行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

對稱性之無母數檢定

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC92-2118-M-032-006-
執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：鄭惟厚

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93 年 8 月 19 日

附件一

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 □成果報告 □期中進度報告

對稱性之無母數檢定

計畫類別：□ 個別型計畫　　□ 整合型計畫
計畫編號：NSC　92－2118－M－032－006－
執行期間：　　92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

計畫主持人：鄭惟厚
共同主持人：
計畫參與人員：　高春元、鄒瑞穎

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：□精簡報告　□完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

執行單位：淡江大學

中　華　民　國　　93 年　　8 月　　19 日

NSC 92-2118-M-032-006 成果報告

中英文摘要及關鍵詞

中文摘要

針對對稱性問題的討論，在無母數的統計方法中，最著名的就是符號檢定 (Sign test, Hettmansperger,1984)和 Wilcoxon signed rank test (Wilcoxon,1945)，然而近年來也有許多學者對於對稱性檢定的問題提出了不同的方法，例如 Thomas P. McWilliams (1990) 所提出的檢定統計量 R^*。Modarres and Gastwirth (1996) 對 McWilliams 的方法做出了修正，所提出的檢定統計量 Mp。還有李俊達和鄭惟厚 (1999) 也以 Mp 統計量為基礎，提出的檢定統計量 C_k 。

然而，以上這些檢定分布是否對稱的方法中，都是考慮在分布中心已知的情況，因此本篇論文主要目的為考慮用樣本中位數來估計未知的中心，然後用和 C_k 同樣的概念定義一個統計量 C_k^*來檢定對稱性，並且推導出一些相關的性質和定理。

我們使用蒙地卡羅模擬，在分布對稱的假設下，以推廣的 λ 族中的對稱分布來模擬出統計量的分布，在顯著水準 0.05 下找尋適當的棄卻域臨界點。根據模擬的結果，我們建議取 k=6，也就是統計量 C_6^*時的檢定力較好，然而，C_6^*的檢定力與之前中心已知時的統計量 C_6 的檢定力有些微的差異，但差異並不大，所以 C_6^*可說是不錯的檢定方法。

關鍵詞：對稱性、檢定、未知對稱中心

英文摘要

Two of the most popular nonparametric methods for testing symmetry are the sign test (Hettmansperger,1984) and Wilcoxon signed rank test (Wilcoxon,1945). Recently, many scholars have proposed new tests for this problem. For example, McWilliams (1990) presented a test statistic R* based on a run statistic. Modarres and Gastwirth (1996) presented a test statistic M_p by using Wilcoxon scores to weight the runs. Chun-ta Li and Wei-hou Cheng (1999) presented a new test statistic C_k which is very easy to apply.

Most of these papers focused on the case of a known center. In this paper, we consider the situation when the center is unknown. The basic idea is to estimate the center by using sample median, and construct a test statistic like the test statistic C_k .

We first use Monte Carlo simulation to find the critical point. After some comparisons of power, we found k=6 to be a good choice. Then we compare the power of our test statistic C_6^* with the test statistic C_6 using distributions belonging to the generalized lambda family. We found that our test statistic C_6^* performs reasonably well.

Key words：symmetry, test, unknown center

1 研究目的

針對對稱性問題的討論，在無母數的統計方法中，最著名的就是符號檢定 (Sign test, Hettmansperger,1984) 和 Wilcoxon signed rank test (Wilcoxon,1945), 然而近年來也有許多學者對於對稱性檢定的問題提出了不同的方法，例如 Thomas P. McWilliams (1990) 所提出的檢定統計量 R^* 。Modarres and Gastwirth (1996) 對 McWilliams 的方法做出了修正, 所提出的檢定統計量 M_p 。還有李俊達和鄭惟厚 (1999) 也參考 M_p 統計量, 而提出檢定統計量 C_k 。

以上這些檢定分布是否對稱的方法中, 都是考慮在分布中心已知的情況, 因此本篇論文主要目的爲考慮用樣本中位數來估計未知的中心, 然後用和 C_k 同樣的概念定義一個統計量 C_k^* 來檢定對稱性, 並且推導出一些相關的性質和定理 (見附錄 A，證明省略)。

2 文獻探討

2.1 Thomas P. McWilliams 在1990年所提出的連串檢定

McWilliams 所提出的檢定統計量 R^* 是以連串統計量爲基石所找到的一種簡單的檢定方法。假設 $X_1, \ldots, X_n$ 是從連續可微且中位數已知的分布函數 F 中所取出的一組隨機樣本，其原始假設 H_0 及對立假設 H_1 分別爲

$$\begin{aligned} H_0 &: F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x) \quad \forall x \\ H_1 &: \exists x \ \ni \ F(\mu - x) \neq 1 - F(\mu + x), \end{aligned}$$

當考慮中位數 μ 已知的情況，在不失一般性的情形下, 假設 $\mu = 0$ 。先將 $X_1, \ldots, X_n$ 取絕對值，再依照絕對值的大小由小至大排序且保留其原本的正負符號，再分別定義爲

$Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}$, 令指標函數 S_i 爲 Y_i 的符號 , $i=1,\ldots,n$, 表示成

$$S_i=\begin{cases} 1 & ,\text{假如 } Y_{(i)}>0 \text{ ;} \\ 0 & ,\text{其他.} \end{cases}$$

則定義出檢定統計量

$$R^*=1\,+\,I_2+I_3+\cdots+I_n$$

其中

$$I_k=\begin{cases} 0 & ,\text{假如 } S_{(k)}=S_{(k-1)} \text{ ;} \\ 1 & ,\text{假如 } S_{(k)}\neq S_{(k-1)}. \end{cases}$$

此爲 $S_1,\ldots S_n$ 的序列的連串個數。當 R^* 的值太小時, 就否定 F 是對稱分布的原始假設。

2.2 Modarres 及 Gastwirth 在1996年所提出的修正式連串檢定統計量

Modarres 及 Gastwirth 定義出的檢定統計量是對 McWilliams 所提出的統計量 R^* 做了修正, 同樣是在假設對稱中心已知的情況下, 針對連串做了加權且將靠近對稱中心附近的樣本點做了某種比例的刪除, 定義出統計量

$$M_p=\sum_{k=np+2}^{n}\phi(k)\cdot I_k$$

其中

$$\phi(k)=\begin{cases} k-np & ,\text{假如 } k>np \text{ ;} \\ 0 & ,\text{其他.} \end{cases}$$

當 M_p 的值太小時, 否定對稱分布的假設。

2.3 李俊達和鄭惟厚在1999年所提出的簡易對稱檢定

李俊達和鄭惟厚以 M_p 統計量的觀點爲基礎, 發現其統計量的檢定力會隨著 p 值的增加而有緩慢增加的趨勢, 所以考慮只保留距離 0 較遠的幾個樣本點, 來判斷分布是否爲對稱的, 因此提出了一種檢定分布是否對稱的簡易檢定方法。

同樣考慮對稱中心 μ 已知的情況, 在不失一般性的情形下, 假設 $\mu = 0$, 定義出檢定統計量

$$C_k = S_{n-k+1} + S_{n-k+2} + \cdots + S_n$$

此爲 $S_1, \ldots, S_n$ 的序列中最後 k 項的和。此統計量相當於一種加權的符號檢定 (weighted sign test), 對於離對稱中心較近的點給予權數 0 。當 C_k 值太大或太小時, 拒絕 H_0 的原始假設。

在透過蒙地卡羅模擬 (Monte Carlo Simulation) 的比較後, 他們建議取絕對值最大的6個觀測值, 即 $k = 6$ 時, 所得到的檢定力 (power) 較好。最後他們也利用蒙地卡羅模擬來和統計量 M_p 比較, 模擬的結果發現統計量 C_6 除了在樣本大小爲20之外, 檢定力均比 M_p 來得好。

3 研究方法與結果

關於以上這些針對對稱性問題的討論, 都是假設在對稱中心已知的時候, 但在實際的情況下所遇到的問題經常是在對稱中心未知的情形, 所以我們現在以李俊達和鄭惟厚在1999年所提出的統計量 C_k 爲基礎, 考慮當在對稱中心未知的時候, 用和統計量 C_k 相同的概念定義一個新的統計量, 看看結果會如何。

假設 $X_1,\ldots,X_n$ 是來自同一分布 F 的一組獨立隨機樣本, 我們的原始假設 H_0 及對立假設 H_1 分別爲

$$\begin{aligned} H_0 &: F(\mu-x)=1-F(\mu+x) \quad \forall x \\ H_1 &: \exists x \ni F(\mu-x)\neq 1-F(\mu+x), \end{aligned}$$

令 M 代表樣本中位數, 即 $M=median(X_1,\ldots,X_n)$, 因爲 μ 未知, 所以我們用樣本中位數 M 來估計 μ 。我們先將 X_i-M 取絕對值, 再依照絕對值的大小由小至大排序且保留原本 X_i-M 的正負符號, 再分別定義爲 $Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}$, 令 $S_1,\ldots,S_n$ 爲指標函數, 表示成

$$S_i=\begin{cases} 1 & ,\text{假如 } Y_{(i)}>0; \\ 0 & ,\text{其他}. \end{cases}$$

則定義新的檢定統計量爲

$$C_k^*=S_{n-k+1}+S_{n-k+2}+\cdots+S_n$$

此爲 $S_1,\ldots,S_n$ 的序列中最後 k 項的和。這個檢定統計量和統計量 C_k 的概念相同, 只是將原本對稱中心已知的情形, 在對稱中心未知時, 改用樣本中位數去估計該中心, 然後再定義出統計量。

由於在對稱中心未知時, 要導出統計量在原始假設下的分布十分的不容易, 所以我們使用電腦做模擬的工作。

首先, 我們考慮的統計量 C_k^* , 在不同的 k 時 , 所得到的統計量就不同 , 因此 , 我們想先尋找檢定力最佳的統計量 , 所以我們先利用蒙地卡羅模擬來找出最適當的 k 值。

表 1: 推廣 λ -族分布的參數

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Case 1	0	0.197454	0.134915	0.134915
Case 2	0	1.0	1.4	0.25
Case 3	0	1.0	0.00007	0.1
Case 4	3.586508	0.04306	0.025213	0.094029
Case 5	0	-0.1	-0.0075	-0.03
Case 6	-0.116734	-0.351663	-0.13	-0.16
Case 7	0	-1.0	-0.1	-0.18
Case 8	0	-1.0	-0.001	-0.13
Case 9	0	-1.0	-0.0001	-0.17

在這裡我們考慮使用 Thomas P. McWilliams (1990) 所使用之推廣的 λ -族 (generalized lambda family) 所產生的九個分布來作爲 F , 這推廣的 λ -族所產生的九個分布包含了一個對稱分布, 和其餘的非對稱分布, 而這些推廣的 λ -族是透過均勻分布 $U(0,1)$ 的隨機亂數值 u_i 經由一函數式轉換後所產生, 表示成

$$x_i = \lambda_1 + \frac{u_i^{\lambda_3} - (1-u_i)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, 0 < u_i < 1,$$

各個的參數值 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ 及圖表詳見表 1 及圖 1 (p.9)。其中, 當 $\lambda_3 = \lambda_4$ 時, 即可產生對稱分布, 也就是表 1 中的 Case 1 。

我們所使用的軟體爲 Fortran 90, 先用推廣的 λ -族中的對稱分布 (Case 1) 當作 F , 且對不同的 k 值 , $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, 和不同的樣本大小 $N = 20, 30, 50, 100$ 分別做10000次的模擬, 找其棄卻域 (critical region) , 結果見表 2 。表 2 中的 k 表示取距離對稱中心最遠的 k 個觀測值, t 表示最遠的那 k 個觀測值中符號是正的個數, $t = 0, \ldots, k$, 我們針對特定的 (k,t) 值做模擬, 而表格中的值爲模擬 10000 次後, $C_k^* \geq t$ 或 $C_k^* \leq k - t$ 在 10000 中出現的次數。

表 2:

(k,t)	N=20	N=30	N=50	N=100
(5,5)	547	696	775	770
(6,6)	203	321	392	410
(7,7)	71	145	193	213
(8,8)	15	62	105	114
(9,9)	2	25	46	61
(9,8)	88	289	439	510
(10,10)	0	8	20	30
(10,9)	15	137	244	291

結果發現在不同的樣本大小時情況會不同, 因此, 在顯著水準 $\alpha = 0.05$, 我們針對不同的樣本大小使用隨機化檢定 (randomized test), 以便在同樣的 α 之下比較各個統計量的檢定力。

我們再利用蒙地卡羅模擬, 考慮推廣的 λ -族所產生的九個分布來作爲 F , 來比較在不同 k 值時的檢定力, 找到適合的檢定統計量 C_k^* 。在固定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 之下, 同樣對不同的樣本大小 $N = 20, 30, 50, 100$ 做10000次的模擬, 從模擬結果可看出, 似乎當 $k = 6$ 時爲最佳的選擇, 因尚無法證明, 這只能說是建議。

接下來我們再次使用蒙地卡羅模擬, 來比較在對稱中心未知與之前對稱中心已知時在檢定力上的差別, 我們一樣用推廣的 λ -族所產生的九個分布來比較。結果見表 3 。我們可以發現在對稱中心未知和原先對稱中心已知的檢定力有預期中的差別, 因爲我們是用樣本中位數來估計未知的對稱中心, 本來就會有誤差, 但是雖然 C_6^* 的檢定力不及 C_6 好, 然而差異並不大, 所以 C_6^* 可說是不錯的檢定方法。

之後我們想看看此統計量的適用性, 即此統計量是否有分布不拘的性質, 所以又選取了兩個對稱分布作爲 F 來做模擬 , 其中包括應用最廣的常態分布 (Normal Distribution) 和邏輯斯分布 (Logistic Distribution)。

表 3: C_6 和 C_6^* 在 $\alpha = 0.05$ 檢定力的比較

	N	C_6	C_6^*
Case 1	20	472	476
	30	472	474
	50	473	493
	100	482	494
Case 2	20	2513	2862
	30	6006	5504
	50	9506	8448
	100	10000	9927
Case 3	20	4153	3925
	30	7926	7554
	50	9914	9810
	100	10000	10000
Case 4	20	1113	1005
	30	2119	2026
	50	4159	4046
	100	7475	7407
Case 5	20	1521	1283
	30	2981	2747
	50	5827	5583
	100	8864	8867
Case 6	20	514	386
	30	511	391
	50	658	511
	100	901	729
Case 7	20	761	584
	30	1166	951
	50	2020	1751
	100	3689	3411
Case 8	20	4930	4706
	30	8515	4844
	50	9966	9960
	100	10000	10000
Case 9	20	5228	5027
	30	8812	8826
	50	9981	9980
	100	10000	10000

我們同樣使用軟體 Fortran 90 來進行模擬, 在固定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 以推廣的 λ -族中的對稱分布 (Case 1) , 所找到的棄卻域爲準, 來對此二個對稱分布進行模擬。結果見表 4 。

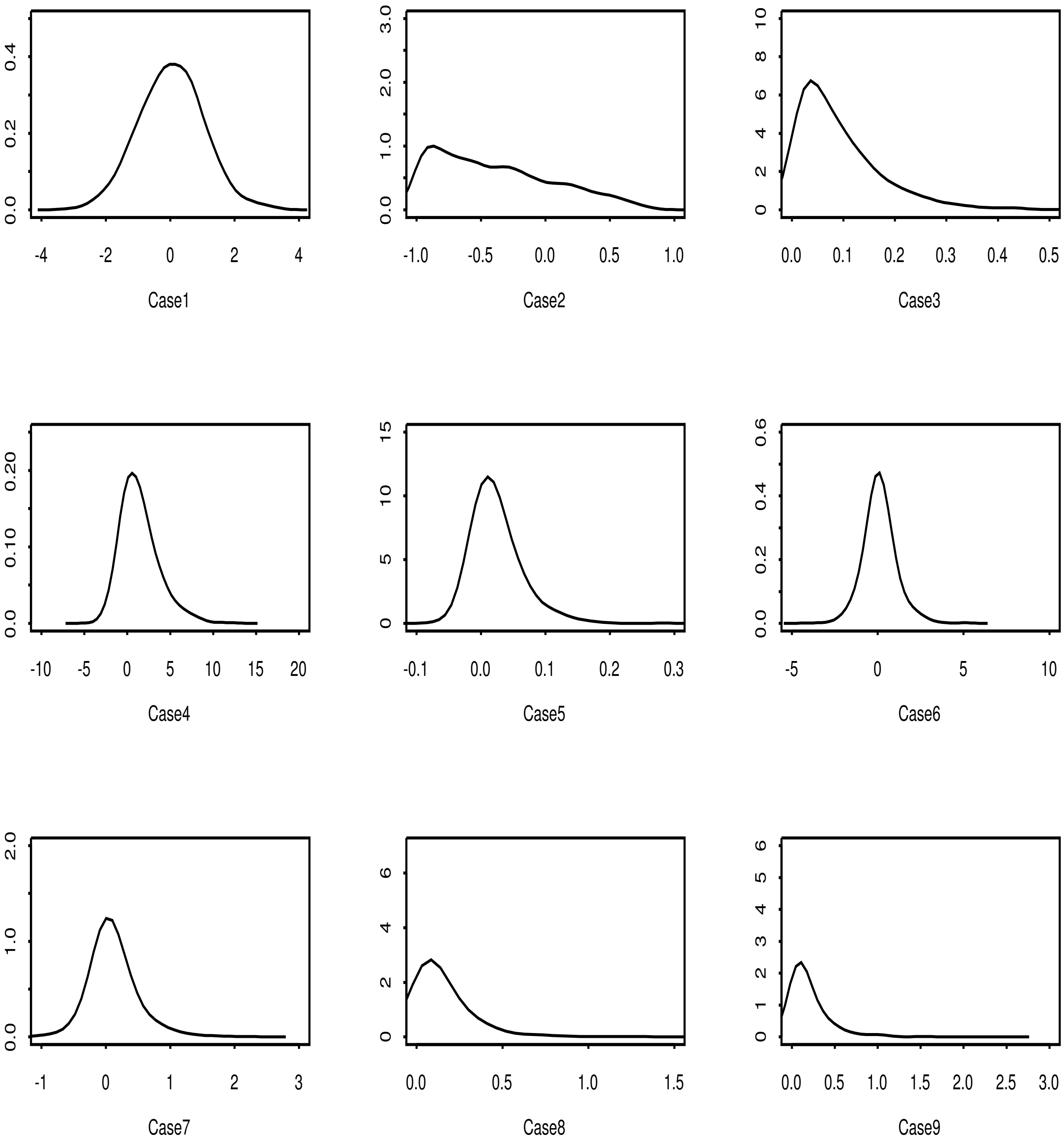
表 4:

	N=20	N=30	N=50	N=100
Case 1	502	487	488	500
常態分布	495	503	498	502
邏輯斯分布	412	400	389	408

從表 4 中的結果可看出, 對常態分布來說, 我們用的臨界值很合適。對邏輯斯分布來說, 離預定的 $\alpha = 0.05$ 稍有差距, 但差距不算大。

所以, 必須一提的是, 在模擬過程中我們發現若懷疑想要檢定的對象可能屬於輕尾 (light-tailed) 分布的話, 或許就比較不適合用這個檢定統計量, 因爲用中位數來估計均勻分布的對稱中心, 並不是很好的估計。事實上若要估計均勻分布的中心, 若其值域範圍完全未知的話, 中心的最大概似估計會是最小順序統計量和最大順序統計量的函數。因此可知, 因爲對於中心的估計, 視分布而有不同的選擇, 所以若希望我們的統計量在各種分布都適用的話, 可能應引進因應統計量 (adaptive statistic) 的觀念, 這是後續可做的工作。

圖 1: 推廣 λ 族分布的圖形



附錄A

性質 1 : < translation-invariant >

設 $X_1, \ldots, X_n$ 是來自同一分布函數 F 的一組隨機樣本, 當把所有的觀測值都做同一方向相同單位的位移 (即 $X_i \Rightarrow X_i + d$) 後, 則檢定統計量 C_k^* 之數值不變, 即

$$C_k^*(X_1 + d, \ldots, X_n + d) = C_k^*(X_1, \ldots, X_n)$$

性質 2 :

設 $X_1, \ldots, X_n$ 是來自同一分布函數 F 的一組隨機樣本 , 當把所有的觀測值之正負符號做改變 (即 $X_i \Rightarrow -X_i$), 則檢定統計量 C_k^* 和原來的統計量有以下的關係式

$$C_k^*(-X_1, \ldots, -X_n) = k - C_k^*(X_1, \ldots, X_n)$$

定理 1 :

設 $X_1, \ldots, X_n$ 是來自同一分布函數的獨立隨機變數 , 且此分布對 μ 對稱, 則統計量 $C_k^*(X_1, \ldots, X_n)$ 會有對稱分布, 其對稱中心爲 $\frac{k}{2}$ 。

參考文獻

1. Hettmansperger, T. (1984), *Statistical Inference based on Ranks* (Wiley,New York).

2. McWilliams, T. P. (1990), A distribution-free test for symmetry based on a runs statistics, *J. Amer. Statist. Assoc.* 85, 1130-1133.

3. Mondarres, R. and Gastwirth, J. L. (1996), A modified runs test for symmetry, *Stat. Probab. Lett.* 31, 107-112.

4. Wilcoxon, F. (1945), Individual comparisons by ranking methods, *Biometrics* 1, 80-83.

5. 李俊達 (1999), 對稱問題之連串檢定（淡江大學數學系碩士班碩士論文）

92 國科計劃成果自評

此計畫之研究成果，內容與原計劃相符（除了部分理論結果尚未能導出）。

因為是繼續之前的研究，原本目標就在考慮對稱中心未知時的情況，雖然未能證出統計量是否有分布不拘(distribution-free)性質（猜想是沒有），但證出統計量在原始假設下會有對稱分布。

檢力方面經由蒙地卡羅模擬，也看到如預期的不錯結果。

分布是否對稱，是很多人都會考慮到的概念（比如說在檢定位置問題的無母數方法中，有些就只適用於對稱分布），因此本報告中的簡易檢定，當然頗有應用價值。

發表方面，想再補做一些後續工作後才投稿。