行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

微積分學習之多元化輔助教材的研發與評量之研究--總計畫(III)

計畫類別：整合型計畫
計畫編號：NSC91-2520-S-032-002-
執行期間：91年08月01日至92年07月31日
執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：高金美

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國　92年10月21日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究─總計畫(III)

計畫編號：NSC91-2520-S-032-002

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：高金美

E-mail: cmfu@mail.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱：淡江大學數學系

微積分之教材設計

一、中文摘要

本計畫「微積分學習之多元化輔助教材的研發與評量之研究」主要研究在多元化輔助教材下學習微積分之成效。為了希望能達到預期之成效，於是對於教材需要以多元化方式設計，對於學習之評量需要審慎設計之。針對以上兩點分別由兩個子計畫：教材發展的研究、師資培育及教學評量之研究來執行。

在第一、二年我們已完成積分、極限及極座標的教材設計及教學評量平台之設計，在此次的計畫中已完成無窮數列與無窮級數教材之設計，在教學評量上已陸續建構極限及積分之題庫，以供多媒體自我學習之平台使用。並已將些許題目供學生測試，目前正做一番評估並對一些問題作一些修正。

關鍵詞： 微積分、教材設計、教學評量、無窮數列、無窮級數。

二、 英文摘要

The purpose of this project “a study of the development of multi-media instructional materials in assisting learning Calculus” is to study what effect that using multi-media instructional materials in assisting learning Calculus. In order to obtain the effect, first we need design the instructional materials by using multi-media, and we need to design the test very carefully. Thus we have two sub-plans: Development of instructional material, and Measurement and Evaluation.

During the first and second year, we have finished the design of the instructional material of integration, limit and polar coordinate system and the design of the platform of learning evaluation. In this project we have finished the design of the instructional material of infinite sequence and infinite series. In the second subplan, we have built the database of problems of limits, integration, polar system and infinite sequence and infinite series. At the same time they will be tested by the students. We will make some change to the tested problems, in order to fit for more students.

Keywords: Calculus instructional material, the design of material, teaching evaluation. Calculus, infinite sequences, infinite series.

本次計畫仍是針對教材之編寫及題庫之建立，以供在教學平台上使用及電腦上之自我學習。在此報告中僅列出無窮數列與級數之教材，其餘完成部分將陸續呈現在網頁上。

無窮數列與無窮級數在微積分中的重要性來自牛頓將函數表示為無窮級數的想法，例如在計算面積時為了要計算函數的積分常先將函數表成無窮級數，然後再逐項去積函數的每一項・級數也可以用來解微分方程的問題・在數學、物理與化學中有許多函數常呈現級數和的形式，因此無窮數列與無窮級數之收斂與發散的概念變得益形重要・ 物理學家也常用級數來研究一些不同領域的現象，例如：光學、相對論、電磁學等，他們用代表函數的級數的前面若干項就可以來分析各種不同的現象，並加以解釋・

無窮級數

將 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 等無限多個數相加，所形成的式子 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 稱為無窮級數。

為了方便起見，一個無窮級數一般都用 $\sum$ 符號表示其和，如

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

例：(1) 列出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$的前 6 項。

(2) 將算式 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\Lambda$ 表示成$\sum$ 符號。

解：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\Lambda$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\Lambda$ 的第 n 項為$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$，故

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\Lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

收斂與發散性

無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的前 n 項的和：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

如果存在一個有限的數 S，使得$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，則稱級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是收斂到 S，即和為

S，故記為$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$。

如果$\lim_{n\to\infty}S_n=S$趨近於無限大或不存在，我們稱級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是發散。

例：判斷無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是否收斂。

解： $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\Lambda+\frac{1}{n(n+1)}$，

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\Lambda\ (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$

因為$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

因此無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是收斂，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$。

定理：若無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是收斂，則

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$。

證明: 若無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收斂到 S，則第 n 項 a_n 可表示成

$a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$
$=S_n-S_{n-1}$ 故 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})$。

因為級數收斂到 S 表示$\lim_{n\to\infty} S_n=S$且$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$，

故$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$。

例：判斷無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+2}$是否收斂

解：由於 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\frac{1}{3}\neq 0$

故知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+2}$是發散。

例：判斷無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是否收斂。

解：無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\Lambda$

由上面展開式可以知道，所加的數字是愈來愈小，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

但是$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})}_{\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

$$\to\infty$$

故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是發散。

利用加法的性質，我們可以得到下面性質

(1) 當$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$與$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收斂時，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收斂或發散的檢驗法：

第一種檢驗法：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在或$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必發散‧

第二種檢驗法：若f為定義於$[1,\infty)$之連續函數， $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 為減函數，設

$a_n=f(n)$，則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收斂$\Leftrightarrow\int_1^{\infty}f(x)dx$收斂‧

第三種檢驗法：$\sum a_n,\sum b_n$為兩級數且$a_n\geq 0, b_n\geq 0$‧

(a) 若$a_n\leq b_n\quad\forall n$，且$\sum b_n$收斂，則$\sum a_n$必收斂‧

(b) 若$a_n\geq b_n\quad\forall n$，且$\sum b_n$發散，則$\sum a_n$必發散‧

第四種檢驗法：$\sum a_n, \sum b_n$ 為兩級數，且 $a_n > 0, b_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c$，且

$0 < c < \infty$，則 $\sum a_n, \sum b_n$ 同時收斂或同時發散．

第五種檢驗法：設 $\sum a_n$ 為正項級數($a_n > 0, \forall n$)且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

(i)若 $L<1$，則 $\sum a_n$ 收斂．

(ii)若 $L>1$，則 $\sum a_n$ 發散．

(iii)若 $L=1$，則 $\sum a_n$ 的斂散性不定．

第六種檢驗法：設 $\sum a_n$ 為正項級數，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$

(i)若 $L<1$，則 $\sum a_n$ 收斂．

(ii)若 $L>1$，則 $\sum a_n$ 發散．

(iii)若 $L=1$，則 $\sum a_n$ 的斂散性不定．

第七種檢驗法：若 $\sum (-1)^{n+1} a_n$ 為一交錯級數且{a_n}為一減數列，且 $\lim_{n\to\infty} a_n$=0，則

$\sum (-1)^{n+1} a_n$ 收斂．

第八種檢驗法：若 $\sum |a_n|$ 收斂，則 $\sum a_n$ 收斂．

函數的冪級數表示法：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

$-1 < x < 1$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

$-1 < x \le 1$

3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots$

$-1 \le x \le 1$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$

6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$

Reference

1. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company,1999.
2. Dale Varberg and Edwin J. Purcell,Calculus, Seventh Edition, Prentice Hall International, Inc. 1997.