行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

加權梯形不等式及其應用

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2115-M-032-012-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：楊國勝

計畫參與人員：國科會助理　吳銘進

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 7 月 12 日

一、中文摘要

本研究計劃中, 我們建立了下列的定理:

若 $g:[a,b]\to R$ 爲非負且連續的函數: $h:[a,b]\to R$ 爲可微分且 $h'(t)=g(t)$, $\forall t\in[a,b]$, 設 $f:[a,b]\to R$ 爲有界變分函數則

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)g(t)dt-[(x-h(a))f(a)+(h(b)-x)f(b)]\right|\\ \le\ &\left[\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt+\left(x-\frac{h(a)+h(b)}{2}\right)\right]\bigvee_a^b(f)\end{aligned}$$

$\forall x\in[h(a),h(b)]$, 其中 $\bigvee_a^b(f)$ 爲 f 在 $[a,b]$ 的全變分, 而且 $\frac{1}{2}$ 爲最佳常數。

於上述的定理中取 $g(t)=1$, $h(t)=t\ \forall t\in[a,b]$, 則可導出 Cerone-Dragomir-pearcel [1] 的結果。另外我們利用所建立的定理於 r-力矩的問題上, 同時也應用到期望值及 Beta 函數上。

關鍵詞: 加權梯形不等式, 有界變分, r-力矩, 期望值, Beta 函數。

Abstract.

We have established in this project the following theorem:

If $g:[a,b]\to R$ is nonnegative and continuous and $h:[a,b]\to R$ is differentiable such that $h'(t)=g(t)$ on $[a,b]$, if $f:[a,b]\to R$ is of bounded variation, then

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)g(t)dt-[(x-h(a))f(a)+(h(b)-x)f(b)]\right|\\ \le\ &\left[\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt+\left(x-\frac{h(a)+h(b)}{2}\right)\right]\bigvee_a^b(f)\end{aligned}$$

$\forall x\in[h(a),h(b)]$, where $\bigvee_a^b(f)$ denotes the total variation of f on $[a,b]$ and the constant $\frac{1}{2}$ is the best possible, we have applied this theorem to some problems on r-moment, the expectation of a continuous random variable and the Beta function.

二、計劃緣由與目的

若 f 在 (a,b) 中之二階導數存在, 且爲有界, 則

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty,$$

此處 $\|f''\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)}|f''(x)|$, 此不等式稱爲梯形不等式, 可以用來估計定積分的近似值的誤差。最近 Cerone, Dragomir 及 Pearce 等人建立了下的不等式: 若 f 在 $[a,b]$ 中爲有界變分函數, 則對所有 $x\in[a,b]$, 下列的不等式成立

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)dx - [(x-a)f(a)+(b-x)f(b)]\right|\\ \le\ &\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]\bigvee_a^b(f)\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}$ 爲最佳常數。

本研究的目的在推廣上述的不等式。

三、研究成果

我們建立了下列的定理:

若 $g:[a,b]\to R$ 爲非負且連續的函數, $h:[a,b]\to r$ 爲可微分且 $h'(t)=g(t)\ \forall t\in[a,b]$, 設 $f:[a,b]\to R$ 爲有界變分函數, 則對所有 $x\in[a,b]$

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)g(t)dt - [(x-h(a))f(a)+(h(b)-x)f(b)]\right|\\ \le\ &\left[\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt+\left(x-\frac{h(a)+h(b)}{2}\right)\right]\bigvee_a^b(f)\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}$ 爲最佳常數。

於上述定理中, 取 $g(t)=1$, $h(t)=t$, $\forall t\in[a,b]$, 則得 Cerone, Dragomir 及 Pearce 等人所做的結果。此定理尚可應用於 r-力矩, 期望值及 Beta 函數的問題。

四、參考文獻

[1] P. Cerone, S.S. Dragomir and C.E. Pearce, Generalizations of the frapezoidal inequality for mappings of bounded variation and applications, Turkish Journal of Mathematics, 24(2) (2000), 147–163.

[2] S.S. Dragomir, On the trapezoid formula for mappings of bounded sariation and applications, Kragujerac J. Math., 23 (2001), 25–36.

[3] S.S. Dragomir, P. Cerone and A. Sofo, Some remarks ont he trapezoid rule in numerical integration, Indian J. Pure and Appl. Math., 31(5) (2000), 475–494.