

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

高維度多面體分割及體積之計算

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2115-M-032-006-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：淡江大學數學系數學組

計畫主持人：吳孟年

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 12 月 5 日

主題：高維度凸多面體之單體剖分及體積

計畫編號：NSC 93-2115-M-032-006

問題：給定 \mathbb{R}^n 維空間的點集，計算其凸包的 n 維體積

做法綱要：

- 一，將內點去除留下頂點，
- 二，將所有點 shuffle 後，找出一組 affinely independent set 作為第一個 cell，
- 三，開始將剩餘的頂點一一加入計算：
 - 現有點集 S ，將加入的點 a 提起 (提至第 $n + 1$ 維)，以我們的 “one-point-test” 決定 哪些點和 a 會構成 $S \cup \{a\}$ convex hull 的 lower facets (哪些是從 a 看得到的點)，
 - 從 one-point-test 裡頭 取一個基 (線性規劃的基) 做為 new cell, 順便將所有方向翻過一遍: 從之前得到的 cell 繼續向外擴充而得到新的 cell, 並且記錄下來。

我們發現，即使是 9 維空間的單位方塊 (由單位正交基所構成之平行多面體)，其隨機之單體剖分 (simplicial subdivision) 的 simplices 數，一般來說，可高達 36 萬之多。所以我們更需要注意：

- 一，如何有效地窮舉出所有剖分而不會造成循環，並且容易搜尋、不花時間在判別上。於是我們將所有 vertices 賦予一隨機數 (point ID)，在每次得到一個新的 cell 時，立即賦予一個 cell ID (point ID's 的某固定組合) 以做為 判斷新得到的 cell 是否與現存有的 cell 相同 的第一篩選條件。
- 二，其次，由於 cell 的數目不斷增長，若預設儲存空間，終將不敷使用。如果採用 C++ 中既有的 vector class，雖然可以用 index 或 iterator，但現有空間不足時，vector 會自動依某比例增長，而所謂的自動增長，實際上卻是施行 new、hard copy、delete 的結果，而使用空間以指數增大，非常耗時。於是我們採取簡單的 linked list，在每次翻完一個 cell 時，決定是否增加 或從新分配指針。