

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

完全多分圖的分割 覆蓋及裝填性的研究(2/2)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2115-M-032-001-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：高金美

報告類型：完整報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫涉及專利或其他智慧財產權，2年後可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 30 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：完全多分圖的分割覆蓋及裝填性的研究

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC - 91 - 2520 - S - 032 - 001

執行期間： 91年8月1日至92年7月31日

計畫主持人： 高金美

共同主持人：

計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位： 淡江大學數學系

中 華 民 國 九 十 二 年 十 月 二 十 日

一、中文摘要

一個完全 k 部圖是指一個圖中所有的點集合可分成 k 個不相交的非空集合，且滿足在同一個集合中的任兩點沒有邊相連，在不同個集合中的任兩點都有邊相連。當 $k=4$ 時，則稱之為完全四部圖。一個完全四部圖若其頂點所分成之四個集合的元素皆為 n 時，此完全四部圖就記為 $K_{4(n)}$ 。

一個圖 G 能分割成一些子圖是指圖 G 中的邊可分為一些邊均相異的子圖且這些子圖的點集合的聯集為 G 的點集合，邊集合的聯集為 G 的邊集合。完全四部圖分割成 5-迴圈，即是將此完全四部圖分成邊均相異之 5-迴圈。若一完全四部圖無法完全分成邊均相異之 5 迴圈時，我們則稱餘留下來之邊所形成之圖為以 5-迴圈裝填此完全四部圖後之剩餘圖。

在此報告中，我們將證明 $K_{4(n)}$ 分割成 5-迴圈的充分必要條件為 $n \equiv 0 \pmod{10}$ ，並證明 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 5-迴圈；同時亦獲得當 $n < 10$ 時以 5-迴圈裝填 $K_{4(n)}$ 的剩餘圖，列之於下表中。

$K_{4(1)}$	$K_{4(2)}$	$K_{4(3)}$	$K_{4(4)}$	$K_{4(5)}$
K_6	C_4	$3K_{1,3}$	$2C_8$	$7K_2 \cup K_{1,3} \cup P_5$
	$K_{4(6)}$	$K_{4(7)}$	$K_{4(8)}$	$K_{4(9)}$
	$4C_4$	$14K_2$	$4C_6$	$18K_2 \cup C_{18}$

接著我們證明當 $t \geq 3$ 時，若存在兩整數 r, s 使得 $2tr + 4s = 4mn$ ，則可以得到 $K_{2m,2n}$ 分割成 r 個 $2t$ -迴圈 C_{2t} 與 s 個 4-迴圈 C_4 的充要條件。在證明過程中我們分成 t 為奇數與 t 為偶數兩種情形來討論，同時我們也證明了 $K_{2m,2n}$ 可分割成 s 個 C_4 與 r 個 C_{10} ，只要 $m, n \geq 3$ 且 $10r + 4s = 4mn$ 及 $K_{2m,2n}$ 可分割成 s 個 C_4 與 r 個 C_{12} ，只要 $m, n \geq 3$ 且 $12r + 4s = 4mn$ 。

最後，我們對於度數為奇數之二分圖 $K_{2n+1,2n+1}$ 亦考慮其在拿走一個 1-因子之後分割成 C_{2t} 與 C_4 的可能性，我們利用 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ ，其中 F 為 $K_{2n+1,2n+1}$ 的一個 1-因子，分割成 C_{10} 與 C_4 及 C_{12} 與 C_4 之後亦獲得其一般性，即當 $t \geq 3$ 時，若存在兩整數 r, s 使得 $2tr + 4s = 2n(2n+1)$ ，則可以得到 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 r 個 $2t$ -迴圈 C_{2t} 與 s 個 4-迴圈 C_4 的充要條件。

關鍵詞： 分割, 完全二分圖, 迴圈, 1-因子, 完全四部圖, 迴圈, 裝填, 剩餘圖。

二、英文摘要

A complete k -partite graph is a graph whose vertices can be partitioned into k disjoint nonempty sets, and there are n edges within two vertices which are in the same set, and every edge joins two vertices which are in different partite sets. A complete four-partite graph with n vertices in each partite set, then we will denote it by $K_{4(n)}$.

A graph G can be decomposed into subgraphs if the edges of each subgraphs are disjoint. The union of the vertex set of each subgraphs is the vertex set of G and the union of the edge set of each subgraphs is the edge set of G . A pentagon is a 5-cycle. $K_{4(n)}$ can be decomposed into pentagons if the edges of $K_{4(n)}$ can not completely partitioned into edge-disjoint 5-cycles, we will call the graph with left edges a remainder graph which derived from a packing of $K_{4(n)}$ with pentagons.

In this report, we will prove that the necessary and sufficient conditions for decomposing $K_{4(n)}$ into pentagons are $n \equiv 0 \pmod{10}$, and prove that $K_{2n, 2n, 2n, 8n}$ can be decomposed into pentagons. In the last section, we obtain the remainder graphs of packing $K_{4(n)}$ into pentagons when $n < 10$ as follows:

$K_{4(1)}$	$K_{4(2)}$	$K_{4(3)}$	$K_{4(4)}$	$K_{4(5)}$
K_6	C_4	$3K_{1,3}$	$2C_8$	$7K_2 \cup K_{1,3} \cup P_5$
	$K_{4(6)}$	$K_{4(7)}$	$K_{4(8)}$	$K_{4(9)}$
	$4C_4$	$14K_2$	$4C_6$	$18K_2 \cup C_{18}$

Next, we obtain that whenever $t \geq 3$, the sufficient and necessarily condition of $K_{2m, 2n}$ being decomposed into r $2t$ -cycles, C_{2t} , and s 4-cycles, C_4 if there exist two integers r and s such that $2tr + 4s = 4mn$. In the proof, we consider two cases : t is odd and t is even. At the same time we prove that if $m, n \geq 3$ and $10r + 4s = 4mn$, then $K_{2m, 2n}$ can be decomposed into s C_4 's and r C_{10} 's and if $m, n \geq 3$ and $12r + 4s = 4mn$ then $K_{2m, 2n}$ can be decomposed into r C_{12} 's and s C_4 's.

In the last part, we prove that if $n \geq 3$ and $10r + 4s = 2n(2n+1)$, then $K_{2n+1, 2n+1} \setminus F$ can be decomposed into s C_4 's and r C_{10} 's and if $n \geq 3$ and $12r + 4s = 2n(2n+1)$ then $K_{2n+1, 2n+1} \setminus F$ can be decomposed into s C_4 's and r C_{12} 's.

Generally, we obtain that whenever $t \geq 3$, the sufficient and necessarily condition of $K_{2n+1, 2n+1} \setminus F$ being decomposed into r $2t$ -cycles, C_{2t} , and s 4-cycles, C_4 , where F is a 1-factor of $K_{2n+1, 2n+1}$, if there exist two integers r and s such that $2tr + 4s = 2n(2n+1)$.

Keywords: decomposition, complete bipartite graph, complete k -partite graph cycle, 1-factor, cycle, packing, remainder graph..

三、目 錄

第一章 簡介	5
第二章 $K_{4(q)}$ 分割成 5-迴圈	6
第三章 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 分割成 5-迴圈	7
第四章 5-迴圈裝填 $K_{4(q)}$ 後所形成之可能最小剩餘圖	9
第五章 圖 $K_{2m,2n}$ 分割成 C_4 和 C_{2t}	15
第六章 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 C_{2t} 及 C_4	22
第七章 參考文獻	25
第八章 附件	27

第一章 簡介

在西元 1981 年，數學家 Alspach [2] 提出如下的猜想：

假設 m_1, m_2, \dots, m_t 是整數，而且 $3 \leq m_i \leq n$ ， $\sum_{i=1}^t m_i = \binom{n}{2}$ (n odd) 或 $\binom{n}{2} - \frac{n}{2}$ (n even)，則 K_n (n odd) 或 $K_n \setminus F$ (n even) 可以用長度為 m_1, m_2, \dots, m_t 的迴圈所組成。

Rosa 在 [11] 中已經證明這個問題在 $n \leq 10$ 時成立，最近 Balister 已經用電腦證實當 $n \leq 14$ 時成立。

在 1994 和 1998 年，Alspach, Gavlas 和 Marshall [3,4] 三位數學家已提出將 K_n 和 $K_n - I$ 分割成迴圈長度均相同的分解。在 1998 和 2000 年，將完全圖分割成兩個或三個不相同長度的迴圈已由 Adams, Bryant, Khodkar 和 Fu [1,5] 及由 Heinrich, Horak 和 Rosa [10] 所提出，在 1985 年，Häggkvist [9] 已提出將完全圖分割成迴圈長度和個數都是偶數的分解。在 1981 年，Sotteau [8] 也提出將圖 $K_{m,n} (K_{m,n}^*)$ 分割成長度為 $2k$ 的迴圈(迴路)。

令 $K_{r,s,t}$ 是一個完全三部圖，三部分的點數各為 r, s 及 t ，且 $r \leq s \leq t$ 。Nicholas J. Cavenagh 和 Elizabeth J. Billington 在 [2] 中證明了當有兩部分的點數相同或者 r 和 s 可被 10 整除時， $K_{r,s,t}$ 可以被分割成 5-迴圈。在 [14] 中鍾憲輝探討了 $2K_{q,r,s,t}$ 分割成最多迴圈的問題。

在此篇報告中我們將先探討完全四部圖分割成 5-迴圈之問題。在第二章中我們證明了當 $q = r = s = t$ 時， $K_{4(q)}$ 可分割成 5-迴圈的充分必要條件為 q 是 10 的倍數。在第三章中我們證明了 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 5-迴圈。在第四章中我們探討以 5-迴圈裝填 $K_{4(q)}$ 後所形成之可能最小剩餘圖。在第五章中我們將圖 $K_{2m,2n}$ 分割成 C_4 和 C_{2t} 時，分成 t 是奇數和 t 是偶數兩種情況，由於 $2m$ 和 $2n$ 均為偶數，所以 $K_{2m,2n}$ 必可全部分割成 C_4 ，又 C_{2t} 有 $2t$ 個邊，所以 $2m$ 和 $2n$ 必需大於等於 t ，因此討論的範圍將針對 $t \geq 3$ 而且 $m, n \geq \frac{t}{2}$ 。因此我們得知當 r, s 為正整數或零，且 $t \geq 3$ 、 $m, n \geq \frac{t}{2}$ 時，若 $2tr + 4s = 4mn$ ，則 $K_{2m,2n} = rC_{2t} + sC_4$ 。

最後在第六章中，我們對於度數為奇數之二分圖 $K_{2n+1,2n+1}$ 亦考慮其在拿走一個 1-因子之後分割成 C_{2t} 與 C_4 的可能性，我們利用 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ ，其中 F 為 $K_{2n+1,2n+1}$ 的一個 1-因子，分割成 C_{10} 與 C_4 及 C_{12} 與 C_4 之後亦獲得其一般性，即當 $t \geq 3$ 時，若存在兩整數 r, s 使得 $2tr + 4s = 2n(2n+1)$ ，則可以得到 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 r 個 $2t$ -迴圈 C_{2t} 與 s 個 4-迴圈 C_4 的充要條件。

第二章 $K_{4(q)}$ 分割成 5-迴圈

在本章中我們將討論 $K_{4(n)}$ 可分割成 5-迴圈的充分必要條件。很明顯的，我們可以得到 $K_{4(n)}$ 可分割成 5-迴圈的必要條件：
定理 2.1 若 $K_{4(n)}$ 可分割成 5-迴圈，則 $10|n$ 。

引理 2.2 $K_{4(n)}$ 可分割成 5-迴圈， $n=10,20$ 。

證明：令 $T1 = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_1, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, w_4, z_5, y_2, w_3), (x_1, y_4, x_6, w_3, z_5), (x_1, y_7, z_1, y_3, w_6), (x_1, y_5, z_7, w_3, z_6), (x_1, z_4, x_6, y_3, w_5), (x_1, y_6, w_1, y_7, z_8), (x_1, z_7, y_1, z_6, w_9), (x_1, y_{10}, w_6, z_2, w_7)\}$ 。令 $R = \{(a_{i+m}, b_{j+m}, c_{k+m}, d_{r+m}, e_{s+m}) | (a_i, b_j, c_k, d_r, e_s) \in T, m \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$ ，則 R 總共有 120 個 5-迴圈，故知 $K_{4(10)}$ 可分割成 5-迴圈。令 $T2 = \{(x_1, y_{11}, z_{11}, y_{14}, w_3), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_2, z_5, w_4), (x_{-1}, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, y_2, w_3, z_2, w_2), (x_1, y_4, x_6, w_3, z_5), (x_1, y_7, z_1, y_3, w_6), (x_1, y_5, z_7, w_3, z_6), (x_1, z_4, x_6, y_3, w_5), (x_1, y_6, w_1, y_7, z_8), (x_1, z_7, y_1, z_6, w_9), (x_1, y_{10}, w_6, z_2, w_7), (x_1, y_8, x_9, z_6, w_{12}), (x_1, y_9, z_5, y_1, w_8), (x_1, z_9, y_{14}, z_7, w_{14}), (x_1, w_{10}, z_{15}, w_8, y_{15}), (x_1, w_{17}, x_7, z_3, y_{13}), (x_{-1}, z_{11}, y_4, w_8, y_{17}), (x_1, z_{10}, w_{18}, y_8, z_{16}), (x_1, z_{12}, w_6, y_1, w_{13}), (x_1, z_{15}, x_3, w_{18}, y_{12}), (x_{-1}, y_{14}, z_3, w_{13}, y_{16}), (x_1, z_{14}, w_3, z_{12}, y_1), (x_1, w_{15}, z_3, y_{11}, w_{19})\}$ ；令 $R = \{(a_{i+m}, b_{j+m}, c_{k+m}, d_{r+m}, e_{s+m}) | (a_i, b_j, c_k, d_r, e_s) \in T, m \in \{0, 1, 2, \dots, 19\}\}$ ，則集合 R 中共有 480 個 5-迴圈，故知 $K_{4(20)}$ 可分割成這 480 個 5-迴圈。

引理 2.3 $K_{4(30)}$ 可以分割成 $K_{4(10)}$ 。

證明：利用兩個互相垂直的 3 階拉丁方陣，我們可將 $K_{4(30)}$ 分割成 9 個 $K_{4(10)}$ 。故根據陣列互相垂直的定義，這些 $K_{4(10)}$ 的邊都不會重複。因此， $K_{4(30)}$ 可分割成九個 $K_{4(10)}$ 。

定理 2.4 對每一個正整數 n ， $K_{4(10n)}$ 可分割成 5-迴圈。

證明：當 $n \geq 3, n \neq 6$ 時，我們至少可以找到兩個互相垂直的 n 階拉丁方陣。將 $K_{4(10n)}$ 中四部份之點集合各分成 n 組。利用兩個互相垂直的 n 階拉丁方陣可形成一個 $4 \times n^2$ 的垂直陣列。利用陣列中的每一行則可形成 n^2 個 $K_{4(10)}$ 。由於陣列是兩兩互相垂直，故可知 $K_{4(10n)}$ 可分割成 $K_{4(10)}$ 。由於每個 $K_{4(10)}$ 都可分割成 5-迴圈，故 $K_{4(10n)}$ 可分割成 5-迴圈。

當 $n = 6$ 時，將 $K_{4(60)}$ 中每部分之點集合分成 3 部分，利用定理 3.5 中之證明可得 $K_{4(60)}$ 可分割成 $K_{4(20)}$ 。由引理 2.2 知 $K_{4(20)}$ 可分割成 5-迴圈，故 $K_{4(60)}$ 可分割成 5-迴圈。

第三章 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 分割成 5-迴圈

在第二章中我們討論的是當 $p = q = r = s$ 時 $K_{p,q,r,s}$ 的分割。若 $p = q = r = s$ 時，很明顯的我們可以得到若 $K_{p,q,r,s}$ 可分割成 5-迴圈，則 p, q, r, s 為偶數且 $5|(3p^2+ps)$ ，故可推得 p 為 10 的倍數或 $p + s$ 為 10 的倍數。在本章中我們討論當 $s = 4p$ 時，即 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 5-迴圈的情形。

$K_{2n,2n,2n,8n}$ 的總邊數是 $60n^2$ ，是 10 的倍數，故可能可以分割成 5-迴圈。在本章中我們將證明 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可以分割成 5-迴圈。令 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 中四個部分的點集合分別為 X, Y, Z, W ，而這四個部分的點各為 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}, y_1, y_2, \dots, y_{2n}, z_1, z_2, \dots, z_{2n}, w_1, w_2, \dots, w_{8n}$ 。

引理 3.1 $K_{2,2,2,8}$ 可分割成 5-迴圈。

證明：我們可以找到 12 個邊相異的 5-迴圈： $(x_1, w_1, y_1, w_2, z_1)$ ， $(x_1, w_5, y_1, w_6, z_2)$ ， $(x_2, w_3, y_2, w_4, z_2)$ ， $(x_2, w_7, y_2, w_8, z_1)$ ， $(x_1, w_2, y_2, z_2, w_3)$ ， $(x_1, w_4, y_1, z_1, w_6)$ ， $(x_2, w_6, y_2, z_1, w_4)$ ， $(x_2, w_8, y_1, z_2, w_2)$ ， $(x_1, y_1, w_3, z_1, w_7)$ ， $(x_1, y_2, w_1, z_2, w_8)$ ， $(x_2, y_1, w_7, z_2, w_5)$ ， $(x_2, y_2, w_5, z_1, w_1)$ 。所以 $K_{2,2,2,8}$ 可分割成這 12 個 5-迴圈。

引理 3.2 $K_{4,4,4,16}$ 可分割成 5-迴圈。

證明： $K_{4,4,4,16}$ 的總邊數為 240，若可分割成 5-迴圈則可分割成 48 個 5-迴圈。設 X, Y, Z, W 分別代表 $K_{4,4,4,16}$ 四部分之點集合，則我們可以將點集合 X, Y, Z, W 各部分再分成、兩部分， X, Y 與 Z 中的每個部分含有 2 個點， W 中的每個部分含有 8 個點，如圖 3-2。

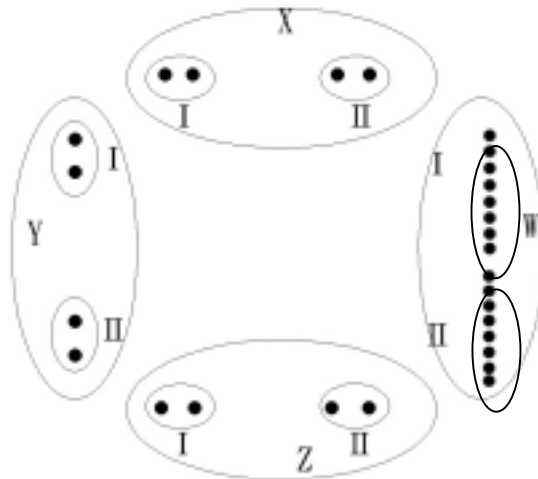


圖 3-2 $K_{4,4,4,16}$ 點的分配

將 $K_{4,4,4,16}$ 分割成 5-迴圈的步驟如下：

(1) 選取 X, Y, Z, W 中的、，、，部分，則可形成一個 $K_{2,2,2,8}$ ，根據引理 3.1 可分割成 12 個 5-迴圈。

(2) 選取 X, Y, Z, W 中的、，、，部分，則所形成的 $K_{2,2,2,8}$ 中 X, Y 部分所形成的邊會與(1)重複使用。但在型態一與型態二兩種 5-迴圈中並無 X, Y 部分的邊，因此這樣的選取我們可以裝填型態一與型態二共 8 個 5-迴圈。其中型態一為： $(x_1, w_9, y_1, w_{10}, z_3)$ ， $(x_1, w_{13}, y_1, w_{14}, z_4)$ ， $(x_2, w_{11}, y_2, w_{12}, z_4)$ ， $(x_2, w_{15}, y_2, w_{16}, z_3)$ ；型態二為： $(x_1, w_{10}, y_2, z_4, w_{11})$ ， $(x_1, w_{12}, y_1, z_3, w_{14})$ ，

$(x_2, w_{14}, y_2, z_3, w_{12}), (x_2, w_{16}, y_1, z_4, w_{10})$ 。

(3) 選取 X, Y, Z, W 中的 $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2$ 部分，則所形成的 $K_{2,2,2,8}$ 中 X, Z 部分所形成的邊會與(1)重複使用，而 X, W 的部分會與(2)重複使用。因為在(2)中裝填了型態一與型態二的 5-迴圈，且在型態三的 5-迴圈中沒有 X, Z 部分的邊，因此這樣的選取我們可以裝填型態三共 4 個 5-迴圈： $(x_1, y_3, w_{11}, z_1, w_{15}), (x_1, y_4, w_9, z_2, w_{16}), (x_2, y_3, w_{15}, z_2, w_{13}), (x_2, y_4, w_{13}, z_1, w_9)$ 。

(4) 選取 X, Y, Z, W 中的 $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ 部分，則所形成的 $K_{2,2,2,8}$ 所用的邊與(1)、(2)、(3)皆無重複，因此可分割成 12 個 5-迴圈。

(5) 選取 X, Y, Z, W 中的 $\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3$ 部分，則所形成的 $K_{2,2,2,8}$ 中 Y, Z 部分所形成的邊會與(3)重複使用，而 X, Y 的部分會與(4)重複使用。因為在(3)中裝填了型態三的 5-迴圈，且在型態一與型態二的 5-迴圈中沒有 X, Y 部分的邊，因此這樣的選取我們可以裝填型態一與型態二共 8 個 5-迴圈。其中型態一為： $(x_3, w_9, y_3, w_{10}, z_1), (x_3, w_{13}, y_3, w_{14}, z_2), (x_4, w_{11}, y_4, w_{12}, z_2), (x_4, w_{15}, y_4, w_{16}, z_1)$ ；型態二為： $(x_3, w_{10}, y_4, z_2, w_{11}), (x_3, w_{12}, y_3, z_1, w_{14}), (x_4, w_{14}, y_4, z_1, w_{12}), (x_4, w_{16}, y_3, z_2, w_{10})$ 。

(6) 選取 X, Y, Z, W 中的 $\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4$ 部分，則所形成的 $K_{2,2,2,8}$ 中 Y, Z 部分所形成的邊會與(2)重複使用，而 X, Z 的部分會與(4)重複使用。因為在(2)中裝填了型態一與型態二的 5-迴圈，且在型態三的 5-迴圈中沒有 Y, Z 部分的邊，因此這樣的選取我們可以裝填型態三共 4 個 5-迴圈： $(x_3, y_1, w_{11}, z_3, w_{15}), (x_3, y_2, w_9, z_4, w_{16}), (x_4, y_1, w_{15}, z_4, w_{13}), (x_4, y_2, w_{13}, z_3, w_9)$ 。

綜合(1)到(6)則可以得到 48 個邊皆無重複的 5-迴圈，因此 $K_{4,4,4,16}$ 可分割成 48 個 5-迴圈。

定理 3.3 當 n 為正整數且 $n \geq 3, n \neq 6$ 時， $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 $K_{2,2,2,8}$ 。

證明：當 n 為正整數且 $n \geq 3, n \neq 6$ 時，我們至少可以找到兩個互相垂直的 n 階拉丁方陣。將 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 中四部份之點集合各分成 n 組。利用陣列中的每一行則可形成 n^2 個 $K_{2,2,2,8}$ 。由於陣列是兩兩互相垂直，故可知 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 $K_{2,2,2,8}$ 。

定理 3.4 對每一個正整數 n ， $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 5-迴圈。

證明：當 $n = 1$ 時，由引理 3.1 可知 $K_{2,2,2,8}$ 可分割成 5-迴圈。

當 $n = 2$ 時，由引理 3.2 可知 $K_{4,4,4,16}$ 可分割成 5-迴圈。

當 $n \geq 3, n \neq 6$ 時，由定理 4.3 知 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 $K_{2,2,2,8}$ 。由於每個 $K_{2,2,2,8}$ 都可分割成 5-迴圈，故 $K_{2n,2n,2n,8n}$ 可分割成 5-迴圈。

當 $n = 6$ 時，將 $K_{12,12,12,48}$ 中每部份之點集合分成 3 部分，利用定理 3.3 中之證明可得 $K_{12,12,12,48}$ 可分割成 $K_{4,4,4,16}$ 。由引理 4.2 知 $K_{4,4,4,16}$ 可分割成 5-迴圈，故 $K_{12,12,12,48}$ 可分割成 5-迴圈。

第四章 5-迴圈裝填 $K_{4(q)}$ 後所形成之可能最小剩餘圖

在第二章中我們證明了當 $10|m$ 時, $K_{4(m)}$ 可分割成 5-迴圈。然而, 當 m 不為 10 的倍數時, $K_{4(m)}$ 無法分割成 5-迴圈。因此我們考慮 $K_{4(m)}$ 之裝填問題, 試著探討 5-迴圈裝填 $K_{4(m)}$ 之剩餘圖。首先我們先針對 $m < 10$ 的情形來看。

當 $m = 1$ 時, 因為 $K_{4(1)}$ 即為 K_4 , 很容易就看出不含任何的 5-迴圈(圖 4-1)。所以 $K_{4(1)}$ 的剩餘圖即為 K_4 。

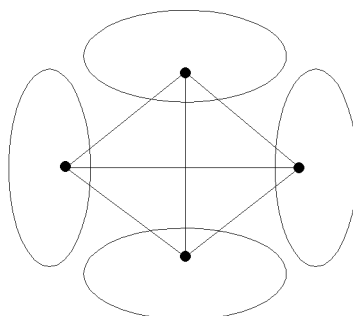


圖 4-1 $K_{4(1)}$ 剩餘圖為 K_4

引理 4.1 以 C_5 裝填 $K_{4(2)}$ 之剩餘圖為一個 C_4 。

證明: $K_{4(2)}$ 共有 24 條邊, 故最多可能可以裝填四個 5-迴圈而剩下 4 邊。我們選擇 $(x_1, y_1, z_1, w_1, z_2)$, $(x_1, y_2, z_2, w_2, z_1)$, $(x_2, y_1, w_1, y_2, z_1)$, $(x_2, y_2, w_2, y_1, z_2)$ 四個 5-迴圈裝填 $K_{4(2)}$, 則剩下的邊形成一個 4-迴圈: (x_1, w_2, x_2, w_1) , 如圖 4-2 所示。

故以 5-迴圈裝填 $K_{4(2)}$ 的剩餘圖是一個 4-迴圈。

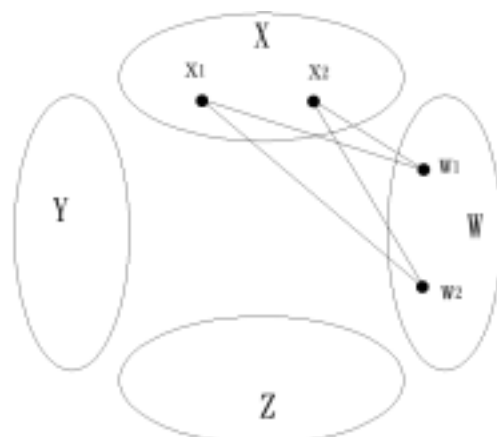


圖 4-2 C_5 裝填 $K_{4(2)}$ 後之剩餘圖為 C_4

引理 4.2 C_5 裝填 $K_{4(3)}$ 後的剩餘圖為 $3K_{1,3}$ 。

證明: $K_{4(3)}$ 的總邊數為 54, 且每個點的度數為 9。故以 C_5 裝填 $K_{4(3)}$ 後之剩餘圖至少含有 9 個邊。我們利用循環裝填 5-迴圈來裝填 $K_{4(3)}$, 令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_2, y_2, z_3, w_1)\}$; 且 $R = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_2, y_2, z_3, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2, y_3), (x_2, z_2, x_3, w_2, y_1), (x_2, w_3, y_3, z_1, w_2), (x_3, y_3, z_3, w_3, y_2)\}$ 。

$1), (x_3, z_3, x_1, w_3, y_2), (x_3, w_1, y_1, z_2, w_3)\}$ 。將此 9 個 5-迴圈裝填 $K_{4(3)}$ 後之剩餘圖為 $3K_{1,3}$ ，如圖 4-3。

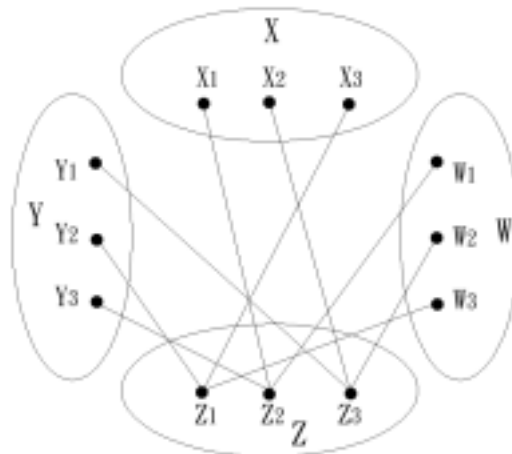


圖 4-3 C_5 裝填 $K_{4(3)}$ 後的剩餘圖為 $3K_{1,3}$

引理 4.3 C_5 裝填 $K_{4(4)}$ 後的剩餘圖為 $2C_8$ 。

證明: $K_{4(4)}$ 總邊數為 96。 $96 \equiv 1 \pmod{5}$ ，以 5-迴圈裝填 $K_{4(4)}$ 不可能只留下一邊，故至少留下 6 邊。令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_{-1}, z_3, y_4, w_4, z_2)\}$ 。且 $R = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_{-1}, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_2, y_2, z_2, w_2, y_3), (x_2, z_2, x_3, w_2, y_4), (x_2, w_2, y_1, z_2, w_3), (x_2, z_4, y_1, w_1, z_3), (x_3, y_3, z_3, w_3, y_4), (x_3, z_3, x_4, w_3, y_1), (x_3, w_3, y_2, z_3, w_4), (x_3, z_1, y_2, w_2, z_4), (x_4, y_4, z_4, w_4, y_1), (x_4, z_4, x_1, w_4, y_2), (x_4, w_4, y_1, z_4, w_1), (x_4, z_2, y_3, w_3, z_1)\}$ 。將 R 中 16 個 5-迴圈裝填 $K_{4(4)}$ 後之剩餘圖為兩個 8-迴圈: $(x_1, y_4, z_2, w_1, x_3, y_2, z_4, w_3), (x_2, y_1, z_3, w_2, x_4, y_3, z_1, w_4)$ 。如圖 4-4 所示。

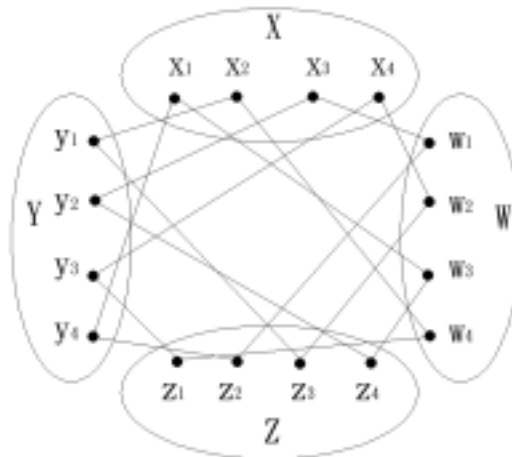


圖 4-4 C_5 裝填 $K_{4(4)}$ 後的剩餘圖是 $2C_8$

引理 4.4 C_5 裝填 $K_{4(5)}$ 後的剩餘圖為 $7K_2 \cup K_{1,3} \cup P_5$ 。

證明: $K_{4(5)}$ 總邊數為 150。 $K_{4(5)}$ 中每點之度數為 15，故可知至少需 10 個邊留下，方能造成每點之度數為偶數及邊數為 5 的倍數。令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_{-1}, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_1, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, w_4, z_5, y_2, w_3)\}$ 。故以 T 中之 5-迴圈為起始者，可循環形成 25 個 5-迴圈，故以 5-迴圈裝填 $K_{4(5)}$ 後，則會剩下

25 條邊。在剩下的邊中，我們還可以找到兩個 5-迴圈：(x₁,y₄,x₅,y₃,z₄)與(x₂,y₅,z₁,x₃,y₁)。所以 K₄₍₅₎再裝填這兩個 5-迴圈，剩下的 15 條邊則為 7K₂ ∪ K_{1,3} ∪ P₅(圖 4-5)。

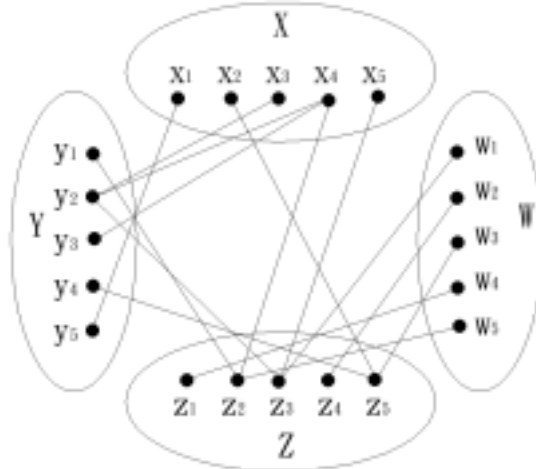


圖 4-5 C₅ 裝填 K₄₍₅₎後的剩餘圖是 7K₂ ∪ K_{1,3} ∪ P₅

引理 4.5 C₅ 裝填 K₄₍₆₎後的剩餘圖為 4C₄。

證明: K₄₍₆₎總邊數為 216，所以以 5-迴圈裝填 K₄₍₆₎至少會留下 6 個邊。將 K₄₍₆₎點集中每部分之點分成兩個兩個一組，每部份皆可分成 1、2、3 三組，如圖 4-6。

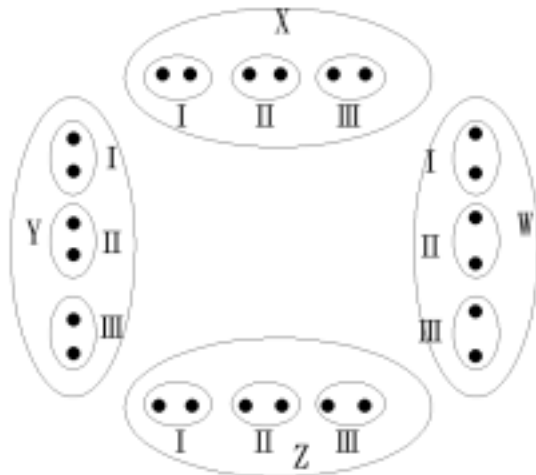


圖 4-6 K₄₍₆₎每部份分成 1、2、3 三組

利用兩個互相垂直的 3 階拉丁方陣所形成之 4×9 的垂直陣列，故 K₄₍₆₎可分割成 9 個 K₄₍₂₎。由於以 5-迴圈裝填 K₄₍₂₎的剩餘圖為 4-迴圈，故共會留下 9 個 4-迴圈。將點適當排列後，這些 4-迴圈的點的分佈可如表 4-4。

X	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	3	3	3
Y	<u>1</u>	<u>2</u>	3	<u>1</u>	<u>2</u>	3	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
Z	1	2	<u>3</u>	2	3	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>
W	1	2	3	3	1	2	2	3	1

表 4-4 劃底線的部分代表 4-迴圈頂點的部份

其圖將如圖 4-7。

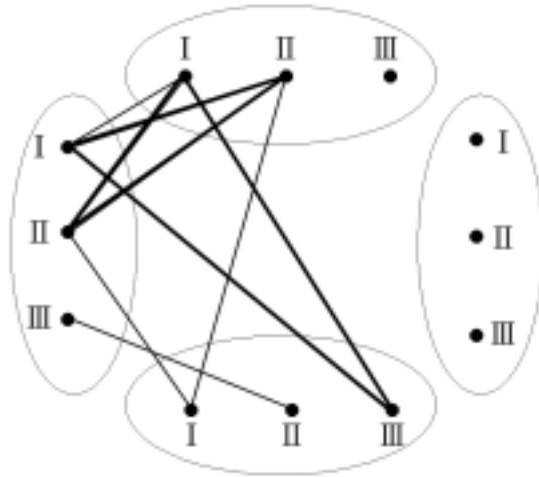


圖 4-7 經選取後所留下的 9 個 4-迴圈

由圖 4-7 可知，剩餘圖中還可以再裝填 4 個 5-迴圈： $(x_1, y_3, x_3, y_1, z_5)$ ， $(x_{-1}, y_4, x_3, y_2, z_6)$ ， $(x_2, y_3, x_4, y_1, z_6)$ ， $(x_2, y_4, x_4, y_2, z_5)$ 。所以，我們可以得到：以 40 個 5-迴圈來裝填 $K_{4(6)}$ 後之剩餘圖會是 4 個 4-迴圈。如圖 4-8 所示。

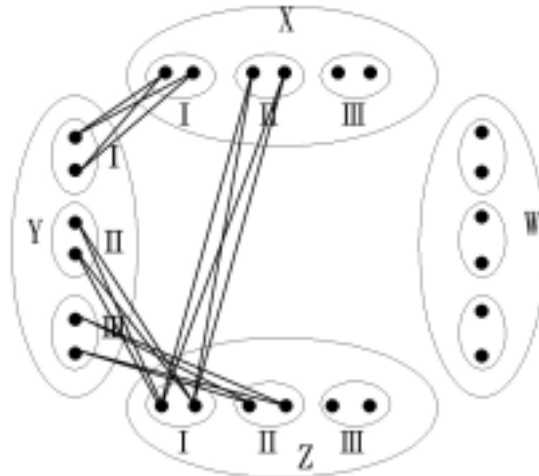


圖 4-8 以 C_5 裝填 $K_{4(6)}$ 後之剩餘圖為 $4C_4$

引理 4.6 以 C_5 裝填 $K_{4(7)}$ 後的剩餘圖為 $14K_2$ 。

證明： $K_{4(7)}$ 的總邊數為 294，且每個點的度數為 21，所以以 5-迴圈裝填 $K_{4(7)}$ 至少會剩下 14 個邊。令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_1, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, w_4, z_5, y_2, w_3), (x_1, y_4, x_6, w_3, z_5), (x_1, y_7, z_1, y_3, w_6), (x_1, y_5, z_7, w_3, z_6)\}$ ，由這 8 個 5-迴圈可循環產生出 56 個 5-迴圈，將這些 5-迴圈裝填 $K_{4(7)}$ 後的剩餘圖為 14 個 K_2 。如圖 4-9 所示。

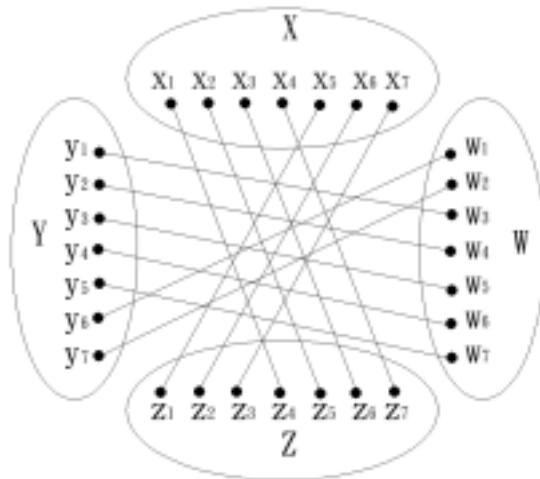


圖 4-9 C_5 裝填 $K_{4(7)}$ 之剩餘圖為 14 個 K_2

引理 4.7 C_5 裝填 $K_{4(8)}$ 後的剩餘圖為 $4C_6$ 。

證明: $K_{4(8)}$ 總邊數為 384，故以 5-迴圈裝填 $K_{4(8)}$ 至少剩下 4 個邊。令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_1, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, w_4, z_5, y_2, w_3), (x_1, y_4, x_6, w_3, z_5), (x_1, y_5, z_7, w_3, z_6), (x_1, y_8, z_1, y_3, w_7), (x_1, z_4, x_6, y_3, w_5)\}$ ，利用 T 中之 5-迴圈做為起始者，我們可以循環形成 72 個 5-迴圈。將 72 個 5-迴圈裝填 $K_{4(8)}$ 後的剩餘圖為 4 個 6-迴圈: $(y_1, w_4, z_1, y_5, w_8, z_5), (y_2, w_5, z_2, y_6, w_1, z_6), (y_3, w_6, z_3, y_7, w_2, z_7), (y_4, w_7, z_4, y_8, w_3, z_8)$ ，如圖 4-10 所示。

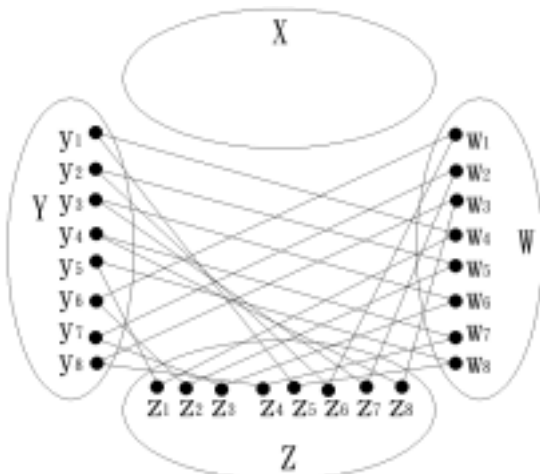


圖 4-10 C_5 裝填 $K_{4(8)}$ 後的剩餘圖是 $4C_6$

引理 4.8

C_5 裝填 $K_{4(9)}$ 後的剩餘圖為 $18K_2 \cup C_{18}$ 。

證明:

$K_{4(9)}$ 共有 486 條邊，且每個點的度數為 27。所以以 5-迴圈裝填 $K_{4(9)}$ 後至少剩下 18 邊。但 $486 - 18 = 468$ 不是五的倍數，所以留下 21 個邊是最少的可能性。令 $T = \{(x_1, y_1, z_1, w_1, y_2), (x_1, z_1, x_2, w_1, y_3), (x_1, w_1, y_4, z_1, w_2), (x_1, z_3, y_4, w_4, z_2), (x_1, w_4, z_5, y_2, w_3), (x_1, y_4, x_6, w_3, z_5), (x_1, y_5, z_7, w_3, z_6), (x_1, z_4, x_6, y_3, w_5), (x_1, y_6, z_1, w_4, y_9), (x_1, z_7, y_6, z_4, w_8)\}$ 。以 T 中之 5-迴圈作為起始者，可以循環產生 90 個 5-迴圈(附錄六)。將這些 5-迴圈裝填 $K_{4(9)}$ 後的剩餘圖為 18-迴圈: $(y_1, w_4, y_8, w_2, y_6, w_9, y_4, w_7, y_2, w_5, y_9, w_3, y_7, w_1, y_5, w_8, y_3, w_6)$ 與 18 個 K_2 ，即為 $\{(y_{1+i}, z_{6+i}) | i=0, 1, \dots, 8\}$ 與 $\{(x_{1+k},$

$w_{6+k} \mid k=0,1,\dots,8\}$, 其中 x, y, z, w 的下標取 9 的同餘數。如圖 4-11 所示。

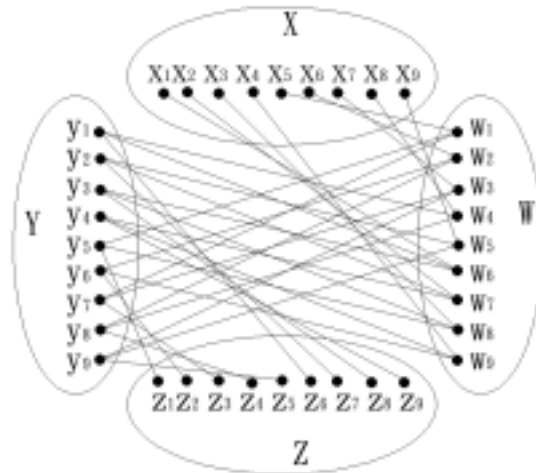


圖 4-11 C_5 裝填 $K_{4(9)}$ 後之剩餘圖為 $18K_2 \cup C_{18}$



以 5-迴圈裝填 $K_{4(m)}$ 所產生之剩餘圖：

$K_{4(1)}$	$K_{4(2)}$	$K_{4(3)}$	$K_{4(4)}$	$K_{4(5)}$
K_6	C_4	$3K_{1,3}$	$2C_8$	$7K_2 \cup K_{1,3} \cup P_5$
	$K_{4(6)}$	$K_{4(7)}$	$K_{4(8)}$	$K_{4(9)}$
	$4C_4$	$14K_2$	$4C_6$	$18K_2 \cup C_{18}$

第五章 圖 $K_{2m,2n}$ 分割成 C_4 和 C_{2t}

為了方便討論，在本論文中我們將使用下列的符號：

$$D_{2t}(G) = \{(r, s) \mid r, s \in N \cup \{0\}, G = rC_{2t} + sC_4\} \text{ 及}$$

$$S_{2t}(i) = \{(r, s) \mid r, s \in N \cup \{0\}, 2tr + 4s = i\}, \text{ 其中 } i \in N.$$

引理 5.1. 令 $t=2k$ ，且 a 與 b 為正整數，假如 a 與 b 中有一個是 k 的倍數，則

$$S_{2t}(4a+4b) = S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b).$$

證明：

$S_{2t}(4a+4b) \supseteq S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$ 是顯而易見的。

假設 $(p, q) \in S_{2t}(4a+4b)$ ，則 $2tp + 4q = 4a + 4b$ ，

因為 $t = 2k$ 故 $kp + q = a + b$ 。在不失一般性的情況下，假設 a 能被 k 整除，

$$(1) \text{ 若 } kp \geq a, \text{ 則 } \left(\frac{a}{k}, 0\right) \in S_{2t}(4a), \left(p - \frac{a}{k}, q\right) \in S_{2t}(4b)$$

$$(2) \text{ 若 } kp < a, \text{ 則 } (p, a - kp) \in S_{2t}(4a), (0, q - (a - kp)) \in S_{2t}(4b)$$

由 (1)(2) 得知 $S_{2t}(4a+4b) \subseteq S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$

$$\text{故 } S_{2t}(4a+4b) = S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$$

因為我們欲將 $K_{2m,2n}$ 分割成 $K_{t,2p}$ ，所以討論當 $2p \geq t$ 時，是否 $D_{2t}(K_{t,2p}) = S_{2t}(2tp)$ 會成立。

引理 5.2. 假設 p 為正整數， t 為偶數且 $2p \geq t$ 。假如對於所有的正整數 u ， $t \leq 2u < 2t$ 時， $D_{2t}(K_{t,2u}) = S_{2t}(2tu)$ 均成立，則 $D_{2t}(K_{t,2p}) = S_{2t}(2tp)$ 成立。

證明： 假設 $t = 2k$ 且 $2p \geq t$ ，則存在非負整數 r ，使得 $2p = rt + 2u$ ，其中 $t \leq 2u < 2t$ ，因此我們可將 $K_{t,2p}$ 分割成 r 個 $K_{t,t}$ 加上一個 $K_{t,2u}$ ，也就是說 $K_{t,2p} = rK_{t,t} + K_{t,2u}$ 。由已知當 $t \leq 2u < 2t$ 時， $D_{2t}(K_{t,2u}) = S_{2t}(2tu)$ 均成立，根據引理 5.1 得知， $D_{2t}(K_{t,2p}) \supseteq r \cdot D_{2t}(K_{t,t}) + D_{2t}(K_{t,2u}) = r \cdot S_{2t}(t^2) + S_{2t}(2tu) = S_{2t}(2tp)$ ，又 $D_{2t}(K_{t,2p}) \subseteq S_{2t}(2tp)$ 是顯然的，因此 $D_{2t}(K_{t,2p}) = S_{2t}(2tp)$ 。

接下來將證明當 $2m, 2n \geq t$ 時， $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$ 是否成立。

定理 5.3. 假設 m 與 n 為正整數， t 為偶數並且 $2m, 2n \geq t$ 。假如對於所有的正整數 u, v ， $t \leq 2u, 2v \leq 2t$ 時， $D_{2t}(K_{2u,2v}) = S_{2t}(4uv)$ 均成立，則 $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$ 成立。

證明：

當 $2m, 2n \geq t$ 時， $K_{2m,2n}$ 可分割成 $K_{2m-t,2n-t}$ ， $K_{2m-t,t}$ ， $K_{t,2n-t}$ 及 $K_{t,t}$ ，而

$$D_{2t}(K_{2m,2n}) \subseteq S_{2t}(4mn), \text{ 所以 } D_{2t}(K_{2m,2n}) \supseteq D_{2t}(K_{2m-t,2n-t}) + D_{2t}(K_{2m-t,t}) +$$

$$D_{2t}(K_{t,2n-t}) + D_{2t}(K_{t,t})$$

藉由數學歸納法，假設當 $2m-t, 2n-t \geq t$ 時， $D_{2t}(K_{2m-t,2n-t}) =$

$$S_{2t}((2m-t)(2n-t)),$$

根據引理 5.2 和已知，我們可以得到 $D_{2t}(K_{2m-t,t}) = S_{2t}(t(2m-t))$ ，

$$D_{2t}(K_{t,2n-t}) = S_{2t}(t(2n-t)), D_{2t}(K_{t,t}) = S_{2t}(t^2),$$

因此，當 $2m, 2n \geq t$ 時，

$$D_{2t}(K_{2m,2n}) \supseteq S_{2t}((2m-t)(2n-t)) + S_{2t}(t(2m-t)) + S_{2t}(t(2n-t)) + S_{2t}(t^2)$$

$$= S_{2t}(4mn)$$

所以 $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$

接下來假設 t 是奇數的情況，即 $t = 2k+1$ 。

引理 5.4. 令 t 為奇數且 a 與 b 為正整數，假如 a 與 b 中有一個是 t 的倍數，則

$$S_{2t}(4a+4b) = S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$$

證明：

$S_{2t}(4a+4b) \supseteq S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$ 是顯而易見的。

假設 $(p,q) \in S_{2t}(4a+4b)$ ，則 $2tp + 4q = 4a + 4b$ ，

因為 $t = 2k+1$ ，故 $tp + 2q = 2a + 2b$ ，則 p 必定是一個偶數。在不失一般性的情況下，假設 a 能被 t 整除，

$$(1) \quad \text{若 } tp \geq 2a, \text{ 則 } \left(\frac{2a}{t}, 0\right) \in S_{2t}(4a), \left(p - \frac{2a}{t}, q\right) \in S_{2t}(4b)$$

$$(2) \quad \text{若 } tp < 2a, \text{ 則 } (p, 2a-tp) \in S_{2t}(4a), (0, q-(2a-tp)) \in S_{2t}(4b)$$

由 (1)(2) 得知 $S_{2t}(4a+4b) \subseteq S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$

$$\text{故 } S_{2t}(4a+4b) = S_{2t}(4a) + S_{2t}(4b)$$

因為我們欲將 $K_{2m,2n}$ 分割成 $K_{2t,2p}$ ，所以討論當 $2p \geq t+1$ 時，是否 $D_{2t}(K_{2t,2p}) = S_{2t}(4tp)$ 會成立。

引理 5.5. 假設 p 為正整數， t 為奇數且 $2p \geq t+1$ 。假如對於所有的正整數 u ， $t+1 \leq 2u \leq 3t-1$ 時， $D_{2t}(K_{2t,2u}) = S_{2t}(4tu)$ 均成立，則 $D_{2t}(K_{2t,2p}) = S_{2t}(4tp)$ 成立。

證明： 因為 $2p \geq t+1$ ，則存在非負整數 r ，使得 $2p = 2rt + 2u$ ，其中 $t+1 \leq 2u \leq 3t-1$ 。

因此我們可將 $K_{2t,2p}$ 分割成 r 個 $K_{2t,2t}$ 加上一個 $K_{2t,2u}$ ，也就是說 $K_{t,2p} = rK_{t,2t} + K_{t,2u}$ 。由已知當 $t+1 \leq 2u \leq 3t-1$ 時， $D_{2t}(K_{2t,2u}) = S_{2t}(4tu)$ 均成立，根據引理 5.4 得知， $D_{2t}(K_{2t,2p}) \supseteq r \cdot D_{2t}(K_{2t,2t}) + D_{2t}(K_{2t,2u}) = r \cdot S_{2t}(4t^2) + S_{2t}(4tu) = S_{2t}(4tp)$ ，又很顯然的， $D_{2t}(K_{2t,2p}) \subseteq S_{2t}(4tp)$ ，因此 $D_{2t}(K_{2t,2p}) = S_{2t}(4tp)$ 。

接下來將證明當 $2m, 2n \geq t+1$ 時， $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$ 是否成立。

定理 5.6. 假設 m 與 n 為正整數， t 為奇數並且 $2m, 2n \geq t+1$ 。假如對於所有的正整數 u, v ， $t+1 \leq 2u, 2v \leq 3t-1$ 時， $D_{2t}(K_{2u,2v}) = S_{2t}(4uv)$ 均成立，則 $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$ 成立。

證明：

當 $2m, 2n \geq 3t+1$ 時， $K_{2m,2n}$ 可分割成 $K_{2m-2t,2n-2t}, K_{2m-2t,2t}, K_{2t,2n-2t}$ 及 $K_{2t,2t}$ ，而且 $D_{2t}(K_{2m,2n}) \subseteq S_{2t}(4mn)$ ，所以

$$D_{2t}(K_{2m,2n}) \supseteq D_{2t}(K_{2m-2t,2n-2t}) + D_{2t}(K_{2m-2t,2t}) + D_{2t}(K_{t,2n-2t}) + D_{2t}(K_{2t,2t})$$

藉由數學歸納法，假設當 $2m-2t, 2n-2t \geq t+1$ 時，

$D_{2t}(K_{2m-t,2n-t}) = S_{2t}((2m-t)(2n-t))$,
 根據引理 5.5 和已知, 我們可以得到 $D_{2t}(K_{2m-2t,2t}) = S_{2t}(2t(2m-2t))$,
 $D_{2t}(K_{2t,2n-2t}) = S_{2t}(2t(2n-2t))$, $D_{2t}(K_{2t,2t}) = S_{2t}(4t^2)$,
 因此, 當 $2m, 2n \geq 3t+1$ 時, $D_{2t}(K_{2m,2n}) \supseteq S_{2t}((2m-2t)(2n-2t)) +$
 $S_{2t}(2t(2m-2t)) + S_{2t}(2t(2n-2t)) + S_{2t}(4t^2) = S_{2t}(4mn)$
 所以 $D_{2t}(K_{2m,2n}) = S_{2t}(4mn)$

下面舉兩個例子討論當 $t = 5$ 和 $t = 6$ 時, 如何將圖 $K_{2m,2n}$ 分割成 4-迴圈和 2-t-迴圈。

【例 1】 假設 m 與 n 為正整數, 並且 $m, n \geq 3$, 對於所有的整數 $r, s \geq 0$, 若 $10r+4s=4mn$, 則 $K_{2m,2n} = rC_{10}+sC_4$, 即 $D_{10}(K_{2m,2n})=S_{10}(4mn)$ 。

【解】

假設 $K_{2m,2n}$ 的點集合為 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}$ 及 $B=\{b_1, b_2, \dots, b_{2n}\}$

因為當 $p' < p, q' < q$ 時, $D_{10}(K_{p',q'}) + \left(0, \frac{pq-p'q'}{4}\right) \subseteq D_{10}(K_{p,q}) \subseteq S_{10}(pq)$

即當 $(r', s') \in D_{10}(K_{p',q'})$, $\left(r', s' + \frac{pq-p'q'}{4}\right) \in D_{10}(K_{p,q})$

故只要 $K_{p',q'}$ 可分割出 r' 個 C_{10} 時, $K_{p,q}$ 必可分割出 r' 個 C_{10} 。因此我們只考慮可產生最多 C_{10} 之最小完全雙分圖即可。

因為 $10r + 4s = 4mn \Rightarrow 5r + 2s = 2mn$, 所以 r 是偶數。

1. 當 $r = 0$ 時, 因為 $2u, 2v$ 均為偶數, 所以 $K_{2u,2v}$ 可分割成 uv 個 C_4 , 即 $(0, uv) \in D_{10}(K_{2u,2v})$ 。

2. 當 $r=2$ 時, $K_{6,6} = 2C_{10} + 4C_4$;

此 2 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_6b_1a_5b_2a_4b_5a_3b_4a_2b_6)$

4 個 C_4 為 $(a_1b_3a_5b_6), (a_1b_2a_6b_4), (a_2b_3a_6b_5), (a_3b_1a_4b_6)$

所以 $D_{10}(K_{6,6}) = S_{36} = \{(2,4), (0,9)\}$ 。

3. 當 $r=4$ 時, $K_{6,8} = 4C_{10} + 2C_4$,

此 4 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_4b_1a_5b_2a_1b_3a_2b_4a_3b_5)$

$(a_1b_4a_6b_3a_5b_6a_3b_8a_2b_7), (a_4b_2a_6b_5a_2b_6a_1b_8a_5b_7)$

2 個 C_4 為 $(a_4b_6a_6b_8), (a_3b_1a_6b_7)$

又 $K_{6,8} = K_{6,6} + K_{6,2}$, 即 $D_{10}(K_{6,6}) + (0,3) \subseteq D_{10}(K_{6,8})$

所以 $D_{10}(K_{6,8}) = \{(4,2), (2,7), (0,12)\} = S_{10}(48)$ 。

4. 當 $r=6$ 時, $K_{6,10} = 6C_{10}$,

此 6 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_3b_3a_5b_6a_2b_8a_4b_{10}), (a_1b_2a_4b_4a_6b_7a_3b_9a_5b_5)$

$(a_5b_1a_6b_3a_2b_4a_3b_6a_4b_7), (a_3b_2a_6b_6a_1b_7a_2b_9a_4b_5)$

$(a_2b_1a_4b_3a_1b_4a_5b_8a_6b_{10}), (a_2b_5a_6b_9a_1b_8a_3b_{10}a_5b_2)$

因為 $D_{10}(K_{6,8}) + (0,3) \subseteq D_{10}(K_{6,10})$

所以 $D_{10}(K_{6,10}) = \{(6,0), (4,5), (2,10), (0,15)\} = S_{10}(60)$ 。

$K_{8,8} = 6C_{10} + C_4$

此 6 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_4b_1a_5b_2a_6b_3a_7b_4a_8b_6)$

$(a_3b_1a_6b_5a_7b_7a_8b_8a_2b_6), (a_1b_3a_2b_4a_3b_5a_4b_7a_5b_8)$

$(a_4b_2a_8b_3a_5b_6a_6b_7a_3b_8), (a_7b_1a_8b_5a_2b_7a_1b_4a_6b_8)$

1 個 C_4 為 $(a_1b_2a_7b_6)$

因為 $D_{10}(K_{6,8}) + (0,4) \subseteq D_{10}(K_{8,8})$

所以 $D_{10}(K_{8,8}) = \{(6,1), (4,6), (2,11), (0,16)\} = S_{10}(64)$ 。

5. 當 $r=8$ 時, $K_{6,14} = 8C_{10} + C_4$,

此 8 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_4b_1a_{11}b_5a_9b_4a_8b_6a_7b_2)$

$(a_9b_1a_{13}b_6a_{14}b_4a_{11}b_3a_{10}b_2), (a_6b_2a_{12}b_6a_{10}b_5a_{13}b_4a_7b_3)$

$(a_8b_1a_{10}b_4a_6b_5a_{14}b_2a_{13}b_3), (a_1b_2a_{11}b_6a_4b_5a_3b_4a_2b_3)$

$(a_{12}b_1a_{14}b_3a_9b_6a_5b_2a_8b_5), (a_5b_1a_7b_5a_2b_6a_1b_3a_{12}b_3)$

1 個 C_4 為 $(a_3b_1a_6b_6)$

因為 $D_{10}(K_{6,12}) + (0,3) \subseteq D_{10}(K_{6,14})$

所以 $D_{10}(K_{6,14}) = \{(8,1), (6,6), (4,11), (2,16), (0,21)\} = S_{10}(84)$ 。

$K_{8,10} = 8C_{10}$

此 8 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_4b_1a_5b_2a_6b_3a_7b_4a_8b_6)$

$(a_7b_1a_8b_2a_9b_3a_{10}b_4a_6b_5), (a_2b_4a_3b_5a_4b_7a_5b_6a_6b_8)$

$(a_2b_3a_5b_8a_7b_6a_9b_5a_8b_7), (a_1b_4a_9b_7a_7b_2a_{10}b_1a_3b_{10})$

$(a_1b_2a_4b_8a_{10}b_5a_2b_6a_3b_7), (a_6b_1a_9b_8a_7b_3a_1b_6a_{10}b_7)$

因為 $D_{10}(K_{8,8}) + (0,4) \subseteq D_{10}(K_{8,10})$

所以 $D_{10}(K_{8,10}) = \{(8,0), (6,5), (4,10), (2,15), (0,20)\} = S_{10}(80)$ 。

6. 當 $r=10$ 時, $K_{10,10}$ 為可產生 10 個 C_{10} 的最小完全雙分圖, 也就是說

$K_{10,10} = 10C_{10}$, 此 10 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5),$

$(a_6b_1a_7b_2a_8b_3a_9b_4a_{10}b_5), (a_4b_1a_5b_2a_1b_3a_2b_4a_3b_5),$

$(a_9b_1a_{10}b_2a_6b_3a_7b_4a_8b_5), (a_3b_1a_8b_6a_9b_7a_{10}b_9a_4b_8),$

$(a_4b_2a_9b_8a_8b_9a_7b_{10}a_6b_7), (a_1b_4a_6b_8a_5b_9a_3b_{10}a_2b_6),$

$(a_2b_5a_7b_8a_{10}b_{10}a_5b_6a_3b_7), (a_1b_7a_7b_6a_4b_{10}a_9b_9a_2b_8),$

$(a_5b_3a_{10}b_6a_6b_9a_1b_{10}a_8b_7)$

因為 $D_{10}(K_{8,10}) + (0,5) \subseteq D_{10}(K_{10,10})$

所以 $D_{10}(K_{10,10}) = \{(10,0), (8,5), (6,10), (4,15), (2,20), (0,25)\} = S_{10}(100)$ 。

7. 當 $r=12$ 時, $K_{10,12}$ 為可產生 12 個 C_{10} 的最小完全雙分圖, 也就是說

$K_{10,12} = 12C_{10} = 2K_{10,6}$, 此 12 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5),$

$(a_4b_1a_5b_2a_6b_3a_7b_4a_8b_6),$

$(a_7b_1a_8b_2a_{10}b_3a_{11}b_4a_6b_6), (a_1b_2a_9b_3a_5b_{10}a_4b_8a_3b_6)$

$(a_1b_4a_3b_5a_4b_7a_6b_9a_8b_{10}), (a_8b_5a_{12}b_{10}a_{11}b_9a_{10}b_8a_9b_7)$

$(a_1b_3a_2b_4a_{10}b_7a_{12}b_9a_5b_8), (a_{10}b_1a_{11}b_2a_{12}b_3a_8b_8a_2b_5)$

$(a_3b_1a_6b_5a_9b_4a_{12}b_6a_{10}b_{10}), (a_9b_1a_{12}b_8a_{11}b_7a_7b_{10}a_2b_9)$

$(a_4b_2a_7b_5a_{11}b_6a_2b_7a_3b_9), (a_1b_9a_7b_8a_6b_{10}a_9b_6a_5b_7)$

因為 $D_{10}(K_{10,10}) + (0,5) \subseteq D_{10}(K_{10,12})$, 所以

$$D_{10}(K_{10,12}) = \{(12,0), (10,5), (8,10), (6,15), (4,20), (2,25), (0,30)\} = S_{10}(120)。$$

8. 當 $r=14$ 時, $K_{12,12}$ 為可產生 14 個 C_{10} 的最小完全雙分圖, 也就是說 $K_{12,12} = 14C_{10} + C_4$,

此 14 個 C_{10} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5), (a_5b_1a_7b_3a_9b_5a_{10}b_6a_{11}b_8)$

$$(a_2b_5a_4b_6a_7b_7a_1b_9a_8b_{11}), (a_2b_6a_9b_{11}a_6b_7a_5b_9a_3b_8)$$

$$(a_8b_2a_{10}b_3a_{12}b_9a_{11}b_{10}a_9b_{12}), (a_6b_4a_7b_5a_8b_6a_{12}b_7a_{10}b_8)$$

$$(a_1b_6a_6b_{10}a_3b_{11}a_7b_8a_{12}b_{12}), (a_1b_3a_2b_4a_8b_7a_{11}b_{12}a_4b_{11})$$

$$(a_5b_2a_6b_3a_8b_8a_9b_{10}a_{10}b_{12}), (a_8b_1a_{11}b_2a_{12}b_4a_9b_7a_2b_{10})$$

$$(a_1b_4a_3b_7a_4b_9a_2b_{12}a_7b_{10}), (a_4b_1a_{10}b_4a_{11}b_5a_6b_9a_7b_2)$$

$$(a_3b_5a_{12}b_{10}a_{10}b_{11}a_{11}b_3a_5b_6), (a_1b_2a_9b_1a_{12}b_{11}a_5b_{10}a_4b_8)$$

1 個 C_4 為 $(a_3b_1a_6b_{12})$

因為 $D_{10}(K_{10,12}) + (0,6) \subseteq D_{10}(K_{12,12})$, 所以

$$D_{10}(K_{12,12}) = \{(14,1), (12,6), (10,11), (8,16), (6,21), (4,26), (2,31), (0,36)\} \\ = S_{10}(144)$$

由上述的討論可知, 只要 $K_{m,n}$ 能產生出最多 C_{10} 的情形, 含有子圖 $K_{m,n}$ 的圖必可產生相同個數的 C_{10} 。

$$\text{又因為 } K_{6,12} = K_{6,10} + K_{6,2} = 6C_{10} + 3C_4$$

$$K_{8,12} = K_{8,10} + K_{8,2} = 8C_{10} + 4C_4$$

$$K_{8,14} = K_{8,6} + K_{8,8} = 10C_{10} + 3C_4$$

$$K_{10,12} = 2K_{10,6} = 12C_{10}$$

$$K_{10,14} = K_{10,6} + K_{10,8} = 14C_{10}$$

$$K_{12,14} = 2K_{6,14} = 16C_{10} + 2C_4$$

$$K_{14,14} = K_{6,14} + K_{8,14} = 18C_{10} + 4C_4$$

所以當 $6 \leq 2u \leq 14, 6 \leq 2v \leq 14$ 時, $D_{10}(K_{2u,2v}) = S_{10}(4uv)$ 均成立。

根據引理 5.5 得知因為 $D_{10}(K_{10,2p}) = S_{10}(20p), 2p \geq 6$, 所以 $2m, 2n \geq 16$ 時, $D_{10}(K_{2m-10,10}) = S_{10}(10(2m-10))$,

$D_{10}(K_{10,2n-10}) = S_{10}(10(2n-10)), D_{10}(K_{10,10}) = S_{10}(100)$ 均成立, 當 $2m, 2n \geq 16$ 時, 可將 $K_{2m,2n}$ 分割成 $K_{2m-10,2n-10}, K_{2m-10,10}, K_{10,2n-10}$ 及 $K_{10,10}$, 根據引理 5.4 和定理 5.6 即可知當 $2m, 2n \geq 16$ 時, $D_{10}(K_{2m,2n}) = S_{10}(4mn)$ 成立。

由上述的例子得知, 當 $t=5$ 時, m 與 n 為正整數, 並且 $m, n \geq 3$ 時, 對於任意的整數 $r, s \geq 0$, 若 $10r + 4s = 4mn$, 則 $K_{2m,2n} = rC_{10} + sC_4$ 。

【例2】 假設 m 與 n 為正整數, 並且 $m, n \geq 3$, 對於所有的整數 $r, s \geq 0$, 若 $12r + 4s = 4mn$, 則 $K_{2m,2n} = rC_{12} + sC_4$, 即 $D_{12}(K_{2m,2n}) = S_{12}(4mn)$ 。

【解】

因為 $m, n \geq 3$, 若要 $D_{12}(K_{2m,2n}) = S_{12}(4mn)$ 成立, 由定理 5.3 得知需先得到 $D_{12}(K_{2u,2v}) = S_{12}(4uv)$, 其中 $6 \leq 2u, 2v \leq 10$;

假設 $K_{2m,2n}$ 的點集合為 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}$ 及 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2n}\}$

因為當 $p' < p, q' < q$ 時, $D(K_{p',q'}) + \left(0, \frac{pq - p'q'}{4}\right) \subseteq D(K_{p,q}) \subseteq S_{pq}$

即當 $(r', s') \in D(K_{p',q'})$, $\left(r', s' + \frac{pq - p'q'}{4}\right) \in D(K_{p,q})$

故只要 $K_{p',q'}$ 可分割出 r' 個 C_{12} 時, $K_{p,q}$ 必可分割出 r' 個 C_{12} 。因此我們只考慮可產生最多 C_{12} 之最小完全雙分圖即可。因為 $12r + 4s = 4mn \Rightarrow 3r + s = mn$ 。

1. 當 $r=0$ 時, 因為 $2u, 2v$ 均為偶數, 所以 $K_{2u,2v}$ 可分割成 uv 個 C_4 , 即 $(0, uv) \in D_{12}(K_{2u,2v})$ 。

2. 當 $r=1, 2, 3$ 時, $K_{6,6}$ 為可產生 r 個 C_{12} 的最小完全雙分圖, 也就是說 $K_{6,6} = rC_{12} + 6C_4$ 。

此 1 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$, 6 個 C_4 為 $(a_1b_2a_4b_5)$,

$(a_3b_1a_6b_4), (a_4b_1a_5b_6), (a_5b_2a_6b_3), (a_1b_3a_2b_4), (a_2b_5a_3b_6)$

$K_{6,6} = 2C_{12} + 3C_4$

此 2 個 C_{12} 為

$(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6), (a_4b_1a_5b_6a_3b_5a_1b_4a_2b_3a_6b_2)$

3 個 C_4 為 $(a_1b_2a_5b_3), (a_2b_5a_4b_6), (a_3b_1a_6b_4)$

$K_{6,6} = 3C_{12}$:

此 3 個 C_{12} 為

$(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6), (a_4b_1a_5b_6a_3b_5a_2b_3a_1b_4a_6b_2)$

$(a_3b_1a_6b_3a_5b_2a_1b_5a_4b_6a_2b_4)$

所以 $D_{12}(K_{6,6}) = \{(3,0), (2,3), (1,6), (0,9)\} = S_{12}(36)$ 。

3. 當 $r=4$ 時, $K_{6,8}$ 為可產生 4 個 C_{12} 的最小完全雙分圖, 也就是說 $K_{6,8} = 4C_{12}$; 此 4 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,

$(a_3b_1a_4b_2a_5b_3a_6b_4a_1b_7a_2b_8), (a_5b_1a_6b_8a_1b_3a_2b_5a_3b_6a_4b_7),$

$(a_1b_2a_6b_7a_3b_4a_2b_6a_5b_8a_4b_5)$

因為 $D_{12}(K_{6,6}) + \{(0,3)\} \subseteq D_{12}(K_{6,8})$,

所以 $D_{12}(K_{6,8}) = \{(4,0), (3,3), (2,6), (1,9), (0,12)\} = S_{12}(48)$ 。

4. 當 $r=5$ 時, $K_{6,10}$ 或 $K_{8,8}$ 為可產生 5 個 C_{12} 的最小完全雙分圖, 也就是說:

$K_{6,10} = 5C_{12}$: 此 5 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,

$(a_2b_4a_3b_5a_4b_6a_5b_7a_6b_8a_1b_9), (a_1b_5a_2b_6a_3b_7a_4b_8a_5b_9a_6b_{10}),$

$(a_4b_1a_5b_3a_6b_2a_1b_7a_2b_8a_3b_{10}), (a_3b_1a_6b_4a_1b_3a_2b_{10}a_5b_2a_4b_9)$

因為 $D_{12}(K_{6,6}) + (0,3) \subseteq D_{12}(K_{6,10})$,

所以 $D_{12}(K_{6,10}) = \{(5,0), (4,3), (3,6), (2,9), (1,12), (0,15)\} = S_{12}(60)$ 。

$K_{8,8} = 5C_{12} + C_4$: 此 5 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,

$(a_3b_1a_6b_2a_7b_3a_8b_5a_4b_6a_2b_8), (a_7b_1a_8b_8a_6b_7a_1b_3a_2b_4a_3b_5),$

$(a_4b_2a_8b_7a_7b_4a_6b_3a_5b_6a_3b_7), (a_4b_1a_5b_7a_2b_5a_1b_4a_8b_6a_6b_8)$

此 1 個 C_4 為 $(a_1b_2a_5b_8)$

因為 $D_{12}(K_{6,6}) + (0,4) \subseteq D_{12}(K_{8,8})$,

所以 $D_{12}(K_{8,8}) = \{(5,1), (4,4), (3,7), (2,10), (1,13), (0,16)\} = S_{12}(64)$ 。

5. 當 $r=6$ 時, $K_{8,10}$ 為可產生 6 個 C_{12} 的最小完全雙分圖, 也就是說 $K_{8,10} = 6C_{12} + 2C_4$; 此 6 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,
 $(a_5b_1a_6b_2a_7b_3a_8b_4a_2b_8a_3b_9)$, $(a_3b_4a_6b_7a_7b_8a_6b_9a_1b_{10}a_2b_6)$,
 $(a_1b_2a_4b_7a_5b_6a_8b_{10}a_3b_5a_2b_3)$, $(a_4b_1a_7b_4a_1b_5a_8b_2a_5b_8a_6b_{10})$,
 $(a_1b_7a_2b_9a_6b_3a_5b_{10}a_7b_5a_4b_8)$
 此 2 個 C_4 為 $(a_3b_1a_8b_7)$, $(a_4b_6a_7b_9)$
 因為 $D_{12}(K_{8,8}) + (0,4) \subseteq D_{12}(K_{8,10})$,
 所以 $D_{12}(K_{8,10}) = \{(6,2), (5,5), (4,8), (3,11), (2,14), (1,17), (0,20)\} = S_{12}(80)$ 。

6. 當 $r=7,8$ 時, $K_{10,10}$ 為可產生 r 個 C_{12} 的最小完全雙分圖, 也就是說 $K_{10,10} = 7C_{12} + 4C_4$; 此 7 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,
 $(a_4b_1a_5b_2a_6b_3a_7b_4a_8b_5a_9b_6)$, $(a_2b_5a_7b_{10}a_6b_9a_5b_8a_4b_7a_3b_6)$,
 $(a_4b_2a_7b_6a_8b_7a_9b_8a_{10}b_9a_1b_5)$, $(a_3b_1a_6b_7a_7b_8a_8b_9a_9b_{10}a_{10}b_5)$,
 $(a_7b_1a_8b_2a_1b_7a_{10}b_6a_5b_{10}a_4b_9)$, $(a_5b_3a_8b_{10}a_1b_8a_6b_4a_3b_9a_2b_7)$
 此 4 個 C_4 為 $(a_1b_3a_2b_4)$, $(a_2b_8a_3b_{10})$, $(a_9b_1a_{10}b_2)$, $(a_9b_3a_{10}b_4)$
 $K_{10,10} = 8C_{12} + C_4$;
 此 8 個 C_{12} 為 $(a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5a_6b_6)$,
 $(a_5b_1a_6b_2a_7b_3a_8b_4a_9b_5a_{10}b_6)$, $(a_3b_5a_4b_6a_7b_7a_8b_8a_9b_9a_{10}b_{10})$,
 $(a_2b_4a_7b_{10}a_6b_3a_5b_8a_4b_7a_3b_6)$, $(a_1b_3a_2b_5a_7b_8a_{10}b_7a_6b_9a_5b_{10})$,
 $(a_8b_1a_9b_2a_{10}b_4a_6b_8a_3b_9a_1b_5)$, $(a_1b_2a_4b_1a_7b_9a_8b_{10}a_9b_7a_2b_8)$,
 $(a_3b_1a_{10}b_3a_9b_6a_8b_2a_5b_7a_1b_4)$. 此 1 個 C_4 為 $(a_2b_9a_4b_{10})$
 因為 $D_{12}(K_{8,10}) + (0,5) \subseteq D_{12}(K_{10,10})$, 所以
 $D_{12}(K_{10,10}) = \{(8,1), (7,4), (6,7), (5,10), (4,13), (3,16), (2,19), (1,22), (0,25)\} = S_{12}(100)$
 所以當 $6 \leq 2u, 2v \leq 10$ 時, $D_{12}(K_{2u,2v}) = S_{12}(4uv)$ 均成立。

根據引理 5.2 得知

$$D_{12}(K_{2m-6,6}) = S_{12}(6(2m-6)), D_{12}(K_{6,2n-6}) = S_{12}(6(2n-6)), D_{12}(K_{6,6}) = S_{12}(36),$$

又當 $2m, 2n \geq 12$ 時, $K_{2m,2n}$ 可分割成 $K_{2m-6,2n-6}$, $K_{2m-6,6}$, $K_{6,2n-6}$ 及 $K_{6,6}$, 根據引理 5.1 和定理 5.3 即可知當 $2m, 2n \geq 12$ 時, $D_{12}(K_{2m,2n}) = S_{12}(4mn)$ 。

第六章 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 C_{2t} 及 C_4

在本章我們探討 $K_{2n+1,2n+1}$ 的分割， $K_{2n+1,2n+1}$ 每一點的度數為奇數，所以我們先拿掉一個 1-因子之後再分割，即討論 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 的分割，其中 F 是圖 $K_{2n+1,2n+1}$ 的 1-因子。我們將使用與第五章相同的符號。

假設 $K_{2n+1,2n+1}$ 的點集合為 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}\}$ ， $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2n+1}\}$ 及 $F = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_{2n+1}, b_{2n+1}\}\}$ ，

首先我們考慮 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 4-迴圈和 12-迴圈，即 $t=6$ 。

因為當 $p' < p$ 時，

$$D_{12}(K_{p',p'} \setminus F) + \left(0, \frac{p(p-1) - p'(p'-1)}{4}\right) \subseteq D_{12}(K_{p,p} \setminus F) \subseteq S_{12}(p(p-1)) ,$$

即當 $(r', s') \in D_{12}(K_{p',p'} \setminus F)$ ， $\left(r', s' + \frac{p(p-1) - p'(p'-1)}{4}\right) \in D_{12}(K_{p,p} \setminus F)$ ，故只

要 $K_{p',p'} \setminus F$ 可分割出 r' 個 C_{12} 時， $K_{p,p} \setminus F$ 必可分割出 r' 個 C_{12} 。因為圖 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 的邊數為 $2n(2n+1)$ ，且 $4s+12r=2n(2n+1)$ ，所以 n 為偶數，故能產生出 C_{12} 的最小二部圖為 $K_{9,9}$ 。

引理 6.1 對於所有的整數 $r, s \geq 0$ ，

(1) 若 $4s+12r=72$ ，則 $K_{9,9} \setminus F = rC_{12} + sC_4$ ，即 $D_{12}(K_{9,9} \setminus F) = S_{12}(72)$ 。

(2) 若 $4s+12r=156$ ，則 $K_{13,13} \setminus F = rC_{12} + sC_4$ ，即 $D_{12}(K_{13,13} \setminus F) = S_{12}(156)$ 。

證明：見參考文獻。

由引理 6.1 我們可以得到下面的定理。

定理 6.2 假設 n 為正偶數且 $n \geq 8$ ，若 $12r+4s=2n(2n+1)$ ，則 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F = rC_{12} + sC_4$ ，即 $D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{12}(2n(2n+1))$ 成立。

證明：

(1) 當 $n=8$ 時， $K_{17,17} \setminus F$ 可分割成 $2K_{9,9} \setminus F$ 及 $2K_{8,8}$ ，所以

$$D_{12}(K_{17,17} \setminus F) \supseteq 2D_{12}(K_{9,9} \setminus F) + 2D_{12}(K_{8,8})$$

根據引理 6.1 和引理 5.2， $D_{12}(K_{9,9} \setminus F) = S_{12}(72)$ ， $D_{12}(K_{8,8}) = S_{12}(64)$

$$D_{12}(K_{17,17} \setminus F) \supseteq 2S_{12}(72) + 2S_{12}(64) = S_{12}(272)$$

所以 $D_{12}(K_{17,17} \setminus F) = S_{12}(272)$ 。

(2) 當 $n \geq 10$ 且 n 為正偶數時， $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 可分割成 $K_{13,13} \setminus F$ ， $K_{2n-11,2n-11} \setminus F$ 及 $2K_{12,2n-12}$ ，所以

$$D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq D_{12}(K_{13,13} \setminus F) + D_{12}(K_{2n-11,2n-11} \setminus F) + 2D_{12}(K_{12,2n-12})$$

藉由數學歸納法，假設 $D_{12}(K_{2n-11,2n-11} \setminus F) = S_{12}((2n-11)(2n-12))$ ，

根據引理 6.1 和引理 5.2，我們可以得到當 $n \geq 10$ 時，
 $D_{12}(K_{13,113} \setminus F) = S_{12}(156)$, $D_{12}(K_{12,2n-12}) = S_{12}(12(2n-12))$ 成立，
 因此當 $n \geq 10$ 時， $D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq S_{12}((2n-11)(2n-12)) +$
 $S_{12}(156) + 2S_{12}(12(2n-12)) = S_{12}(2n(2n+1))$ ，
 所以 $D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{12}(2n(2n+1))$ 。

從定理 6.2 可推得下面的通式。

定理 6.3 假設 n, t 為正偶數且 $n \geq \frac{3t}{2}$ ，假如對於所有的正偶數 m ，

$$\frac{t}{2} \leq m \leq \frac{3t-2}{2}, D_{12}(K_{2m+1,2m+1} \setminus F) = S_{12}(2m(2m+1)), \text{ 則 } D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \\ = S_{12}(2n(2n+1)) \text{ 成立。}$$

證明：

當 $n \geq \frac{3t}{2}$ 且 n 為正偶數時， $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 可分割成 $K_{2t+1,2t+1} \setminus F, K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus$

F 及 $2K_{2t,2n-2t}$ ，所以

$$D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq D_{12}(K_{2t+1,2t+1} \setminus F) + D_{12}(K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus F) + \\ 2D_{12}(K_{2t,2n-2t})$$

由數學歸納法的假設知 $D_{12}(K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus F) = S_{12}((2n-2t)(2n-2t+1))$ ，

根據引理 6.1 和引理 5.2，我們可以得到當 $n \geq \frac{3t}{2}$ 時， $D_{12}(K_{2t+1,2t+1} \setminus F) =$

$S_{12}(2t(2t+1))$ ，及 $D_{12}(K_{2t,2n-2t}) = S_{12}(2t(2n-2t))$ 。

因此，

$$D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq S_{12}((2n-2t)(2n-2t+1)) + S_{12}(2t(2t+1)) + 2S_{12}(2t(2n-2t)) \\ = S_{12}(2n(2n+1))。$$

因此 $D_{12}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{12}(2n(2n+1))$ 。

接著我們考慮 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 分割成 4-迴圈和 10-迴圈，即 $t=5$ 。

因為當 $p' < p$ 時，

$$D_{10}(K_{p',p'} \setminus F) + \left(0, \frac{p(p-1) - p'(p'-1)}{4}\right) \subseteq D_{10}(K_{p,p} \setminus F) \subseteq S_{10}(p(p-1))，$$

即當 $(r', s') \in D_{10}(K_{p',p'} \setminus F)$ ， $\left(r', s' + \frac{p(p-1) - p'(p'-1)}{4}\right) \in D_{10}(K_{p,p} \setminus F)$ ，

故只要 $K_{p',p'} \setminus F$ 可分割出 r' 個 C_{10} 時， $K_{p,p} \setminus F$ 必可分割出 r' 個 C_{10} 。因為圖 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 的邊數為 $2n(2n+1)$ ，且 $4s+10r = 2n(2n+1)$ ，所以 n 為正整數，故能產生出 C_{10} 的最小二部圖為 $K_{5,5}$ 。

引理 6.4 對於所有的整數 $r, s \geq 0$ ，

- (1) 若 $4s+10r = 20$ ，則 $K_{5,5} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{5,5} \setminus F) = S_{10}(20)$ 。
- (2) 若 $4s+10r = 42$ ，則 $K_{7,7} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{7,7} \setminus F) = S_{10}(42)$ 。
- (3) 若 $4s+10r = 72$ ，則 $K_{9,9} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{9,9} \setminus F) = S_{10}(72)$ 。
- (4) 若 $4s+10r = 110$ ，則 $K_{11,11} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{11,11} \setminus F) = S_{10}(110)$ 。
- (5) 若 $4s+10r = 156$ ，則 $K_{13,13} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{13,13} \setminus F) =$

$S_{10}(156)$ 。

(6) 若 $4s+10r = 210$ ，則 $K_{15,15} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{15,15} \setminus F) = S_{10}(210)$ 。

證明：見參考文獻。

由引理 6.4 我們可以得到下面的定理。

定理 6.5 假設 n 為任意數且 $n \geq 8$ ，若 $10r + 4s = 2n(2n+1)$ ，則 $K_{2n+1,2n+1} \setminus F = rC_{10} + sC_4$ ，即 $D_{10}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{10}(2n(2n+1))$ 成立。

證明：

當 $n \geq 8$ 時， $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 可分割成 $K_{11,11} \setminus F$ ， $K_{2n-9,2n-9} \setminus F$ 及 $2K_{10,2n-10}$ ，所以

$D_{10}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq D_{10}(K_{11,11} \setminus F) + D_{10}(K_{2n-9,2n-9} \setminus F) + 2D_{10}(K_{10,2n-10})$
藉由數學歸納法的假設 $D_{10}(K_{2n-9,2n-9} \setminus F) = S_{10}((2n-9)(2n-10))$ ，

根據引理 6.4 和引理 5.5，我們可以得到當 $n \geq 8$ 時，

$$D_{10}(K_{11,11} \setminus F) = S_{10}(110), D_{10}(K_{10,2n-10}) = S_{10}(10(2n-10)),$$

因此當 $n \geq 8$ 時，

$$D_{10}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq S_{10}((2n-9)(2n-10)) + S_{10}(110) + 2S_{10}(10(2n-10)) \\ = S_{10}(2n(2n+1)),$$

所以 $D_{10}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{10}(2n(2n+1))$ 。

從定理 6.5 可推得下面的通式。

定理 6.6 假設 t 為奇數且 $n \geq \frac{3t+1}{2}$ ，假如對於所有的正整數 m ，

$$\frac{t-1}{2} \leq m < \frac{3t+1}{2}, D_{2t}(K_{2m+1,2m+1} \setminus F) = S_{2t}(2m(2m+1)),$$
 則

$$D_{2t}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{2t}(2n(2n+1)).$$

證明：

當 $n \geq \frac{3t+1}{2}$ 時， $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ 可分割成 $K_{2t+1,2t+1} \setminus F$ ， $K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus F$ 及

$2K_{2t,2n-2t}$ ，所以

$$D_{2t}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq D_{2t}(K_{2t+1,2t+1} \setminus F) + D_{2t}(K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus F) + 2D_{2t}(K_{2t,2n-2t})$$

由數學歸納法的假設知 $D_{2t}(K_{2n-2t+1,2n-2t+1} \setminus F) = S_{2t}((2n-2t)(2n-2t+1))$ ，

根據引理 6.4 和引理 5.5，我們可以得到當 $n \geq \frac{3t+1}{2}$ 時，

$$D_{2t}(K_{2t+1,2t+1} \setminus F) = S_{2t}(2t(2t+1)), \text{ 及 } D_{2t}(K_{2t,2n-2t}) = S_{2t}(2t(2n-2t)).$$

因此，

$$D_{2t}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \supseteq S_{2t}((2n-2t)(2n-2t+1)) + S_{2t}(2t(2t+1)) + 2S_{2t}(2t(2n-2t)) \\ = S_{2t}(2n(2n+1)).$$

因為 $D_{2t}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) \subseteq S_{2t}(2n(2n+1))$ 是明顯的，

因此 $D_{2t}(K_{2n+1,2n+1} \setminus F) = S_{2t}(2n(2n+1))$ 。

第七章 參考文獻

- [1] P. Adams, D. E. Bryant, and A. Khodkar, (1998) (3,5)-cycle decompositions, J. Combin. Designs 6, 91-110.
- [2] B. Alspach, (1981) Research problem 3, Discrete Math. 36, 333-334.
- [3] B. Alspach and H. Gavlas, (1998) Cycle decompositions of K_n and $K_n - I$, submitted to J. Combin. Theory Ser. B.
- [4] B. Alspach. and S. Marshall, (1994) Even cycle decompositions of complete graphs minus a 1-factor, J. Combin. Designs 2, 441-458
- [5] D. E. Bryant, A. Khodkar and H. L. Fu, (m,n)-cycle system. J. Statist. Planning and Inference, to appear.
- [6] C. C. Chou, C .M. Fu, and W. C. Huang, (2000)Decomposition of $2K_{m,n}$ into short cycles, Utilitas Mathematica 58, pp.3-10
- [7] C. M. Fu and W. C. Huang, (1998)Decompositions of $K_{m,n}$ into 4-cycles and 8-cycles, Tamkang Journal of Math. Vol. 29, No. 1, 69-72.
- [8] D. Sotteau, (1981) Decompositions of $K_{m,n}(K^*_{m,n})$ into cycles(circuits) of length $2k$, J. Combin. Theory Ser. B, 30, 75-81.
- [9] R. Häggkvist, (1985) A lemma on cycle decomposition, Ann. Discrete Math. 27, 227-232.
- [10] K. Heinrich, P. Horak and A. Rosa, (1989) On Alspach's conjecture. Discrete Math. 77, 97-121.
- [11] A. Rosa, Alspach's conjecture is true for $n \leq 10$, Mathematical reports, McMaster University.
- [12] 黃昱升, The study of decomposing $K_{2m,2n}$ and $K_{2n+1,2n+1} \setminus F$ into cycles of length 4 or $2t$, 2003, 碩士論文.
- [13] 廖威綸, The study of decomposing a complete multipartite graph into pentagons, 2002, 碩士論文.
- [14] 鍾憲輝, The study of decomposing $2K_{p,q,r,s}$ into most cycles, 2001, 碩士論文.

四、計畫成果自評

由於此計畫為兩年期之計畫，讓本人能對一個問題專心探討，在此兩年中由於學生的幫忙，在教學相長之情況下，不僅學生完成碩士論文，而獲得碩士學位，本人也如預期的解決了一些問題，目前正在整理當中，相信兩年內必能整理完成且投稿。

五、 附件

出國開會心得報告

淡江大學數學系高金美

2003 年 9 月 25 日

感謝國科會的補助，才有機會出國與各地學者交流。今年由於 SARS 的因素，使得出國的地點及時間均受到相當的影響。終於在六月底稍稍降溫，於是趕緊聯絡，七月底方得以順利參加在日本京都大學由 Ryoh Fuji-Hara 所舉辦的圖論與組合設計研討會：Designs, Codes, Graphs and their Links IV。此次研討會的日期是從九十二年七月三十日至八月一日為期三天。參與的人員包括來自美國奧本大學之圖論專家 Chris Rodger 教授、交通大學之圖論專家傅恆霖教授及日本本地出色的組合設計及圖論方面之專家學者。三天的演講相當緊湊，每天的演講都有兩場特別講演。

此次研討會的主題是組合設計、編碼、圖論及其連結，這可以說是日本一年一度之盛會，大家利用此機會將一年來的研究呈現出來，由於邀請的演講者除了理論方面的專家外，大部分都是應用在情報方面的學者專家。因此在此你可以感覺到沒有應用的支持，研究很難持續，甚至經費之補助亦很難獲得，讓本人覺得日本真的是一個實是求事的國家。

在此會議中，本人是將這一年在圖論中所獲之結果：The Longest Rainbow Path in the Complete Graph 報告解決之方法，沒想到獲得一些人的注意，對本人之研究結果亦提供一些建議，讓自己獲益頗多。

在結束京都大學的研討會後，順路到慶應大學參加八月四日在理工學部數理科學科由神保 雅一教授所主持之組合研討會，講演者為美國奧本大學之圖論專家 Chris Rodger 教授及交通大學之圖論專家傅恆霖教授。接著到岐阜大學拜訪 Miwako Mishima 教授，了解近期內他所作的研究，以作為未來可能合作的動力。這些天的訪問不僅結交一些朋友，同時又獲得許多的感觸，提供本人在未來的研究上另一個方向，真的還是要感謝國科會在研究計畫下的補助，讓本人在不能偷懶的情形下再度出去充電，獲得許多意外的收穫。

The Rainbow Hamilton Paths in the Complete Graph

Chin-Mei Fu¹ and Hung-Lin Fu²

Abstract

A k edge-coloring of a graph G is a mapping from $E(G)$ into $\{1,2,3,\dots,k\}$ such that incident edges of G receive different colors. After an edge-coloring is given, a subgraph H is called a rainbow graph if all the edges of H receive different colors. In this paper, we study the existence of a rainbow path in the complete graph. Mainly, we show that a rainbow Hamilton path does exist for each complete graph of order $n \in \mathbb{N} \setminus \{4,6\}$ with a given $n - 1$ edge-coloring. On the other hand, we also prove that there are some orders n and colorings of K_n such that no rainbow Hamilton paths can be found.

1. Introduction

A k edge-coloring of a graph G is a mapping from the set of edges, $E(G)$, into $\{1,2,3,\dots,k\}$ such that incident edges of G receive different colors. The chromatic index of a graph G , $\chi'(G)$, is defined as the minimum integer k such that G has a k edge-coloring. It is well-known that $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ [5], and $\chi'(K_n) = n - 1$ if n is even, $\chi'(K_n) = n$ if n is odd.

After an edge-coloring of G was obtained, a subgraph H of G is called a rainbow graph if all the edges of H receive different colors. The existence of a rainbow graph has been studied in the literatures, see [1, 2, 3, 4], for examples. In 1998, it was proved by Woolbright and Fu[6] that for each $2m - 1$ edge-coloring of K_{2m} , $m \geq 3$, there exists a rainbow 1-factor. It is interesting to extend their study to find the rainbow path which is as long as possible for each given edge coloring. Clearly, if we can always find a rainbow Hamilton path, we also have a rainbow 1-factor hidden in the path. Unfortunately, this is too optimistic; we can easily show that a rainbow Hamilton path in K_6 , does not exist for any 5 edge-coloring. Actually we can find more complete graphs with designated colorings which contain no Hamilton paths.

¹ Department of Mathematics, Tamkang University, Tamsui, Taipei Shien, Taiwan

² Department of Applied Mathematics, Chiao Tung University, Hsin-Chu, Taiwan

On the bright side, we can color K_n with a beautiful coloring which has a rainbow Hamilton path for each $n \in \mathbb{N} \setminus \{4,6\}$. We'll start with the constructions of these colorings.

2. Rainbow Hamilton Paths

Since we shall use latin squares to obtain the coloring, we need some basic definitions. A latin square of order n is an $n \times n$ array $L = [l_{ij}]_{n \times n}$ such that each l_{ij} (entry) is in an n -set $S = \{1, 2, \dots, n\}$ and each element of S occurs exactly once in each row and each column of L . A latin square is commutative if $l_{ij} = l_{ji}$ for each distinct pair of elements in $\{1, 2, \dots, n\}$. A latin square L is diagonal if $\{l_{ii} \mid i = 1, 2, \dots, n\} = S$ and L is idempotent if $l_{ii} = i$ for each $i \in S$. Moreover, if $l_{ii} = c$ where c is a constant in S , we say L is unipotent.

Now, it is not difficult to see that an n edge-coloring of the complete bipartite graph $K_{n,n}$ corresponds to a latin square of order n , an $n - 1$ edge-coloring of K_n (n even) corresponds to a unipotent commutative latin square of order n where n occurs only in the diagonal entries, and an n edge-coloring of K_n (n odd) corresponds to an idempotent commutative latin square.

Thus, a rainbow path can be located by using the entries of a latin square corresponding to the coloring.

Example 1. $n = 5$. If the edge-coloring of K_5 corresponds to the idempotent commutative latin square of order 5 in Figure 1, then we can get a rainbow Hamilton path 1-2-3-4-5.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

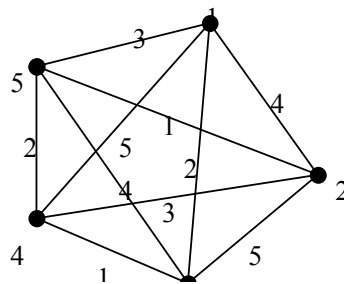


Figure 1. The edge coloring of K_5

Example 2. $n = 8$. If the edge-coloring of K_8 corresponds to the unipotent commutative latin square of order 8 in Figure 2, then we can get a rainbow Hamilton

path 8-7-1-2-3-5-4-6 in K_8 .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	3	2	6	4	7	5
2	1	0	2	3	7	5	6	4
3	3	2	0	1	4	7	5	6
4	2	3	1	0	5	6	4	7
5	6	7	4	5	0	3	2	1
6	4	5	7	6	3	0	1	2
7	7	6	5	4	2	1	0	3
8	5	4	6	7	1	2	3	0

Figure 2. A unipotent commutative latin square of order 8

Example 3. $n = 10$. If the edge-coloring of K_{10} corresponds to the unipotent commutative latin square of order 10 in Figure 3, we can get a rainbow Hamilton path 5-10-9-1-2-8-7-3-4-6 in K_{10} .

0	3	5	2	4	1	6	7	8	9
3	0	4	5	1	9	2	6	7	8
5	4	0	1	2	8	9	3	6	7
2	5	1	0	3	7	8	9	4	6
4	1	2	3	0	6	7	8	9	5
1	9	8	7	6	0	5	2	3	4
6	2	9	8	7	5	0	4	1	3
7	6	3	9	8	2	4	0	5	1
8	7	6	4	9	3	1	5	0	2
9	8	7	6	5	4	3	1	2	0

Figure 3. A unipotent commutative latin square of order 10

First, we observe that if $K_{n,n}$ with an n edge-coloring does have a rainbow 1-factor, then this 1-factor corresponds to a transversal of the latin square of order n . Note that a transversal of a latin square is a set of n distinct entries in the square such that no two entries are in the same row or the same column. In what follows, we have a more general result.

Proposition 2.1. Let n be an odd integer. There exists an n -edge-coloring of K_n such that K_n can be decomposed into $(n - 1)/2$ rainbow Hamilton cycles.

Proof. Let $L = [l_{ij}]$ be a latin square of order n , where $l_{ij} = i + j \pmod{n}$. Then there are n disjoint transversals in L . Since each transversal of the commutative latin square L corresponds to a rainbow Hamilton cycle in K_n with colors defined by L , except the main diagonal, we have $(n - 1)/2$ rainbow Hamilton cycles.

Before we prove the main result, we give a doubling construction of unipotent latin squares.

Proposition 2.2. Let n be an even integer and $n \geq 12$. There is a rainbow Hamilton path in an $(n - 1)$ -edge-coloring ϕ of K_n .

Proof. By direct construction, let $n = 2m$.

(1) $m \equiv 0 \pmod{2}$, and $m \geq 6$.

Let A and C be unipotent commutative latin squares of order m based on $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ corresponding to $(m - 1)$ -edge-coloring of K_m and B be an idempotent latin square of order m based on $\{m, m+1, \dots, 2m - 1\}$ corresponding to m -edge-coloring of $K_{m,m}$. Let L be defined as follows

$$L = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline B^T & C \\ \hline \end{array}$$

Figure 4.

By Woolbright and Fu's theorem[6], there exists a rainbow 1-factor in K_m for each $(m - 1)$ -edge-coloring of K_m . We can assume that, without loss of generality,

the colors of the rainbow 1-factor in A be $1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}$ and the colors of the

rainbow 1-factor in C be $\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1$.

Since B is an idempotent latin square based on $\{m, m+1, \dots, 2m - 1\}$, we have an m -edge-coloring of $K_{m,m}$ which has a rainbow 1-factor by using colors $m, m+1, \dots, 2m - 1$.

By Figure 4, we can see that L corresponds a $(2m - 1)$ -edge-coloring of K_{2m} . By Figure 5, we can obtain a rainbow Hamilton path in K_{2m} .

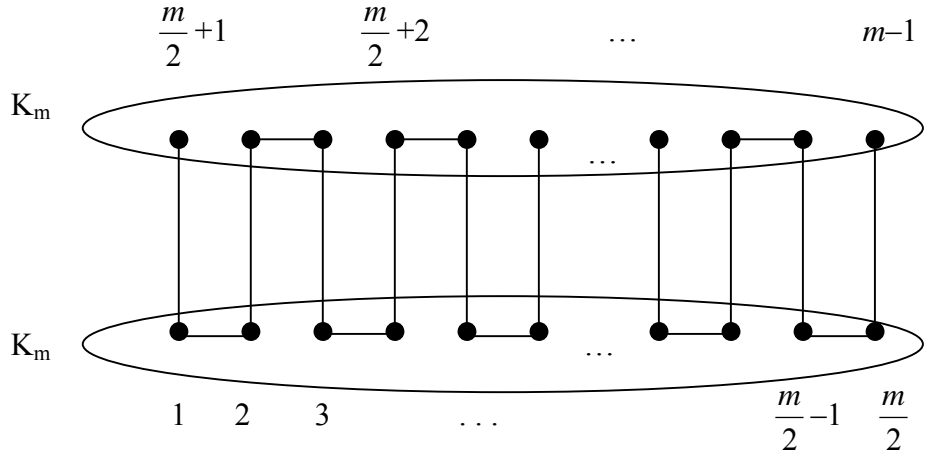


Figure 5.

(2) $m \equiv 1 \pmod{2}$, and $m \geq 7$.

Step 1. Let

$$L = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline B^T & C \\ \hline \end{array}$$

where A and C are ICLS(m) based on $\{1, 2, \dots, m\}$, B is a circulant latin square with the first row $(2m, m+1, m+2, \dots, 2m-1)$, and B^T is the transpose of B .

Step 2. Let

$$L^* = \begin{array}{|c|c|} \hline A^* & B^* \\ \hline B^{*T} & C^* \\ \hline \end{array}$$

where A^* and C^* are constructed from A and C by replacing all the diagonal elements of A and C by 0 respectively, and B^* is constructed from B by replacing the diagonal elements of B by the sequence $1, 2, \dots, m$. Moreover, B^{*T} is the transpose of B^* .

Step 3. By Woolbright and Fu's theorem, we can derive a rainbow near 1-factor in K_m for each m -edge-coloring of K_m . We may assume that, without loss of generality, the colors of the rainbow near 1-factor in A be $1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$ and the colors of the rainbow near 1-factor in C

be $\frac{m-1}{2}+1, \frac{m-1}{2}+2, \dots, m-1$. Since B is a circulant latin square based on $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$. Then B^* have a transversal containing elements $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$. Thus we have an m -edge-coloring of $K_{m,m}$ which has a rainbow 1-factor using colors $m, m+1, \dots, 2m-1$.
 By L^* , we can see that L^* corresponds to a $(2m-1)$ -edge-coloring of K_{2m} such that a rainbow Hamilton path exists.

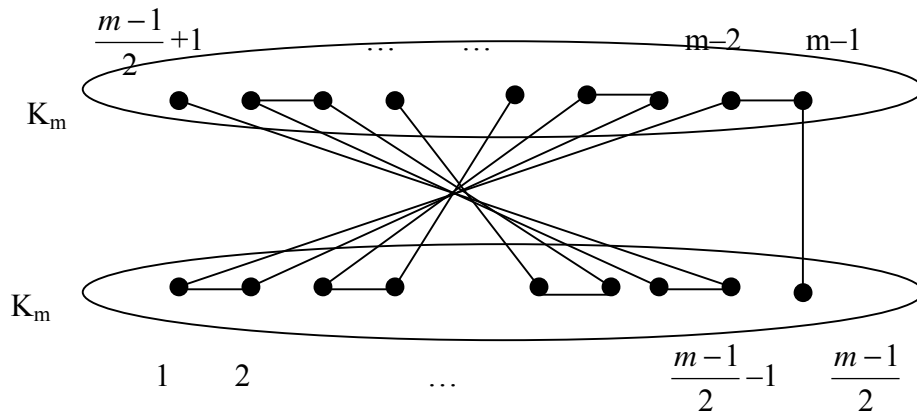


Figure 6.

3. Nonexistence of Rainbow Hamilton Paths

It is easy to see that any edge-coloring of K_4 does not contain any rainbow Hamilton path.

Proposition 3.1. There does not exist a rainbow Hamilton path in any 5-edge-coloring ϕ of K_6 .

Proof. Suppose K_6 is properly colored and K_6 has a rainbow Hamilton path. Let $V(K_6) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ and the rainbow Hamilton path $v_1-v_2-v_3-v_4-v_5-v_6$ receive 5 distinct colors 1,2,3,4,5 in ϕ , as follows:

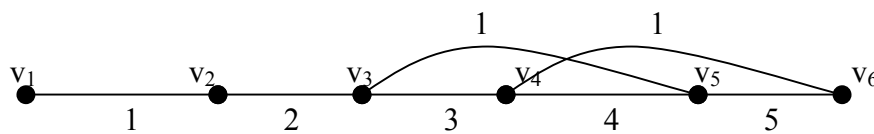


Figure 7.

Now, we consider the edges which are colored "1". Without loss of generality, we can assume that if $\varphi(v_3v_5) = \varphi(v_4v_6) = 1$, then it is impossible to find another pair of independent edges in $K_6 - P_6$ induced by $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$ colored "2". Thus K_6 can not be properly colored. This is a contradiction and we have the proof. \square

Proposition 3.2. If the edge-coloring of K_8 corresponds to the following unipotent commutative latin square of order 8, then K_8 contains no rainbow Hamilton paths.

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

Proof. By the coloring, we can partition K_8 into two K_4 and one $K_{4,4}$ where both edges of K_4 are colored by $\{1, 2, 3\}$ and the edges of $K_{4,4}$ are colored by $\{4,5,6,7\}$. The rainbow Hamilton path in K_8 passes exactly 4 edges of $K_{4,4}$ if it does exist. Moreover, these edges are of different colors. First, if the 4 edges with distinct colors in $K_{4,4}$ induce a 1-factor. Then in order to obtain a Hamilton path, we need to choose two edges with different colors from one of K_4 which form a matching. It is impossible, since a matching in K_4 colored as above is of the same color. If the 4 edges with distinct colors in $K_{4,4}$ induce a graph with maximum degree two and not a 4-cycle. Since they are symmetric in nature, we may let two edges colored 4 and 5 are adjacent. Then there are only two types to consider in Figure 8. Since any Hamilton path containing these 4 edges should contain three edges in K_4 which use only two colors from $\{1, 2, 3\}$, by the way we color K_4 defined on A and B respectively. Thus we can not obtain any rainbow Hamilton path in this K_8 .

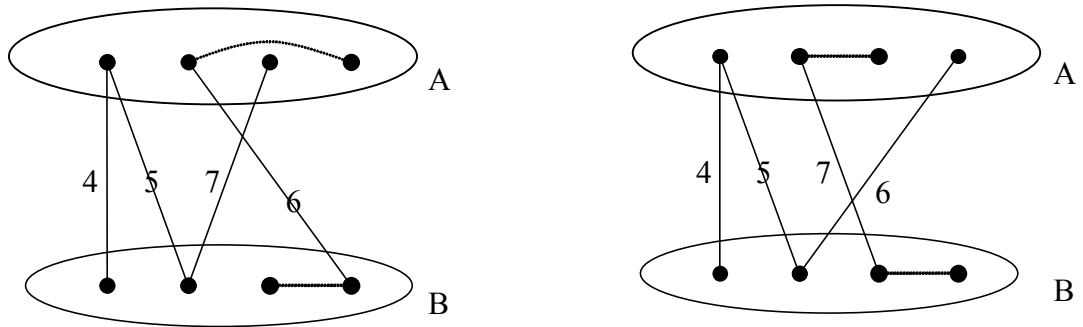


Figure 8.

For reference, we also present an example to show that K_{12} may not contain a rainbow Hamilton path. By the way, it is obtained by using computer.

Example 4. If the edge-coloring of K_{12} corresponds to the following unipotent commutative latin square of order 12, then it contains no rainbow Hamilton paths.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	3	4	5	2	7	6	9	10	11	8
2	3	0	5	1	4	8	9	6	11	7	10
3	4	5	0	2	1	9	10	11	6	8	7
4	5	1	2	0	3	10	11	7	8	6	9
5	2	4	1	3	0	11	8	10	7	9	6
6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	6	9	10	11	8	1	0	3	4	5	2
8	9	6	11	7	10	2	3	0	5	1	4
9	10	11	6	8	7	3	4	5	0	2	1
10	11	7	8	6	9	4	5	1	2	0	3
11	8	10	7	9	6	5	2	4	1	3	0

4. Concluding Remarks

There are two remarks which are worth of mention here.

(1) By the way we construct the colorings of the complete graphs K_{2m} , we actually allow the coloring of its subgraph K_m be prescribed with $\chi'(K_m)$ colors and then embed K_m in K_{2m} such that K_{2m} has a coloring and a rainbow Hamilton path exists.

(2) Does there exist an infinite class of orders and corresponding colorings such that a rainbow Hamilton path does not exist?

As a conclusion, we would like to pose the following problem.

Problem Let $l_{n,\varphi}$ denote the length of a longest rainbow path in K_n (n even) which is edge-colored by φ using $\chi'(K_n)$ colors. Determine $l_n = \min\{l_{n,\varphi} \mid \varphi \text{ is an edge-coloring of } K_n \text{ using } \chi'(K_n) \text{ colors}\}$.

Reference

1. Paul Erdős, and Zsolt Tuza, Rainbow subgraphs in edge-colorings of complete graphs. Quo vadis, graph theory?, 81-88, Ann. Discrete Math., 55,
2. Paul Erdős, and Zsolt Tuza, Rainbow Hamiltonian paths and canonically colored subgraphs in infinite complete graphs. Math. Pannon. **1** (1990), no. 1, 5-13.
3. R. J. Faudree, A. Gyárfás, L. Lesniak, and R. H. Schelp, Rainbow coloring the cube. J. Graph Theory **17** (1993), no. 5, 607-612.
4. Vojtěch Rödl, and Zsolt Tuza, Rainbow subgraphs in properly edge-colored graphs. Random Structures Algorithms **3** (1992), no. 2, 175-182.
5. V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of p -graph, Diskret. Anal. **3** (1964) 25-30.
6. David E. Woolbright and Hung-Lin Fu, On the existence of rainbows in 1-factorizations of K_{2n} . J. Combin. Des. **6** (1998), no. 1, 1-20.