行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究—子計畫一：教材發展的研究(II)

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC90-2521-S-032-002

執行期間：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

計畫主持人：李武炎

執行單位：淡江大學數學系

中　華　民　國　九十一　年　十　月　一　日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究—子計畫一：教材發展的研究(II)

計畫編號：NSC90-2521-S-032-002

執行期間：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：李武炎

E-mail:lee@math.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱：淡江大學數學系

微積分中極限單元之教材設計

一、中文摘要

極限可說是微積分中最基本也是最重要的觀念。在微積分的發展淵源中，極限的概念不曾為數學家所引進，直到牛頓才首揭其義，並加以詮釋，後來歌西等數學家將牛頓極限的意義加以清晰化，並賦以嚴謹的數學定義。在本計畫中我們特別針對這單元,設計一套完整的教材,希望能幫助學生了解極限的意義,特別是公設化的定義。這一套教材提供充分的範例可當作教師教學中之輔助教材,同時也提供學生課外複習的工具之用。

關鍵詞：微積分，極限。

二、英文摘要

The concept of limits is the basic and most important one in calculus. The aspects of the ideal of a limit are implicit in the early beginnings of calculus. It was

Isaac Newton who was the first to talk explicitly about limits and explain the main meaning behind it. It was left to later mathematicians like Cauchy to clarify his ideal about limits and give a rigorous definition. In this project, we have developed a thorough teaching material for the topic of limits. It will help the students to understand the ideal of limits. It can be used for instructors to assist their teachings. For the students, it serves as a good tool for review after classes.

Keywords: calculus, limit.

在微積分的內容中，極限的單元一直扮演相當重要的角色。雖然在高中數學教材中，已經有了初步的介紹，但都僅止於極限的計算。在本計畫中，我們將著重於極限的意義，特別是公設化的定義，教材的編寫同時也配合了子計畫二的評量設計，對於極限，我們將從直覺的定義引入，並複習一些計算技巧的應用，接著再進入極限的嚴格定義，利用不同的範例解釋其涵義。

在極限的直覺定義中，我們首揭極限的直接涵義：

若 f(x)為一函數，當 x 非常靠近 a，但是不等於 a 時，f(x)之值就會非常靠近 L，而且 f(x)可以任意靠近 L〈儘如我們所願〉，只要讓 x 盡量靠近 a〈但不等於 a〉就可以如願，在此情況下，我們稱〝當 x 趨近 a 時，f(x)的極限為 L〞並記為 $\lim_{x\to a} f(x) = L$

例一：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

例二：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

例三：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

例四：

$\lim_{x\to 0}\sin\frac{\text{®}}{x}$ 不存在

例五：

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1, \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在

例六：

$\lim_{x\to 3^+}[x] = 3, \lim_{x\to 3^-}[x] = 2, \lim_{x\to 3}[x]$ 不存在

例七：

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

極限的嚴格定義

設 f 是一函數，a 為一實數，對於任意正數£〈不管多小〉而言，一定存在一個正數¢，使得只要$0\langle|x-a|\langle ¢$，則

$|f(x)-L|\langle £$，在此情況下我們稱：當 x 趨近於 a，f(x)之極限為 L，也記為

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

例八：

證明 $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$

證：給定一個正數£，選取$¢=\frac{£}{4}$，則當

$0\langle|x-3|\langle ¢$ 時，

$$|(4x-5)-7|=|4x-12|$$

$$=4|x-3|\langle 4¢=4\left(\frac{£}{4}\right)=£$$

例九：

證明 $\lim_{x\to 3}x^2=3$

解：給定一個正數£，選取¢ =

$\min\left\{\frac{£}{7},1\right\}$，則當 $0\langle|x-3|\langle ¢$ 時,

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|\langle 7¢\le 7\cdot\frac{£}{7}=£$$

例十：

證明 $\lim_{x\to 2}x^3=8$

解：給定一個正數£，選取¢ =

$\min\left\{\frac{£}{19},1\right\}$，則當 $0\langle|x-2|\langle ¢$ 時,

$$|x^3-8|=|x-2||x^2+2x+4|\langle 19¢$$

$$\le 19\left(\frac{£}{19}\right)=£$$

例十一：

證明 $\lim_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$

解：給定一個正數£，選取¢ =

$\min\{(1+\sqrt{2})£,1\}$，則當 $0\langle|x-2|\langle ¢$ 時,

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=\frac{|x-2|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{2}\right|}=|x-2|\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$\langle ¢\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{¢}{1+\sqrt{2}}\le\frac{(1+\sqrt{2})£}{1+\sqrt{2}}=£$$

例十二：

證明 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

解：給定一個正數£，取$¢=\min\{2£,1\}$,

則當 $0\langle|x-2|\langle ¢$ 時,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot|x-2|\le\frac{1}{2}\cdot 1\cdot ¢=\frac{¢}{2}$$

$$\le\frac{2£}{2}=£$$

Reference

1. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999.

2. Dale Varberg and Edwin J. Purcell, Calculus, Seventh Edition, Prentice Hall International, Inc. 1997