行政院國家科學委員會專題研究計

RRPA89050219 (3 .P)

重力波之探討

Studies in Gravitational Waves

計畫編號：NSC 89-2112-M-032-003

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：曹慶堂　淡江大學物理系

一、中文摘要

在這個報告中，我們利用 Papapetrou 方程式來考慮自旋粒子在 Schwarzschild 黑洞時空中的運動。當一些自旋分量為零時，我們可以在這些比較簡單的情形，給出完全的解。

關鍵詞：自旋粒子、Schwarzchild 黑洞、粒子運動

Abstract

In this report we consider the motions of spinning particles in a Schwarzschild spacetime using the Papapetrou equations. Explicit sotutions are presented when some of the spin components vanish.

Keywords: Spinning particle 、Schwarzschild black hole 、particle motion

二、緣由與目的

愛恩斯坦的廣義相對論把我們對於時空的觀念，作出革命性的改變，並成為研究宇宙論及天文物理的基本理論。可惜的是這個理論所預言存在的重力波，卻到現在為止仍未被發現。偵測重力波的實驗，可以說是始於 Weber[1]。他從五十年代開始便進行這方面的實驗，用的是所謂"共振棒偵測器"(resonant-bar detector)。後來，重力波實驗發展到利用雷射光干涉原理的"光速偵測器"(beam detector)，但經過了三十多年的努力，仍未有重力波的蹤跡[2]，這也證明重力波跟其他物質的作用是十分微弱。最近，美國有 LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)[3]的大型光束偵測器正在建造當中，而歐洲方面也有類似的法意合作的 VIRGO 實驗室[4]。這些偵測器的精確度估計已達到可以捕捉如雙星系統末期所放出的重力波的程度。實驗的努力亦引起理論方面的一個熱潮，希望有更精確的計算結果，以便與快將有的實驗結果比較。

在兩顆星的距離遠大於它們的半徑的情況，它們的內部結構大致上可以被忽略，不論它們是白矮星，中子星或是黑洞，都可以看成是點粒子，並這個系統的典型位能和速度都遠少於光速，我們可以用所謂"後牛頓展開"(Post-Newtonian Expansion)的方法來處理[5、6]。

如它們的距離不太大的話，黑洞的結構變成十分重要[7]，計算這樣的一個雙星系統所產生的重力波，首先，要求得點粒子在黑洞空間中的軌道，然後把這個點粒子看成是重力波的源，並利用黑洞微擾的方法來計算所產生的重力波，全部計算都可以在黑洞的背景空間中進行[8、9]。

在這裏我們報告對於自旋粒子在 Schwarzschld 黑洞時空中運動的一些研究結果。一般的時空中，自旋粒子的運動是由 Papapetrou 方程式所描述，在 Schwarzchild 黑洞的情形，這一組方程式仍頗為複雜。為了得到較分析性的結果，我們特別考慮一些自旋有特定方向的情況，並給出完全的解。

三、結果和討論

在一般的彎曲時空中，自旋粒子的運動是由 Papapetrou 方程式來描述，

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau}=p^{\mu}u^{\nu}-p^{\nu}u^{\mu} \tag{1}$$

$$\frac{Dp^{\mu}}{D\tau}=-\frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}u^{\nu}S^{\rho\sigma} \tag{2}$$

其中 τ 是 proper 時間，$u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$，$\frac{D}{D\tau}\equiv u^{\mu}\nabla_{\mu}$，$\nabla_{\mu}$ 為協變微分，$S^{\mu\nu}$ 為自旋張量，p^{μ} 滿足

$$p^{\mu}=mu^{\mu}+u_{\nu}\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} \tag{3}$$

為動量，m 為粒子質量，$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ 是 Riemann 張量。

我們考慮 Schwarzschild 黑洞時空，度規可以取為

$$ds^2=(1-\frac{2M}{r})dt^2-(1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{4}$$

其中 M 為黑洞的質量。

Papapetrou 方程式在 Schwarzschild 黑洞時空中為

$$(m+m_s)(\ddot{t}+\lambda_4)-\frac{3}{r}\dot{r}\dot{t}m_s=0 \tag{5}$$

$$(m+m_s)(\ddot{r}+\lambda_1)-\frac{3}{r}\dot{r}^2m_s=0 \tag{6}$$

$$(m+m_s)(\ddot{\theta}+\lambda_2)-\frac{3}{r}\dot{r}\dot{\theta}m_s+\frac{3\mu'}{2r}\dot{r}S^{12}+\frac{3r\mu'}{2}e^{\mu}\sin^2\theta\dot{\phi}S^{23}=0 \tag{7}$$

$$(m+m_s)(\ddot{\phi}+\lambda_3)-\frac{3}{r}\dot{r}\dot{\phi}m_s+\frac{3r\mu'}{2r}\dot{r}S^{13}-\frac{3r\mu'}{2}e^{\mu}\dot{\theta}S^{23}=0 \tag{8}$$

其中 · 代表 $\frac{d}{d\tau}$ 和 ′ 代表 $\frac{d}{dr}$。 m_s 為"自旋等效質量"，

$$m_s=-\frac{r^2\mu'}{2}(\sin^2\theta\dot{\phi}S^{13}+\dot{\theta}S^{12}) \tag{9}$$

$$\mu=\ln(1-\frac{2M}{r}) \tag{10}$$

並

$$\lambda_1=\frac{\mu'}{2}e^{2\mu}\dot{t}^2-\frac{\mu'}{2}\dot{r}^2-re^{\mu}\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \tag{11}$$

$$\lambda_2=-\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}+\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \tag{12}$$

$$\lambda_3=\frac{e}{r}\dot{r}\dot{\phi}+2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \tag{13}$$

$$\lambda_4=\mu'\dot{r}\dot{t} \tag{14}$$

由於總角動量 J 守恆：J_x，J_y 和 J_z 均為常數。它們可以表示成

$$J_x=-\sin\theta\cos\theta\cos\phi\varsigma_1-\sin\phi\varsigma_2+r^2\cos\phi\sin^2\theta S^{23} \tag{15}$$

$$J_y=-\sin\theta\cos\theta\sin\phi\varsigma_1-\cos\phi\varsigma_2+r^2\sin\phi\sin^2\theta S^{23} \tag{16}$$

$$J_z=\sin^2\theta\varsigma_1+r^2\sin\theta\cos\theta S^{23} \tag{17}$$

其中

$$\varsigma_1=rS^{13}+r^2[(m+m_s)\dot{\phi}-\frac{\mu'}{2}S^{13}] \tag{18}$$

$$\varsigma_2=rS^{12}+r^2[(m+m_s)\dot{\theta}-\frac{\mu'}{2}S^{12}] \tag{19}$$

以下我們考慮一些特殊的情形，來得到比較分析的解。當 $S^{13}=S^{23}=0$ 時，粒子被限制在 ϕ=常數的平面上，

$$S^{12}=\frac{A}{r^2}(r-2M) \tag{20}$$

A 為積分常數，而 r 與 θ 的關係由

$$\theta=\int\frac{dr}{f(r)}\left[\frac{mr}{2AM}\pm\sqrt{\frac{3m-r}{Mr^2}-\frac{J}{AMr}+(\frac{mr}{2AM})^2}\right] \tag{21}$$

所描述，其中

$$f(r)=\frac{\left[(\frac{E}{m})^2-(J-A)^2e^{\mu}r^{-2}-4MA(J-1)e^{\mu}r^{-3}-\frac{9}{2}A^2M^2e^{\mu}r^{-4}+Be^{\mu}\right]^{1/2}}{m-\frac{AM}{r}\left[\frac{mr}{2AM}\pm\sqrt{\frac{r-3M}{r^2M}-\frac{J}{AMr}+(\frac{mr}{2AM})^2}\right]} \tag{22}$$

B 為積分常數。

當 $S^{12}=S^{23}=0$ 時，粒子被限制在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的平面上，而

$$S^{13}=C(\frac{e^{n}}{r}) \qquad (23)$$

C 為常數，r 和 ϕ 的關係與方程(21)一樣 $(\theta \leftrightarrow \phi)$。

當 $S^{12}=S^{13}=0$ 時，粒子的運動為直線，$\theta=\phi=$ 常數，

$$S^{23}=D/_{r^{2}} \qquad (24)$$

D 為常數，而 r 與 τ 的關係為

$$\tau=\frac{1}{F}\int\frac{dr}{\sqrt{(1-\frac{2M}{r})^{1/2}-G}} \qquad (25)$$

F，G 均為常數。

四、計劃成果自評

這裏我們報告關於在 Schwarzschild 黑洞時空中，自旋粒子運動的研究結果。由於運動方程組頗為複雜，我們祇有在特殊的情況，得到較分析性的解，下一步，我們希望能對一般的情況有更深入的了解，並探討自旋粒子在運動時所產生的重力波，以及這些重力波的產生對粒子運動的影響。這些問題我們會繼續進行研究。

五、參考文獻

[1] J. Weber, "*General Relativity and Gravitational Waves*" (Wiley Interscience, New York 1961).

[2] K. S. Thorne, in "*Three Hundred Years of Gravitation*", eds. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge 1987).

[3] A. Abramovici, W. E. Athouse, R. W. P. Drever, Y. Gürsel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spera, K. S. Thorne, R. E. Vogt, R. Weiss, S. E. Whitcomb, and M. E. Zucker, *Science*, 256 (1992) 325.

[4] C. Bradaschia et al, *Nucl Instrum. Methods*, A289 (1990) 518.

[5] R. Epstein and R. V. Wagoner, *Ap. J.* 197 (1975) 717.

[6] R. V. wagoner and C. M. Will, *Ap. J*, 210 (1976)

[7] T. Tanaka, M. Shibata, M. Sasaki, H. Tagoschi, and T. Nakamura, Prog. *Theo. Phys.*, 90 (1073) 65

[8] T. Nakamura, K. Oohara, and Y. Kojima, Prog. *Theo. Phys. (suppl.)*, 90 (1987) 1.

[9] E. poison, *phys. Rev.* D47 (1993) 1497.

[10] E. Corinaldesi and A. Papaetrou, *Proc. Rey. Soc,* A208 (1951) 259.