行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

Ostrowski-Gruss 型不等式及其應用

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2115-M-032-006-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：楊國勝

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 9 月 10 日

計劃編號：91-2115-M-032-006
執行期限：91/08/01 ~ 92/07/31 .
主持人　：楊國勝　淡江大學數學系教授
計劃參與人員：吳銘進　淡江大學技士

一、 中文摘要

本研究計劃中，我們建立了下列的不等式：

設 $f^{(n)}$ 在 $[a,b]$ 可積分，且

$r_n \le f^{(n)} \le \Gamma_n, t \in [a,b], n = 1,2,3$，則

1. $\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \right|$

$\le C_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$

$C_1 = \frac{5}{72}, C_2 = \frac{1}{162}, C_3 = \frac{1}{1152}$

2. $\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)] \right|$

$\le K_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$

其中 $K_1 = \frac{25}{576}$, $K_2 = \frac{1}{384}$, $K_3 = \frac{1}{3456}$

關鍵詞：Ostrowski-Grüss 不等式
Simpson 法則

ABSTRACT

We have established in this project the following inequalities:

If $f^{(n)}$ is integrable on $[a,b]$ with

$r_n \le f^{(n)} \le \Gamma_n$ for all $t \in [a,b]$

where $n = 1,2,3$, then

1. $\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \right|$

$\le C_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$

where $C_1 = \frac{5}{72}, C_2 = \frac{1}{162}, C_3 = \frac{1}{1152}$

2. $\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)] \right|$

$\le K_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$

where $K_1 = \frac{25}{576}, K_2 = \frac{1}{384}, K_3 = \frac{1}{3456}$

Key words: Ostrowski-Grüss inequality
Simpson rule

二、計劃緣由與目的

設 f, g 在 (a, b) 上爲可積分函數，且

$\cdot \le f(x) \le \Phi$，$¥ \le g(x) \le \Gamma$，$\forall x \in (a,b)$

$$令 T(f,g) = \frac{1}{b-1}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

$$則\ |T(f,g)| \le \frac{1}{4}(\Phi - \cdot)(\Gamma - ¥) \quad \ldots (1)$$

(1) 式稱爲 Grüss 不等式 (見[6]p.70)。

Matic 等人在[8]中証明下列 Ostrowski-Grüss 型不等式：　　之

定理 A: 若 $f, g : [a,b] \to R$ 爲可積分函數，

$¥ \le g(x) \le \Gamma$，$\forall x \in (a,b)$ 則

$$|T(f,g)| \le \frac{1}{2}\sqrt{T(f,f)}(\Gamma - ¥) \quad \ldots (2)$$

Pearce 等人在[9]中利用(2)証明了下列所謂的 Simpson 規則：

定理 B: 若 $f^{(n)} : [a,b] \to R$ 爲可積分函數，

$¥_n \le f^{(n)}(x) \le \Gamma_n \quad \forall x \in (a,b)$, n=1,2,3, 則

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\right.$$

$$\le C_n(\Gamma_n - ¥_n)(b-a)^n \quad \ldots (3)$$

其中 $C_1 = \frac{1}{12}, C_2 = \frac{1}{24\sqrt{30}}, C_3 = \frac{1}{96\sqrt{105}}$

同時他們也証明了

定理 C:若 $f^{(n)} : [a,b] \to R$ 爲可積分函數，

$¥ \le f'(x) \le \Gamma \quad \forall x \in (a,b)$， 則

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\right.$$

$$\le \frac{1}{8\sqrt{3}}(\Gamma_n - ¥_n)(b-a)^2 \quad \ldots (4)$$

定理 B 也發表在[10]中，同時在[10]中 Peèariæ 等人也証明了[見 10p.2371])在定理 B 的條件之下，

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)]\right|$$

$$\le K_n(\Gamma_n - ¥_n)(b-a)^{n+1} \quad \ldots (5)$$

其中 $K_1 = \frac{1}{8\sqrt{6}}, K_2 = \frac{1}{144\sqrt{5}}, K_3 = \frac{\sqrt{11}}{846\sqrt{105}}$

(5)式即所謂的 Simpson3/8 規則。

本研究計劃的目的在建立一個比不等式(2)更爲尖銳的不等式，然後用(3)，(4)及(5)等的不等式，希望在這些類似的不等式中，能得到更佳的上界，也就是希望得到比 C_1，C_2，C_3，$\frac{1}{8\sqrt{3}}$ 以及 K_1，K_2，K_3 等更小的常數。

研究成果

. 設 $f^{(n)}$ 在 $[a,b]$ 可積分，且

$r_n \le f^{(n)} \le \Gamma_n, t \in [a,b], n$ = 1,2,3, 則

$$1.\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\right|$$

$$\le C_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$$

其中 $C_1 = \frac{5}{72}$，$C_2 = \frac{1}{162}$，$C_3 = \frac{1}{1152}$

$$2.\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)]\right|$$

$$\le K_n(\Gamma_n - r_n)(b-a)^{n+1}$$

其中 $K_1 = \frac{25}{576}$，$K_2 = \frac{1}{384}$，$K_3 = \frac{1}{3456}$

參考文獻

[1]P.Cerone, S.S. Dragomir and J. Roumeliotis, An inequality of Ostrowski-Grüss type for twice differentiable mappings and applications in numerical integration, *Kyungpook Math. J.* 39,333-341.(1999)

[2]X.L. Cheng, Improvement of some Ostrowski-Grüss type inequalities, *Computers Math. Applic.* 42, 109-114(2001).

[3]S.S. Dragomir and S. Wang, An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules, *Computers Math. Applic.* 33(11), 15-20(1997).

[4]I. Fedotov and S.S. Dragomir, An inequality of Ostrowski's type and its applications for Simpson's rule in numerical integration and for special means, Math. Inequal. Appl. 2 , 491-499.(1999).

[5]I. Fedotov and S.S. Dragomir, An inequality of Ostrowski type and its applications for Simpson's rule and for special means, RGMIA, Research Report Collection, Volume2, No.1(1999).

[6]D.S. Mitrinoviæ, Analytic Inequlities . Springer-Verlag Berlin, Heidelberg , New York(1970)

[7]D.S. Mitrinoviæ, J.E. Peèariæ and A.M.Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers,(1993) .

[8]M.Matiæ, J. Peèariæ and N. Ujeviæ, Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type, *Computers Math. Applic.* 39(3/4), 161-175(2000).

[9]C.E.M.Pearce, J.Peèariæ, N. Ujeviæ and S. Varošanec, Harmonic polynomials and generalization of Ostrowski-Grüss type, *Math. Inequal. Appl.* 3, 25-34.(2000)

[10]J. Peèariæ and S. Varošanec, Harmonic polynomials and generalization of Ostrowski inequality with applications in numerical integration, Nonlinear Anal. 47 2365-2374. (2001)