = \{\{v, a_i\} \mid i = 1, 2, \cdots, 2k+1\} \cup \{a_ib_i, b_ia_{i+1} \mid i = 1, 2, \cdots, 2k\} \cup \{a_{2k+1}b_{2k+1}, b_{2k+1}a_1\} \cup \{\{b_i, b_{i+1}\} \mid i = 1, 2, \cdots, 2k\} \cup \{b_1, b_{2k+1}\}$， 則 G 是一個 4-臨界圖。

定理 2：令 $G = (V, E)$，其中 $V=V(C_{2k+1}) \cup \{a, b\}$，$E = \{\{a, v_i\}, \{b, v_j\} \mid v_i \in V(P_{2s}), v_j \in V(P_{2t-1}), i = 1, 2, \cdots, 2s, j = 2s, 2s+1, \cdots, 2s+2t-3, 1$ 且 $s, t \geqq 2\}$，則 G 是一個 4-臨界圖。

引理 3：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$

(1) 若$(k+1) \mid n$ 時，則 $\chi(G_{n,k}) = k+1$。

(2) 若$(k+1) \nmid n$ 時，則 $\chi(G_{n,k}) = k+2$。

引理 4：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，若$(k+1) \mid n$ 時，則 $G_{n,k}$ 不是$(k+1)$-臨界圖。

引理 4.4：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，若 $n \equiv 1 \pmod{k+1}$時，則 $G_{n,k}$ 是$(k+2)$-臨界圖。

引理 5：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，若$(k+1) \nmid n$ 且 $n \not\equiv 1 \pmod{k+1}$ 時，則 $G_{n,k}$ 不是$(k+2)$-臨界圖。

定理 6：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，$G_{n,k}$ 是$(k+2)$-臨界圖 $\Leftrightarrow$ $n \equiv 1 \pmod{k+1}$。

引理 7：設 k 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，當 $D = \{a, 2a, 3a, \cdots, ka\} \pmod n$ 時，若 $\gcd(n, a) = 1$，則 $C(n, D) \cong G_{n,k}$。

定理 8：

設 k, a, n 為正整數且 $n \geqq k(k+1)$，令 $D = \{a, 2a, 3a, \cdots, ka\} \pmod n$時，若 $n \equiv 1 \pmod{k+1}$且 $\gcd(n, a) = 1$，則 $C(n, D)$是$(k+2)$-臨界圖。

定理 4.9：當 $\gcd(n, a) = 1$ 且 $D_2 = aD_1$ 時，若 $C(n, D_1)$為臨界圖，則 $C(n, D_2)$為臨界圖。

Reference.

[1] Jason I. Brown, A vertex critical graph without critical edges, Discrete

Mathematics 102 (1992), 99-101.

[2] John Clark and Derek Allan Holton,
A First Look at Graph Theory,
World Scientific, 1991.

[3] P. Erӧds, On some aspects of my work with Gabriel Dirac, in: Graph Theory in Memory of G.A. Dirac, Ann. Discrete Math. 41 (North-Holland, Amsterdam, 1989), 111-116.

[4] A. V. Pyatkin, 6-regular 4-critical graph, J. Graph Theory 41 (2002), no. 4, 286-291.

[5] B. Toft, Some Contributions to the Theory of Colour-critical Graphs, Various Publ. Ser., Vol. 14 (1970).

[6] B. Toft, Color-critical graphs and hypergraphs, J. Combin Theory Ser. B 16, (1974), 145-161.

[7] B. Toft, On critical subgraphs of colour-critical graphs, Discrete Math. 7 (1974), 377-392.

[8] Douglas B.WEST, *Introduction To Graph Theory*, Second Edition, Prentice-Hall, 2001.

[9] Robin J. Wilson and John J. Watkins, *Graphs: An Introductory Approach*, John Wiley and Sons, 1990.